**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**Алтайский государственный технический университет**
**им. И. И. Ползунова**

**В. П. Зайцев**

# **М А Т Е М А Т И К А**

**Учебное пособие**
**для студентов-заочников 2-го курса**

Барнаул 2009

УДК 517.5 (075.5)

Зайцев В. П. Математика: Учебное пособие для студентов – заочников 2-го курса /Алт. гос. техн. ун–т им. И. И. Ползунова. – Барнаул: АлтГТУ, 2009. – 151 с.

Данное учебное пособие является продолжением пособия Зайцева В. П. по математике для студентов – заочников 1-го курса.

Пособие ориентировано на организацию самостоятельной работы студентов-заочников по изучению учебной дисциплины «Математика» на втором курсе.

Содержит краткое изложение основных теоретических понятий и методов решения типовых примеров по четырём разделам высшей математики: неопределённый и определённый интеграл; дифференциальные уравнения; ряды; определённые интегралы по фигурам.

Приведены задания четырёх контрольных работ (по 30 вариантов в каждой). Прилагается список литературы, которой рекомендуется пользоваться, наряду с данным пособием, при выполнении работ.

Сформулированы вопросы для проверки знаний теоретического материала.

Рекомендовано к изданию на заседании
кафедры высшей математики АлтГТУ.

Рецензент: А. С. Киркинский – к.ф.-м.н., профессор кафедры
высшей математики АлтГТУ

## СОДЕРЖАНИЕ

## Раздел 9. РЯДЫ



## Раздел 10. ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ФИГУРАМ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие предназначено для студентов – заочников 2-го курса и является продолжением пособия автора для студентов – заочников 1-го курса.

В третьем семестре изучаются два раздела математики: неопределённый и определённый интеграл; дифференциальные уравнения.

В четвёртом семестре также изучаются два раздела математики: ряды; определённые интегралы по фигурам.

По каждому из этих разделов необходимо выполнить контрольную работу. В конце каждого семестра – экзамен.

Данное пособие содержит по каждому разделу:

1) необходимые краткие теоретические сведения (определения, формулировки основных теорем, расчётные формулы, большое число разобранных примеров);

2) задания контрольной работы (30 вариантов).

В начале каждого раздела указывается учебная литература и те номера глав, модулей, которые студент должен изучить перед выполнением контрольного задания по данному разделу. Пособия обозначаются номерами в квадратных скобках, согласно списку рекомендуемой литературы, который приводится в данном пособии.

Если студент испытывает затруднение в освоении теоретического или практического материала, то он может получить консультацию у преподавателя.

Каждая контрольная работа должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы, адрес, учебную группу, название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта, дату отправки работы в университет.

Номер варианта задания контрольной работы каждому студенту определяет преподаватель.

Условие каждой задачи должно быть полностью переписано из задания перед её решением. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\int f(x)dx$ – неопределённый интеграл от функции $f(x)$. Здесь $\int$ **-** знак интеграла, $f(x)$**-** подынтегральная функция, $dx$ **-** дифференциал переменной $x$.

$\int_a^b f(x)dx$ – определённый интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$ – знак подстановки.

$r, \varphi$ – полярные координаты.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – числовой ряд с общим членом $a_n$.

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ – $n$-я частичная сумма ряда.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left( x - x_0 \right)^n$ – степенной ряд ( по степеням $x - x_0$).

$E$ – общее обозначение всех четырёх рассматриваемых фигур ($D$, $T$, $L$, $\Sigma$ ).

$\int\limits_{E} f(M)dE$ – общее обозначение определённого интеграла по фигуре $E$.

$\iint\limits_{D} f\left(M\right)dS$ – двойной интеграл по плоской области $D$ от заданной на ней функции $f\left(M\right)$.

$\iiint\limits_{T} f\left(M\right)dV$ – тройной интеграл по пространственному телу $T$ от заданной на нём функции $f\left(M\right)$.

$\int\limits_{L} f\left(M\right)dL$ – криволинейный интеграл по линии $L$ от заданной на ней функции $f\left(M\right)$.

$\iint\limits_{\Sigma} f\left(M\right)d\sigma$ – поверхностный интеграл по поверхности $\Sigma$ от заданной на ней функции $f\left(M\right)$.

$\rho\left(M\right)$ – плотность массы в любой текущей точке $M$ фигуры $E$.

# КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

## 3-й семестр

### Раздел 7. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ И ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Что называется первообразной для данной функции? Привести примеры.
2. Как устроено множество всех первообразных для функции?
3. Что называется неопределённым интегралом?
4. В чём состоит метод подведения под знак дифференциала?
5. Как осуществляется интегрирование с помощью подстановки или замены переменной?
6. Сформулировать метод интегрирования по частям. Для интегралов каких типов применяют этот метод?
7. В чём состоит метод интегрирования рациональных дробей?

8. Как составляются интегральные суммы для данной функции на данном отрезке? Что называется определённым интегралом?
9. Каков геометрический и механический смысл определённого интеграла от данной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$?
10. Сформулировать основные свойства определённого интеграла.
11. Сформулировать формулу Ньютона –Лейбница. Привести пример.
12. В чём состоит метод замены переменной (подстановки) в определённом интеграле?
13. Что называется несобственным интегралом от данной функции по бесконечному интервалу?
14. Что называется несобственным интегралом от неограниченной функции?
15. Вычисление площади плоской фигуры.
16. Вычисление длины дуги кривой.
17. Вычисление объёма тела вращения.
18. Вычисление площади поверхности тела вращения.

## Раздел 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Что называется д. у. 1-го порядка и его решением? Задача Коши. Дать определение общего решения, частного решения, особого решения.
2. Дать определение д. у. с разделяющимися переменными и указать метод его решения.
3. Какие д. у. называются однородными? Метод их решения.
4. Какие д. у. 1-го порядка называются линейными? Методы их решения.
5. Дать определение д. у. Бернулли и указать методы его решения.
6. Дать определение д. у. в полных дифференциалах. Необходимое и достаточное условие. Метод решения.
7. Что называется д. у. 2-го порядка и его решением? Задача Коши. Дать определение общего решения, частного решения.
8. Изложить способ решения д. у. $y'' = f\left(x\right)$.
9. Изложить способ решения д. у. $y'' = f\left(x, y'\right)$.
10. Изложить способ решения д. у. $y'' = f\left(y, y'\right)$.
11. ЛОДУ 2-го порядка. Свойства решений. Понятие фундаментальной системы решений.
12. Сформулировать теорему о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка.
13. Сформулировать теорему о структуре общего решения ЛНДУ 2-го порядка.
14. В чём состоит метод вариации произвольных постоянных получения общего решения ЛНДУ 2-го порядка?
15. Общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае различных действительных характеристических чисел.
16. Общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в

случае комплексных характеристических чисел.

17. Общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае равных характеристических чисел.
18. Отыскание частного решения ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью $f(x) = e^{ax} P_m(x)$.
19. Отыскание частного решения ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью $f(x) = e^{ax} [P_m(x)\cos bx + Q_k(x)\sin bx]$.
20. Нормальная система д. у. Задача Коши. Что называется общим и частным решениями такой системы?
21. Описать приём сведения нормальной системы 2-х д. у. к одному д. у. 2-го порядка.

