

**Задача 1.** Найти обратную матрицу к

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

с помощью алгебраических дополнений.

*Решение:* У матрицы существует обратная тогда и только тогда, когда её определитель,  $\Delta$ , не равен нулю. Если матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то обратной матрицей является } \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где  $A_{ij}$ , алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ , равно  $(-1)^{i+j} \det \Delta_{ij}$ .  $\Delta_{ij}$  – матрица размером  $2 \times 2$ , получающаяся вычёркиванием из первоначальной матрицы  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

Подсчитаем определитель матрицы,  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \det L &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= 6 + 6 + 6 - 27 - 8 - 1 = -18. \end{aligned}$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строки и 1-ого столбца:

$$\det \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строки и 2-ого столбца:

$$\det \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строки и 3-ого столбца:

$$\det \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -7.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строки и 1-ого столбца:

$$\det \Delta_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строки и 2-ого столбца:

$$\det \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -7.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строки и 3-ого столбца:

$$\det \Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строки и 1-ого столбца:

$$\det \Delta_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -7.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Таким образом обратная матрица равна

$$L^{-1} = \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/18 & 1/18 & 7/18 \\ 1/18 & 7/18 & -5/18 \\ 7/18 & -5/18 & 1/18 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:** матрица обратима, обратная матрица равна

$$\begin{pmatrix} -5/18 & 1/18 & 7/18 \\ 1/18 & 7/18 & -5/18 \\ 7/18 & -5/18 & 1/18 \end{pmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.