## <u>4-й семестр</u>

## Раздел 9. РЯДЫ

1. Понятие ряда. Дать определение сходящегося и расходящегося рядов, суммы ряда. Привести примеры.
2. В чём состоит необходимый признак сходимости ряда? Привести пример, показывающий, что он не является достаточным.
3. Сформулировать интегральный признак сходимости. Ряд Дирихле.
4. Сформулировать 1-й признак сравнения знакоположительных рядов.
5. Сформулировать 2-й признак сравнения знакоположительных рядов.
6. Сформулировать признак сходимости Даламбера.
7. Сформулировать признак сходимости Коши.
8. Сформулировать признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.
9. Что называется абсолютной и условной сходимостью знакопеременного ряда? Привести примеры.
10. Какой ряд называется степенным?
11. Сформулировать теорему Абеля.
12. Нахождение радиуса сходимости и интервала сходимости степенного ряда.
13. Сформулировать основные свойства степенных рядов.
14. В чём заключается задача разложения функции в степенной ряд?
15. Что называется рядом Тейлора функции $f(x)$?
16. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условиях разложимости функции в ряд Тейлора.
17. Разложения в ряд Маклорена функций $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\ln(1+x)$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$. Указать их области сходимости.
18. Приближенное вычисление значения функции с помощью степенных рядов. Привести пример.
19. В чём состоит метод интегрирования функций с помощью степенных рядов? Привести пример.
20. В чём состоит метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов? Привести пример.

21. Записать общую формулу разложения в ряд Фурье функции с периодом $2\pi$.
22. Сформулировать условия разложения функции в ряд Фурье (теорема Дирихле).
23. Записать разложение в ряд Фурье функции с произвольным периодом.
24. Как можно раскладывать в ряд Фурье непериодическую функцию?

## Раздел 10. ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ФИГУРАМ

1. Как составляются интегральные суммы для данной функции по плоской области $\boldsymbol{D}$? Что называется двойным интегралом?
2. Как составляются интегральные суммы для данной функции по пространственному телу $\boldsymbol{T}$? Что называется тройным интегралом?
3. Как составляются интегральные суммы для данной функции по линии $\boldsymbol{L}$? Что называется криволинейным интегралом 1-го рода?
4. Как составляются интегральные суммы для данной функции по поверхности $\boldsymbol{\Sigma}$? Что называется поверхностным интегралом 1-го рода?
5. Сформулировать основные свойства определённого интеграла по фигуре.
6. Вычисление двойного интеграла.
7. Вычисление тройного интеграла.
8. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.
9. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода.
10. Геометрические приложения определённого интеграла по фигуре.
11. Приложения определённого интеграла по фигуре к решению некоторых задач механики.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Зайцев В. П. Математика: Учебное пособие. Часть 2. / Алт. гос. техн. ун-т им. И. И. Ползунова. Центр дистанционного обучения. – 4-е изд., испр. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2005. – 237 с.

2. Зайцев В. П. Математика: Учебное пособие. Часть 3. / Алт. гос. техн. ун-т им. И. И. Ползунова. Центр дистанционного обучения. – 4-е изд., испр.– Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2005. – 209 с.

3. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 608 с.: ил. – (Высшее образование).

4. Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики, том 2. Изд. 2-е, переработ. и доп. Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1973. – 400 с.

5. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М.: Наука. – 1981.– 464 с.

6. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича: В 3т. Т.2.– М.: Наука, 1986.– 368 с.

## Раздел 7. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ И ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Литература: [1, модуль 14, 15]; [3, глава 7, 8]; [5, глава 6].

### 1. Первообразная и неопределённый интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является отыскание производной $f'(x)$ для данной функции $f(x)$ или её дифференциала $df(x)=f'(x)dx$.

Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная её производную $F'(x)=f(x)$ (или дифференциал).

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале ***(a, b)***, если $f(x)$ является производной для $F(x)$, т. е. если

$$\forall x\in(a,b)\quad F'(x)=f(x).$$

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $C$ – любое число, то $F(x)+C$ – тоже первообразная для $f(x)$, так как $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$.

Таким образом, первообразных для функции существует бесконечно много, например, для функции $f(x)=\cos x$ первообразными на всей числовой прямой $R$ являются функции $F(x)=\sin x,\quad F(x)=\sin x-4,\quad F(x)=3+\sin x$ или, вообще, $F(x)=\sin x+C$, где $C$ – любое число.

Верно и обратное утверждение: *любые первообразные для данной функции отличаются на постоянное слагаемое*, т. е. если $F(x)$ – какая-либо первообразная для $f(x)$, то все первообразные для $f(x)$ можно записать в виде $F(x)+C$.

Множество всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом от функции* $f(x)$.

Для неопределённого интеграла используется обозначение: $\int f(x)dx$.

Здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Итак,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{где } F'(x) = f(x). \tag{7.1}$$

Операция нахождения неопределённого интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

***Пример 7.1.*** Показать, что $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ на любом интервале, не содержащем $x = 0$.

*Решение*. Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то функция $\ln x$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Однако $\ln x$ имеет смысл только при $x > 0$. Для отрицательных $x$ получим $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$, поэтому при $x < 0$ первообразной для $\frac{1}{x}$ является функция $\ln(-x)$. Так как $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$, то

$\forall x \neq 0 \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, значит $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

Из определения неопределённого интеграла и дифференциала следует, что

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx,$$

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Интегрирование, как и дифференцирование, является линейной операцией, т. е. интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от каждой функции, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx,$$
$$\int\alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx.$$

## 2. Таблица интегралов

Каждая формула дифференциального исчисления $F'(x)=f(x)$ равносильна формуле интегрального исчисления $\int f(x)dx=F(x)+C$ .

Для производных основных элементарных функций была составлена таблица производных. Теперь составим таблицу наиболее важных, основных интегралов, которой будем пользоваться при решении задач.

1) $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C\quad (a\in R,\ a\neq -1)$; 2) $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$;

3) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\quad (a>0,\ a\neq 1)$, в частности, $\int e^x dx=e^x+C$ ;

4) $\int\sin x dx=-\cos x+C$ ; 5) $\int\cos x dx=\sin x+C$ ;

6) $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=tgx+C$ ; 7) $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+C$ ;

8) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$ ; 9) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$ ;

10) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ ; 11) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$ .

Каждую из формул таблицы можно проверить (доказать) с помощью дифференцирования.

Используя таблицу интегралов и свойство линейности, можно вычислять простейшие интегралы.

***<u>Пример 7.2.</u>*** Вычислить $\int\left(\frac{2}{2+x^2}+\frac{1}{3x}-\sqrt[3]{x}+1\right)dx$ .

*Решение*. Пользуемся линейностью интеграла и таблицей интегралов:

$$\int\left(\frac{2}{2+x^2}+\frac{1}{3x}-\sqrt[3]{x}+1\right)dx=2\int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2+x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}-\int x^{\frac{1}{3}}dx+\int dx=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}ln|x|-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+x+C.$$

## 3. <u>Интегрирование методом замены переменной</u>

Рассматриваемый метод имеет два варианта (теоретически они отличаются мало).

### 3.1. *Подведение под знак дифференциала.*

Этот подход основан на <u>*теореме (инвариантность формулы интегрирования)*</u>.

*Пусть* $\int f(x)dx=F(x)+C$, $u=u(x)$ *– дифференцируемая функция. Тогда*

$$\int f(u)du=F(u)+C,$$

*т. е. любая формула интегрирования остаётся справедливой, если независимую переменную* $x$ *заменить на произвольную дифференцируемую функцию.*

Например, $\int sin(5x)d(5x)=-cos(5x)+C$, $\int\frac{d\left(x^2-1\right)}{x^2-1}=ln\left|x^2-1\right|+C$.

При подведении под знак дифференциала функции $f(x)$ полезно использовать свойство неопределённого интеграла: $f(x)dx=d\left(\int f(x)dx\right)$.

Например: $x^2dx=d\left(\int x^2dx\right)=d\left(\frac{x^3}{3}+C\right)=\frac{1}{3}d\left(x^3+C\right)$;

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=d\left(\int\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)=d\left(\int x^{-\frac{1}{2}}dx\right)=d\left(2\sqrt{x}\right)=2d\left(\sqrt{x}\right);$$

$$\frac{dx}{cos^2x}=d\left(\int\frac{dx}{cos^2x}\right)=d\left(tgx\right)$$ и т. д.

<u>***Пример 7.3.***</u> Вычислить интегралы, используя подведение под знак дифференциала:

а) $\int (5x-3)^9 dx$;     б) $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$;     в) $\int tg\, x\, dx$.

*Решение.* а) $\int (5x-3)^9 dx = \frac{1}{5}\int (5x-3)^9\, d(5x-3) = |u = 5x-3| =$

$$= \frac{1}{5}\int u^9 du = \frac{1}{5}\frac{u^{10}}{10} + C = \frac{(5x-3)^{10}}{50} + C.$$

б) $\int \frac{\sqrt{arctg\, x}}{1+x^2}dx = \int (arctg\, x)^{\frac{1}{2}} d(arctg\, x) = \frac{2(arctg\, x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$.

в) $\int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.

**3.2. *Подстановка или замена переменной.***

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$. Произведём в подынтегральном выражении замену переменной интегрирования $x$, положив $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция, которая имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Если замена $x = \varphi(t)$ выбрана удачно, то интеграл в правой части последнего равенства проще исходного или совпадает с табличным.

Наиболее целесообразная для данного интеграла замена переменной, т. е. выбор функции $x = \varphi(t)$, не всегда очевидна. Укажем некоторые подстановки.

| Интеграл | Подстановка |
|---|---|
| $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ | $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ |
| $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ | $x = a\sin t$ |
| $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ | $x = a\, tgt$ |

| | |
|---|---|
| $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ | $x=\frac{a}{\sin t}$ |
| $\int R(\sin x,\cos x)dx$ | $tg\frac{x}{2}=t$ |

Здесь $R(u_1,u_2)$ – рациональное выражение от величин $u_1$, $u_2$, т. е. любое выражение, которое можно получить из $u_1$, $u_2$ и действительных чисел с помощью арифметических действий.

***Пример 7.4.*** Вычислить интеграл $J=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ с помощью подстановки $x=a\sin t$.

*Решение.* Так как $x=a\sin t$, то $dx=d(a\sin t)=a\cos t\,dt$.

Подставляя эти соотношения в подынтегральное выражение, получим

$$J=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt=a^2\int\cos^2 t dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\int dt+\frac{1}{2}\int\cos(2t)d(2t)\right]=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]+C=\frac{a^2}{2}\left[t+\sin t\cos t\right]+C.$$

Нужно вернуться к переменной $x$. Так как $x=a\cdot\sin t$, то $\frac{x}{a}=\sin t$. Отсюда

$t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$, $\cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$. Подставляя эти соотношения в результат интегрирования, найдём $J=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right]+C$.

***Пример 7.5.*** Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{5+3\sin x+4\cos x}$.

*Решение*. Применим универсальную тригонометрическую подстановку $tg\frac{x}{2}=t$. Через новую переменную $t$ можем выразить $\sin x$, $\cos x$, $dx$:

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{t^2+1},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}=\frac{1-t^2}{t^2+1},$$

$$dx=d(2arctgt)=\frac{2}{t^2+1}dt.$$

Поэтому $\int \frac{dx}{5+3\sin x+4\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{5+3\frac{2t}{t^2+1}+4\frac{1-t^2}{t^2+1}}=2\int \frac{dt}{t^2+6t+9}=$

$$=2\int \frac{dt}{\left(t+3\right)^2}=2\int \left(t+3\right)^{-2}d\left(t+3\right)=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{tg\frac{x}{2}+3}+C.$$

## 4. Интегрирование по частям

Пусть $u=u\left(x\right)$ и $v=v\left(x\right)$ – заданные дифференцируемые функции, а $du$ и $dv$ – их дифференциалы. Тогда справедлива *формула интегрирования по частям*:

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (7.2)$$

Общее правило применения метода интегрирования по частям к интегралу $\int f(x)dx$ состоит в том, что нужно разбить выражение $f(x)dx$ на два сомножителя $u$ и $dv$. Ясно, что такое разбиение можно сделать множеством способов.

При выборе подходящего разбиения необходимо учитывать следующее:

а) величина $dx$ должна быть частью $dv$;

б) нужно уметь интегрировать величину $dv$, взяв за $v$ одну из первообразных;

в) $\int vdu$ должен быть проще, чем $\int udv$.

Полезно применять этот метод для вычисления следующих интегралов:

1. $\int P_n(x)\cdot e^x\,dx$;
2. $\int P_n(x)\cdot \sin x\,dx$;
3. $\int P_n(x)\cdot \cos x\,dx$;
4. $\int P_n(x)\cdot \ln x\,dx$;
5. $\int P_n(x)\cdot \arcsin x\,dx$;
6. $\int P_n(x)\cdot \arccos x\,dx$;
7. $\int P_n(x)\cdot arctg\,x\,dx$;
8. $\int P_n(x)\cdot arcctg\,x\,dx$.

где $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ – многочлен $n$-ой степени.

Для интегралов 1 – 3 принимают за $u$ множитель $P_n(x)$, всё остальное – за $dv$, а для интегралов 4 – 8 наоборот: за $dv$ принимают множитель $P_n(x)dx$, а остальное – за $u$.

***Пример 7.6.*** Вычислить $\int x^2\ln xdx$.

*Решение*. Под интегралом логарифмическая функция $\ln x$ умножается на степенную функцию $x^2$. Следуя рекомендации, рассмотрим разбиение подынтегрального выражения: $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$. Интеграл принимает вид $\int u dv$.

Чтобы применить формулу интегрирования по частям, нужно ещё знать $du$ и $v$. Вычисляем дифференциал $du = d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$ и, если $dv = x^2 dx$, то $v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ (из множества первообразных выбрали одну, положив, например, $C = 0$).

Кратко вычисления записываем так:

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ dv = x^2 dx \\ du = \frac{1}{x} dx,\ v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

***Пример 7.7.*** Вычислить интеграл $J = \int e^{2x} \cos x dx$.

*Решение*. Применим интегрирование по частям. Положим $u = \cos x$, $dv = e^{2x} dx$, тогда $du = -\sin x dx$, $v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x}$. Имеем

$$J = \cos x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} (-\sin x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x dx.$$

Интеграл в правой части отличается от данного интеграла только тем, что функция $\cos x$ заменилась на $\sin x$. Попробуем ещё раз аналогично применить интегрирование по частям: $u = \sin x$, $dv = e^{2x} dx \Rightarrow du = \cos x dx$, $v = \frac{1}{2} e^{2x}$;

$$J = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x dx \right] + C.$$

Итак, в результате двух применений формулы интегрирования по частям мы пришли снова в правой части к первоначальному интегралу $J$.

Казалось бы, что от этого вычисление интеграла вперёд не продвинулось. Однако, на самом деле получается уравнение, из которого и находится искомый интеграл $J$: $J = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} J + C \Rightarrow J = \frac{1}{5} e^{2x} (2\cos x + \sin x) + C$.

## 5. Интегрирование рациональных дробей

Дробно–рациональной функцией или *рациональной дробью* называется функция вида

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0},$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени $n$ и $m$ соответственно, причём $m \neq 0$ .

Рациональная дробь называется *правильной*, если $n<m$ , и *неправильной*, если $n \geq m$ .

Например, рациональные дроби $\frac{2x-1}{x^2+1}$, $\frac{1}{4x+5}$ являются правильными, а рациональные дроби $\frac{x^2-x}{x+4}$, $\frac{3x^2+2x-1}{x^2+7}$ – неправильные.

Всякую неправильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно путём деления числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена $h(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{r_k(x)}{Q_m(x)}$, $k<m$ , т. е. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=h(x)+\frac{r_k(x)}{Q_m(x)}$.

***Пример 7.8.*** Преобразовать неправильную дробь $\frac{3x^4+2x-1}{x^2-x+1}$, выделив целую часть.

*Решение.*

$$\frac{3x^4+2x-1}{x^2-x+1}=\left|\begin{array}{r|l} -\,3x^4+2x-1 & x^2-x+1 \\ 3x^4-3x^3+3x^2 & \overline{3x^2+3x} \\ \hline -\,3x^3-3x^2+2x-1 & \\ 3x^3-3x^2+3x & \\ \hline \underbrace{-x-1}_{\text{остаток}} & \end{array}\right|=\underbrace{3x^2+3x}_{\text{целая часть}}+\frac{-x-1}{x^2-x+1}.$$

Интегрирование многочлена не представляет затруднений. Поэтому рассмотрим интегрирование правильных рациональных дробей.

Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь. Из алгебры известно, что многочлен $Q_m(x)$ может быть разложен на линейные и квадратичные множители следующим образом :

$$Q_m(x)=a(x-c_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-c_r)^{k_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}. \quad (*)$$

Здесь $c_1, \ldots, c_r$ – действительные корни, $k_1, \ldots, k_r$ – их кратности; каждый квадратный трёхчлен имеет отрицательный дискриминант.

В алгебре доказывается, что любая правильная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ может быть разложена на сумму дробей более простого устройства – «простейших» дробей, вид которых зависит от типов множителей, входящих в разложение многочлена знаменателя.

1) Множителю типа $x - c$ в (∗) соответствует в этой сумме дробь $\dfrac{A}{x-c}$, где $A$ – некоторый коэффициент.

2) Множителю типа $(x - c)^k$ в (∗) соответствует сумма простейших дробей, имеющая вид

$\dfrac{A_1}{x-c}+\dfrac{A_2}{(x-c)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(x-c)^k}$, где $A_1, \ldots, A_к$ – некоторые коэффициенты.

3) Множителю типа $x^2 + px + q$ соответствует простейшая дробь вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ с некоторыми коэффициентами $M$, $N$.

4) Множителю типа $(x^2+ px + q)^t$ соответствует сумма простейших дробей вида

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+px+q)^t}.$$

Коэффициенты разложения можно определить *методом приравнивания коэффициентов.* Идея метода:

а) обе части разложения умножим на $Q_m(x)$, в результате получим тождество $P_n(x)\equiv T(x)$, где $T(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами.

б) приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях полученного тождества, получим систему линейных уравнений, из которой и определяются коэффициенты разложения.

Также применяется *метод отдельных значений переменной* $x$: после получения тождества переменной $x$ придают конкретные значения столько раз, сколько имеется коэффициентов разложения (в первую очередь полагают вместо $x$ значения действительных корней многочлена $Q_m(x)$).

***Пример 7.9.*** Разложить в сумму простейших дробей рациональную дробь

$$\frac{x^3-6x^2+2x+1}{x^4-x^3-x^2+x}.$$

*Решение.* Дробь правильная (степень числителя $3$, степень знаменателя $4$).

Разложим знаменатель на простые множители:

$$x^4-x^3-x^2+x=x\left(x^3-x^2-x+1\right)=x\left[x^2(x-1)-(x-1)\right]=x(x-1)^2(x+1),$$

а затем пользуемся правилом разложения дроби. Множители $x$ и $(x+1)$ входят в 1-ой степени, поэтому им соответствуют по одной простейшей дроби, множитель $(x-1)$ входит во 2-й степени, поэтому ему соответствует сумма двух простейших дробей. Итак,

$$\frac{x^3-6x^2+2x+1}{x(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{D}{x+1}.$$

Найдём числа $A$, $B_1$, $B_2$, $D$. Для этого избавимся в полученном выражении от знаменателей, умножая обе части равенства на $x(x-1)^2(x+1)$:

$$x^3-6x^2+2x+1=A(x-1)^2(x+1)+B_1x(x-1)(x+1)+B_2x(x+1)+Dx(x-1)^2.$$

Нам требуется найти такие числа $A$, $B_1$, $B_2$, $D$, чтобы это равенство было *тождеством*, т. е. выполнялось при любом $x$.

Рассмотрим в данном примере оба метода отыскания этих чисел.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим четыре уравнения для определения $A$, $B_1$, $B_2$, $D$:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \multirow{4}{*}{$\begin{cases} 1=A+B_1+D, \\ -6=-A+B_2-2D, \\ 2=-A-B_1+B_2+D, \\ 1=A. \end{cases}$} \\ x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}$$

Решая, получим результат: $A=1$, $B_1=-2$, $B_2=-1$, $D=2$.

Другой способ: подставляя наиболее удобные значения $x$, получим также систему четырёх уравнений для определения $A$, $B_1$, $B_2$, $D$:

$$\begin{array}{l|l} x=0 & \multirow{4}{*}{$\begin{cases} 1=A, \\ -2=2B_2, \\ -8=-4D, \\ -11=3A+6B_1+6B_2+2D. \end{cases}$} \\ x=1 & \\ x=-1 & \\ x=2 & \end{array}$$

Отсюда находим те же значения: $A=1$, $B_1=-2$, $B_2=-1$, $D=2$.

Следовательно, $\dfrac{x^3-6x^2+2x+1}{x(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x+1}.$

Рассмотрим *интегрирование простейших дробей*.

1) $\int \frac{A}{x-c}dx = A\int \frac{1}{x-c}d(x-c) = A\ln|x-c| + C$.

2) $\int \frac{A}{(x-c)^k}dx = A\int (x-c)^{-k}d(x-c) = A\frac{(x-c)^{-k+1}}{-k+1} + C, \quad k \neq 1$.

3) Интегрирование дроби $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^t}$ рассмотрим только для случая $t = 1$. Вначале выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}\right) + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2.$$

Мы обозначили $q - \frac{p^2}{4} = a^2$ для краткости, учитывая, что дискриминант $\frac{p^2}{4} - q < 0$ (по определению простейшей дроби), а значит $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Вычисляем интеграл с помощью замены переменной:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2}dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{Mt - \frac{Mp}{2} + N}{t^2 + a^2}dt =$$

$$= M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}.$$

Первый интеграл вычисляется подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{tdt}{t^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C.$$

Интеграл во втором слагаемом является табличным:

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Итак, возвращаясь к переменной $x$, получим:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{N-0,5Mp}{\sqrt{q-0,25p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+0,5p}{\sqrt{q-0,25p^2}} + C.$$

***Пример 7.10.*** Найти $J=\int\frac{x^4-x^2+5x-2}{x^3-2x^2+2x}dx$.

*Решение*. Подынтегральная дробь является неправильной. Выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель. Получим

$$\frac{x^4-x^2+5x-2}{x^3-2x^2+2x}=x+2+\frac{x^2+x-2}{x^3-2x^2+2x}.$$

Разложим получившуюся правильную дробь на сумму простейших:

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-2x^2+2x}=\frac{x^2+x-2}{x\left(x^2-2x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2-2x+2}.$$

Избавимся в рассматриваемом разложении от знаменателей, умножая обе части равенства на $x(x^2-2x+2)$: $x^2+x-2=A\left(x^2-2x+2\right)+\left(Bx+D\right)x$.

Найдём коэффициенты $A$, $B$, $D$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в полученном тождестве:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases}1=A+B,\\ 1=-2A+D,\\ -2=2A.\end{cases}$$

Решение этой системы: $A=-1$, $B=2$, $D=-1$.

Следовательно:

$$J=\int\left(x+2-\frac{1}{x}+\frac{2x-1}{x^2-2x+2}\right)dx=\int xdx+2\int dx-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2x-1}{x^2-2x+2}dx.$$

Имеем:

$$\int xdx=\frac{x^2}{2}+C_1;\quad 2\int dx=2x+C_2;\quad \int\frac{dx}{x}=ln\,|\,x\,|+C_3;$$

$$\int\frac{2x-1}{x^2-2x+2}dx=\int\frac{2x-1}{(x-1)^2+1}dx=\left|x-1=t\Rightarrow x=t+1,\ dx=dt\right|=$$

$$=\int\frac{2(t+1)-1}{t^2+1}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2+1}=\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}+arctg\,t=ln\left(t^2+1\right)+arctg\,t+C_4=$$

$$=ln\left(\left(x-1\right)^2+1\right)+arctg\left(x-1\right)+C_4.$$

Итак, $J=\dfrac{x^2}{2}+2x-ln\left|x\right|+ln\left(x^2-2x+2\right)+arctg\left(x-1\right)+C$.

## 6. Понятие определённого интеграла

Пусть на отрезке $\left[a,b\right]$ задана функция $f\left(x\right)$. Выполним следующие действия (см. рисунок 1):

1) с помощью точек $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ $\left(x_0<x_1<\ldots<x_n\right)$ разделим отрезок $\left[a,b\right]$ на $n$ частичных отрезков $\left[x_0,x_1\right],\left[x_1,x_2\right],\ldots,\left[x_{n-1},x_n\right]$;

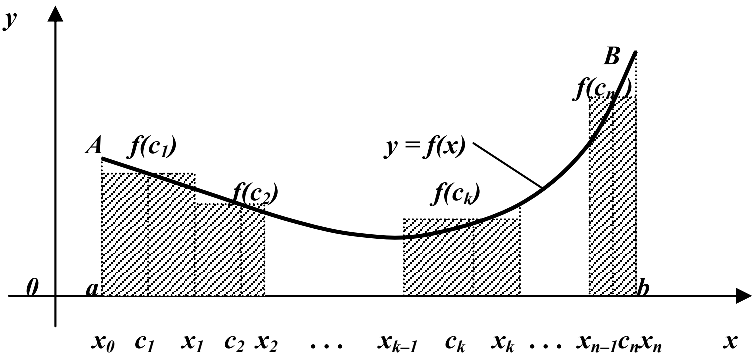


Рисунок 1

2) выберем на каждом отрезке $\left[x_{i-1},x_i\right]$, $i=1,\ldots,n$ по одной произвольной точке $c_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. $f\left(c_i\right)$;

3) для каждого отрезка $\left[x_{i-1},x_i\right]$, $i=1,\ldots,n$ составим произведение $f\left(c_i\right)\Delta x_i$, где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ – длина этого отрезка;

4) составим сумму всех таких произведений

$$S_n=f\left(c_1\right)\Delta x_1+f\left(c_2\right)\Delta x_2+\ldots+f\left(c_n\right)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i\,, \qquad (7.3)$$

называемую *интегральной суммой* функции $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a,b\right]$.

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм при $n\to\infty$ (при условии, что $\lambda=\max\limits_i \Delta x_i\to 0$), который не зависит ни от способа разбиения отрезка $\left[a,b\right]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то этот предел называется *определённым интегралом от функции* $f\left(x\right)$ *на отрезке* $\left[a,b\right]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ . \qquad (7.4)$$

Числа $a$ и $b$ называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

<u>*Замечание.*</u> Понятие определённого интеграла распространяют на случаи, когда $a > b$ и $a = b$:

при $a > b$ полагают $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

при $a = b$ полагают $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Сформулируем <u>*теорему существования определённого интеграла*</u>: *если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и непрерывна на нём всюду, кроме, быть может, конечного числа точек (в которых функция может быть и не определена), то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.*

При этом говорят, что функция $f(x)$ *интегрируема* на отрезке $[a,b]$.

*Геометрический смысл определённого интеграла*: если $f(x) \ge 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции $aABb$ (см. рисунок 1).

*Механический смысл определённого интеграла*: путь $S$, пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определённому интегралу от скорости $v(t)$: $S = \int_a^b v(t)dt$.

## 7. <u>Основные свойства определённого интеграла</u>

1) *Свойство линейности определённого интеграла*:
если $A, B$ – произвольные числа, то

$$\int_a^b \left(Af_1(x) + Bf_2(x)\right)dx = A\int_a^b f_1(x)dx + B\int_a^b f_2(x)dx,$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов, а постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

2) *Свойство аддитивности определённого интеграла*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a,b),$$

т. е. интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям.

3) *Свойство монотонности определённого интеграла*:

если $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$,

т. е. при $a < b$ можно интегрировать неравенство почленно.

4) «*Теорема о среднем*»:

если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то

$$\exists c \in [a,b]: \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Число $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется *средним значением функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$.

## 8. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $F(x)$ является первообразной для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно вычислить по *формуле Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (7.5)$$

Запись $F(x)\Big|_a^b$ является краткой символической записью разности $F(b) - F(a)$.

***Пример 7.11.*** Вычислить определённые интегралы:

1) $\int\limits_{1}^{4}\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}+3\right)dx$ ; 2) $\int\limits_{0}^{2}f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2}, & 1<x\le 2\end{cases}$ .

*Решение.* 1) Подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[1,4]$, поэтому можно использовать формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^4 \left( 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} + 3 \right) dx = 2\int_1^4 x dx - \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx + 3\int_1^4 dx = \left( x^2 - 2\sqrt{x} + 3x \right)\Big|_1^4 =$$

$$= \left( 4^2 - 2 \cdot \sqrt{4} + 3 \cdot 4 \right) - \left( 1^2 - 2 \cdot \sqrt{1} + 3 \cdot 1 \right) = 22.$$

2) Функция $f(x)$ ограничена и непрерывна во всех точках отрезка $[0,2]$, кроме точки $x = 1$, где она имеет разрыв 1-го рода, значит она интегрируема.

Используя свойство аддитивности определённого интеграла, получим

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left( x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{x}\Bigg|_1^2 = 1.$$

Все методы, позволяющие вычислять неопределённые интегралы, применимы и для вычисления определённых интегралов. В частности, можно использовать интегрирование по частям или производить замену переменной. При применении этих методов к определённым интегралам имеются некоторые особенности. Рассмотрим их.

*Формула интегрирования по частям для определённого интеграла* может быть записана в виде

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du . \qquad (7.6)$$

***Пример 7.12.*** Вычислить $\int_0^\pi x \sin x dx$.

*Решение.*

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin x dx \\ du = dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = (-x \cos x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = -\pi \cos \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi .$$

Пусть для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана *подстановка* $x = \varphi(t)$. Тогда, если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны на отрезке

$[\alpha,\beta]$;

2) множеством значений функции $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$ является отрезок $[a,b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$,

то справедлива *формула замены переменной в определённом интеграле*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \tag{7.7}$$

<u>*Замечания.*</u>

1) Новые пределы интегрирования $\alpha$ и $\beta$ являются корнями уравнений $\varphi(t)=a$ и $\varphi(t)=b$ соответственно.

2) Иногда замена переменной в определённом интеграле производится не по формуле $x=\varphi(t)$, а по формуле $t=g(x)$. Тогда новые пределы $\alpha$ и $\beta$ легко определяются: $\alpha=g(a),\ \beta=g(b)$. В этом случае должна существовать обратная функция $x=g^{-1}(t)$.

3) При вычислении определённого интеграла по формуле (7.7) не нужно возвращаться к старой переменной интегрирования (как обязательно нужно делать в неопределённом интеграле), так как пределы интегрирования уже будут изменены в соответствии с подстановкой.

4) При использовании подстановки в определённом интеграле необходимо проверять выполнение всех сформулированных условий, иначе может быть получен неверный результат.

***<u>Пример 7.13.</u>*** Вычислить $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{1+2\sin^2x}$ с помощью подстановки $tgx=t$.

*Решение.*

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{1+2\sin^2x}=\left|\begin{array}{l} tgx=t,\quad x=arctgt,\quad dx=\dfrac{dt}{1+t^2},\quad \sin^2x=\dfrac{t^2}{1+t^2},\\ x=0\Rightarrow t=0,\quad x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1 \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{1+2\dfrac{t^2}{1+t^2}}=\int_0^1 \frac{dt}{1+3t^2}=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+t^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}arctg\frac{t}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

## 9. Несобственные интегралы

Вводя определённый интеграл как предел интегральных сумм, мы предполагали, что отрезок интегрирования конечный, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, данное выше определение теряет смысл. Рассмотрим некоторые возможные обобщения понятия определённого интеграла.

### 9.1. *Несобственные интегралы с бесконечными пределами.*

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$ то его называют *несобственным интегралом от функции* $f(x)$ *на неограниченном промежутке* $[a,+\infty)$ (*несобственный интеграл 1-го рода)* и обозначают символом $\int_a^{+\infty} f(x)dx.$ Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{7.8}$$

если этот предел существует и конечен. В этом случае принято говорить, что несобственный интеграл *существует* или *сходится*. Если же этот предел не существует или он бесконечен, то символу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ никакого числового значения не приписывают и, называя его по-прежнему несобственным интегралом, говорят, что этот несобственный интеграл *не существует* или *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty,b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{7.8′}$$

и несобственный интеграл на всей числовой оси $(-\infty,+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (7.8'')$$

где $c$ – любое число (при условии существования обоих несобственных интегралов справа).

Несобственные интегралы 1-го рода обладают рядом свойств, присущих определённым интегралам. В частности, для них можно записать *обобщённые формулы Ньютона-Лейбница*:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Здесь сделаны обозначения: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty)$.

***Пример 7.14.*** Исследовать на сходимость несобственный интеграл 1-го рода $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, где $p$ – произвольное число.

*Решение.* а) Если $p \neq 1$, то $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{1}^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}.$

б) Если $p = 1$, то $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{1}^{+\infty} = \infty$.

Таким образом, несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Например, $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и равен $1$, а $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится.

### 9.2. *Несобственные интегралы от неограниченных функций.*

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$, интегрируема на любом отрезке $[a,b_1]$, где $b_1 \in [a,b)$ и не ограничена в окрестности точки $b$.

Тогда, если существует конечный левосторонний предел $\lim\limits_{b_1 \to b-0} \int\limits_a^{b_1} f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом от неограниченной функции* $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (*несобственный интеграл 2-го рода*) и обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Итак, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} \int\limits_a^{b_1} f(x)dx, \tag{7.9}$$

если этот предел существует и конечен. В этом случае принято говорить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *существует или сходится,* иначе *не существует или расходится*.

Аналогично, если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв только на левом конце $x = a$ отрезка $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int\limits_{a_1}^{b} f(x)dx . \tag{7.9′}$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв во внутренней точке $c \in (a,b)$, то, по определению, полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx. \tag{7.9″}$$

при условии существования обоих интегралов справа.

Аналогично случаю несобственных интегралов 1-го рода имеет место обобщение формулы Ньютона - Лейбница. Например, если $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ и не ограничена вблизи $b$, то несобственный интеграл 2-го рода может быть записан так: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{b_1 \to b-0} \int\limits_a^{b_1} f(x)dx = \lim\limits_{b_1 \to b-0} F(x)\Big|_a^{b_1} = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$

где доопределим функцию $F(x)$ в точке $b$ по непрерывности слева, положив

$$F(b) = F(b-0) = \lim_{b_1 \to b-0} F(b_1).$$

***Пример 7.15.*** Исследовать на сходимость несобственный интеграл 2-го рода $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\rho}$, где $\rho > 0$ – произвольное число.

*Решение.* а) Если $\rho \neq 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\rho} = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{1-\rho} - \lim_{a \to 0+0} \frac{a^{1-\rho}}{1-\rho} = \begin{cases} \infty, & \rho > 1 \\ \dfrac{1}{1-\rho}, & 0 < \rho < 1 \end{cases}.$$

б) Если $\rho = 1$, то $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = \ln 1 - \lim\limits_{a \to 0+0} \ln a = +\infty$.

Таким образом, данный несобственный интеграл сходится при $0 < \rho < 1$ и расходится при $\rho \geq 1$.

## 10. Геометрические приложения определённого интеграла

Рассмотрим приложения интегралов к вычислению: 1) площадей плоских фигур; 2) длин дуг кривых; 3) объёмов тел по площадям их параллельных сечений и, в частности, объёмов тел вращения; 4) площадей поверхностей тел вращения.

### 10.1. *Вычисление площади плоской фигуры.*

10.1.1. Вычисление площади в прямоугольных координатах.

Согласно геометрическому смыслу определённого интеграла, площадь *криволинейной трапеции*, ограниченной линией $y = f(x)$ и прямыми $y = 0,\ x = a,\ x = b$ (см. рисунок 1 на с. 23), находится по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx, \text{ где } f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]. \quad (7.10)$$

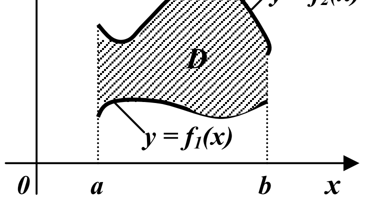


Рисунок 2

Площадь фигуры $\boldsymbol{D}$, ограниченной снизу и сверху соответственно графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, ($f_1(x) \le f_2(x)$) и двумя прямыми $x = a,\ x = b$ (рисунок 2), определяется по формуле

$$S(D) = \int_a^b \left[ f_2(x) - f_1(x) \right] dx . \qquad (7.11)$$

***<u>Пример 7.16.</u>*** Найти площадь фигуры $\boldsymbol{D}$, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = 2 - x^2$ (рисунок 3).

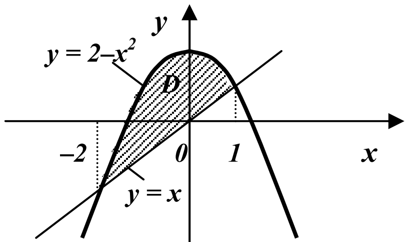


Рисунок 3

*Решение.* Пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Найдём их. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1 .$$

Искомая площадь определяется с помощью формулы (7.11):

$$S(D) = \int_{-2}^{1} \left[ \left( 2 - x^2 \right) - x \right] dx = \left[ 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_{-2}^{1} = 4{,}5 .$$

10.1.2. <u>Вычисление площади криволинейной трапеции в случае, когда кривая задана параметрически</u>.

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2],$$

прямыми $x = a,\ x = b$ и осью $Ox$, причём $x(t_1) = a,\quad x(t_2) = b,\quad a < b$. В этом случае её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt . \qquad (7.12)$$

Обратим внимание, что здесь не обязательно $t_1 < t_2$!

***<u>Пример 7.17.</u>*** Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом (рисунок 4).
*Решение.* Параметрические уравнения эллипса имеют вид

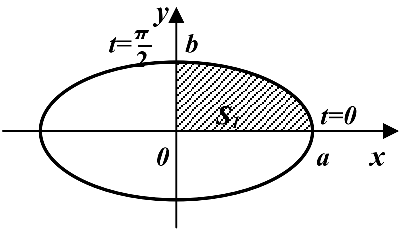


Рисунок 4

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

В силу симметрии эллипса достаточно найти площадь $S_1$ одной его четверти, а затем умножить результат на $4$. Если $x$ изменяется в пределах от $0$ до $a$, то параметр $t$ изменяется в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до $0$:

$$a\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \quad a\cos t = a \Rightarrow t = 0.$$

По формуле (7.12) получим:

$$S = 4S_1 = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Отметим, что в частном случае $a = b = R$ получается известная формула площади круга радиуса $R$: $S = \pi R^2$.

10.1.3. Вычисление площади в полярных координатах.

Площадь *криволинейного сектора,* т. е. плоской фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, где $r$ и $\varphi$ – полярные координаты, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (7.13)$$

***Пример 7.18.*** Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью $OP$ и первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$, где $a > 0$ – число (рисунок 5).

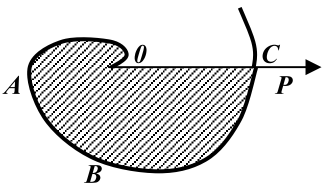


Рисунок 5

*Решение.* При изменении полярного угла $\varphi$ от $0$ до $2\pi$ полярный радиус $r$ опишет кривую, ограничивающую данную фигуру (криволинейный сектор $OABC$). Поэтому по формуле (7.13) имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

*Замечание.* Площадь фигуры более сложного вида обычно вычисляется с помощью определённого интеграла после предварительного разбиения фигуры на более простые части.

## 10.2. *Вычисление длины дуги кривой.*

В зависимости от того, как задана кривая, приведём соответствующие расчётные формулы для вычисления длины дуги кривой.

10.2.1. Вычисление длины в прямоугольных координатах.

Пусть на плоскости $Oxy$ кривая задана графиком функции $y=f(x),\quad x\in[a,b]$, где функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Тогда длина $L$ такой кривой вычисляется по формуле

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx\,. \tag{7.14}$$

**Пример 7.19.** Найти длину кривой $y=x^{\frac{3}{2}}$, если $x\in[0;\,5]$.

*Решение*. Находим производную $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. По формуле (7.14) имеем

$$L=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^5\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^5=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{45}{4}\right)^{3/2}-1\right]=\frac{335}{27}.$$

10.2.2. Вычисление длины, если кривая задана параметрически.

Пусть уравнение кривой задано в параметрической форме

$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in[t_1,t_2]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными. В этом случае длина $L$ такой кривой вычисляется по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt\,. \tag{7.15}$$

Обращаем внимание, что здесь обязательно должно выполняться условие $t_1<t_2$!

Аналогично выражается длина пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t \in [t_1, t_2]$:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 + \left[z'(t)\right]^2}\, dt\ . \qquad (7.15')$$

***Пример 7.20.*** Найти длину одной арки циклоиды

$x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$, где $a > 0$ – число (рисунок 6).

*Решение*. Так как $y = 0$ при $\cos t = 1$, то $t_1 = 0,\ \ t_2 = 2\pi$. Имеем

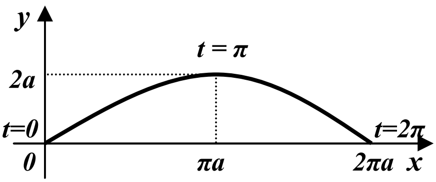


Рисунок 6

$$x'(t) = a(1 - \cos$$

,

поэтому

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - co}$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

10.2.3. Вычисление длины, если кривая задана в полярных координатах.

Пусть дуга кривой задана уравнением $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ в полярных координатах. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда длина $L$ дуги кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + \left[r'(\varphi)\right]^2}\, d\varphi. \qquad (7.16)$$

***Пример 7.21.*** Найти длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$ (см. рисунок 5).

*Решение*. Так как $r'(\varphi) = a$, то

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\varphi)^2 + a^2}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{\varphi^2 + 1}, & du = \dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}\, d\varphi, \\ dv = d\varphi, & v = \varphi \end{matrix} \right| =$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi\right]=a\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}-\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right]=$$

$$=a\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|\Big|_0^{2\pi}\right]-a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi.$$

Решая полученное уравнение относительно искомого интеграла $a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi$, получим $L=\frac{1}{2}a\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})\right]$.

## 10.3. *Вычисление объёма тела.*

10.3.1. Вычисление объёма тела по площадям его параллельных сечений.

Рассмотрим некоторое тело, для которого известны площади $S$ сечений плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси $Ox$: $S=S(x),\ a\le x\le b$. В этом случае объём $V$ рассматриваемого тела можно вычислять по формуле

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad (7.17)$$

(*формула объёма тела по площади параллельных сечений*).

***Пример 7.22.*** Найти объём эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

*Решение.* Сечение эллипсоида плоскостью $x=x_0,\quad x_0\in[-a,a]$ будет ограничено эллипсом $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2}$ или $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}=1$ с полуосями $b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}$. Площадь этого сечения равна произведению полуосей, умноженному на число $\pi$ (см. пример 7.17):

$$S(x)=\pi\cdot b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}=\frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$$

Искомый объём, согласно формуле (7.17):

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Заметим, что в частном случае $a = b = c = R$, тело будет шаром радиуса $R$ и его объём будет $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, что совпадает с известным результатом.

10.3.2. Вычисление объёма тела вращения.

Пусть фигура, ограниченная линиями $y=f(x),\ y=0,\ x=a,\ x=b$, вращается вокруг оси $Ox$. Сечение полученного тела вращения плоскостью, перпендикулярной оси $Ox$, проведённой через произвольную точку $x\in[a,b]$ этой оси, есть круг радиуса $f(x)$. Следовательно, $S(x)=\pi f^2(x)$. Тогда объём $V_x$ полученного тела вращения вокруг оси $Ox$, согласно формуле (7.17), будет равен

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx \tag{7.18}$$

(*формула объёма тела вращения вокруг оси* $Ox$).

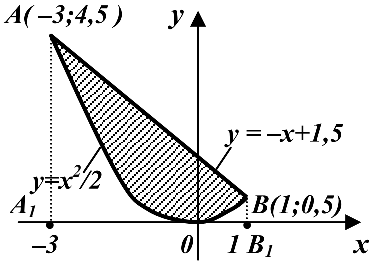

Рисунок 7

*Замечание*. Если фигура, ограниченная линиями $x=\varphi(y),\ y=c,\ y=d,\ x=0$, вращается вокруг оси $Oy$, то объём полученного тела вращения находится по аналогичной формуле

$$V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy \tag{7.19}$$

(*формула объёма тела вращения вокруг оси* $Oy$).

***Пример 7.23.*** Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0$, вокруг оси $Ox$.

*Решение.* Построив параболу $2y = x^2$ и прямую $2x + 2y - 3 = 0$, получим фигуру (рисунок 7).

Координаты точек пересечения $A$ и $B$ этих линий определяются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = x^2 \\ 2x + x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3, \;\; y_1 = 4,5 \\ x_2 = 1, \;\;\; y_2 = 0,5 \end{cases}.$$

Объём тела вращения, полученного при вращении этой фигуры вокруг оси $Ox$, можно найти как разность объёмов тел, образованных вращением вокруг оси $Ox$ трапеций $A_1ABB_1$ и $A_1AOBB_1$. Согласно формуле (7.18), получим:

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \left( -x + \frac{3}{2} \right)^2 dx - \pi \int_{-3}^{1} \left( \frac{x^2}{2} \right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{1} \left( x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) dx - \frac{\pi}{4} \int_{-3}^{1} x^4 dx =$$

$$= \pi \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{9x}{4} - \frac{x^5}{20} \right) \Bigg|_{-3}^{1} = 18\frac{2}{15}\pi.$$

**10.4.** ***Вычисление площади поверхности тела вращения.***

Пусть дуга кривой $y = f(x) \geq 0, \;\; a \leq x \leq b$ вращается вокруг оси $Ox$. Тогда площадь $S$ получаемой при этом поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x) \sqrt{1 + \left[ f'(x) \right]^2} \, dx. \tag{7.20}$$

***<u>Пример 7.24.</u>*** Найти площадь поверхности шара радиуса $R$.

*Решение.* Рассмотрим окружность радиуса $R$ с центром в начале координат. Вращая вокруг оси $Ox$ полуокружность $y = \sqrt{R^2 - x^2}, \;\; x \in [-R, R]$, получим поверхность шара. Её площадь равна

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left[ \left( \sqrt{R^2 - x^2} \right)' \right]^2} dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx =$$

$$= 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 2\pi R x \Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

## 11. <u>Механические приложения определённого интеграла</u>

**11.1.** ***Вычисление пройденного пути.***

Пусть материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$. Путь $s$, пройденный точкой от момента времени $t_1$ до момента времени $t_2$ находится по формуле

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \tag{7.21}$$

***Пример 7.25.*** Две точки движутся по одной и той же прямой: первая со скоростью $v_1(t) = 3t^2 - 4t$, а вторая со скоростью $v_2(t) = 4(t + 3)$. Если в начальный момент времени $t = 0$ они были вместе, то в какой момент времени $T$ и на каком расстоянии $s$ от начала движения они опять будут вместе?

*Решение.* Найдем расстояния, пройденные этими точками, от момента времени $t = 0$ до момента $t = T$ и приравняем их.

$$s_1=\int_0^T v_1(t)dt=\int_0^T (3t^2-4t)dt=(t^3-2t^2)\Big|_0^T=T^3-2T^2,$$

$$s_2=\int_0^T v_2(t)dt=\int_0^T 4(t+3)dt=(2t^2+12t)\Big|_0^T=2T^2+12T,$$

$s_1 = s_2 \Rightarrow T^3 - 2T^2 = 2T^2 + 12T \Rightarrow T(T^2 - 4T - 12) = 0 \Rightarrow T_1 = 0,\ \ T_2 = 6$.
($T_3 = -2$ не учитываем). Итак, при $T = 6$ точки снова будут вместе, при этом расстояние $s = s_1(6) = s_2(6) = 144$.

### 11.2. *Вычисление работы переменной силы.*

Пусть материальная точка перемещается под действием силы $F$, направленной вдоль оси $Ox$ и имеющей переменную величину, зависящую от $x$. Работа $A$, совершаемая силой $F$ по перемещению точки вдоль оси $Ox$ из точки $x = a$ в точку $x = b$ $(a < b)$, находится по формуле

$$A=\int_a^b F(x)dx. \tag{7.22}$$

***Пример 7.26.*** Вначале два точечных электрических заряда $e_1$ и $e_2$ закреплены неподвижно на расстоянии $h$ друг от друга. Затем заряд $e_2$ освобождается и под действием силы отталкивания начинает удаляться от заряда $e_1$. Какую работу совершит сила отталкивания, когда заряд удалится: а) на расстояние $h_1 > h$; б) в бесконечность?

*Решение.* По закону Кулона сила взаимодействия зарядов в пустоте равна $F(x)=\dfrac{e_1e_2}{x^2}$, где $x$ – расстояние между зарядами.

На основании формулы (7.22) искомая работа в случае а) равна

$$A = \int_{h}^{h_1} \frac{e_1 e_2}{x^2} dx = -\frac{e_1 e_2}{x}\Bigg|_{h}^{h_1} = e_1 e_2 \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{h_1} \right).$$

В случае б)

$$A = \int_{h}^{+\infty} \frac{e_1 e_2}{x^2} dx = \lim_{h_1 \to +\infty} e_1 e_2 \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{h_1} \right) = \frac{e_1 e_2}{h}.$$

## Варианты заданий контрольной работы № 7

**7.1.** Найти неопределённые интегралы. В первых двух проверить результаты дифференцированием.

**1.** 1) $\int \frac{\cos x \, dx}{3 - 2\sin x}$; 2) $\int x e^{2x} dx$;

3) $\int \frac{5x^2 + 2x - 3}{x^3 + x} dx$; 4) $\int \sin^5 2x \, dx$.

**2.** 1) $\int x \cdot \sqrt[5]{3x^2 - 2} \, dx$; 2) $\int (1 + x) \ln x \, dx$;

3) $\int \frac{2x - 1}{x(x - 1)^2} dx$; 4) $\int \frac{(\sin^2 x + 1) dx}{\cos^2 x}$.

**3.** 1) $\int \frac{5^{arctgx} + 2}{1 + x^2} dx$; 2) $\int x \, arctgx \, dx$;

3) $\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx$; 4) $\int \cos^4 2x \, dx$.

**4.** 1) $\int \frac{tg \, x \, dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int \arccos 2x \, dx$;

3) $\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx$; 4) $\int \sin 3x \cos x \, dx$.

**5.** 1) $\int \frac{x^2}{x^6 + 5} dx$; 2) $\int e^{-3x} (2 - 9x) dx$;

3) $\int \frac{x-4}{(x-3)(x^2+2)}dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

**6.** 1) $\int \frac{e^{arctgx}+x}{1+x^2}dx$; 2) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$;

3) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx$; 4) $\int ctg^3 x\, dx$.

**7.** 1) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos x+1}}$; 2) $\int x^2 \ln\sqrt{1-x}\, dx$;

3) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$; 4) $\int \sin^4 3x\, dx$.

**8.** 1) $\int \frac{(2\ln x+3)^2}{x}dx$; 2) $\int arctg\, 5x\, dx$;

3) $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)^2}dx$; 4) $\int \cos^3 x\, dx$.

**9.** 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}$; 2) $\int (x-5)\cos 4x\, dx$;

3) $\int \frac{4x^4-3x-3}{x^3-2x^2+x}dx$; 4) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

**10.** 1) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$; 2) $\int \arcsin 4x\, dx$;

3) $\int \frac{x-4}{x(x^2+2)}dx$; 4) $\int \sin^3 x \cos^6 x\, dx$.

**11.** 1) $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 2) $\int \arcsin 2x\, dx$;

3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}dx$; 4) $\int \frac{\sin^2 x+1}{\cos^2 x}dx$.

**12.** 1) $\int e^{1/x}\cdot\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$;

3) $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$; 4) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

**13.** 1) $\int\sin(\ln x)\frac{dx}{x}$; 2) $\int\frac{arctg x}{x^2}dx$;

3) $\int\frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$; 4) $\int(1+2\sin x)^2dx$.

**14.** 1) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$; 2) $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;

3) $\int\frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx$; 4) $\int\sin x\cos 5x\,dx$.

**15.** 1) $\int x^2\cdot\sqrt{1+x^3}\,dx$; 2) $\int(x-x^2)\ln x\,dx$;

3) $\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$; 4) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$.

**16.** 1) $\int\frac{arctg^5 x}{1+x^2}dx$; 2) $\int\ln^2 x\,dx$;

3) $\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)}dx$; 4) $\int tg^3 2x\,dx$.

**17.** 1) $\int\frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; 2) $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$;

3) $\int\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+4)}dx$; 4) $\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx$.

**18.** 1) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$; 2) $\int x\sin 5x\,dx$;

3) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$; 4) $\int \cos^5 5x\,dx$.

**19.** 1) $\int \frac{\ln^2 x+1}{x}dx$; 2) $\int x^2 e^x dx$;

3) $\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$; 4) $\int \sin^2 \frac{5x}{2}dx$.

**20.** 1) $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$; 2) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

3) $\int \frac{4x^4+2x^2-3}{x(x^2-1)}dx$; 4) $\int (1+2\cos 2x)^2 dx$.

**21.** 1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+3}}dx$; 2) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$;

3) $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

**22.** 1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int (x+1)e^{-x}dx$;

3) $\int \frac{3x+2}{x(x^2+1)}dx$; 4) $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

**23.** 1) $\int \frac{5^{tgx}+3}{\cos^2 x}dx$; 2) $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx$;

3) $\int \frac{x^3+5}{x^2+3x}dx$; 4) $\int \sin x\cos 2x\,dx$.

**24.** 1) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$; 2) $\int \arccos 4x\,dx$;

3) $\int \frac{x^3-1}{x^3+x}dx$; 4) $\int \sin^3 3x\,dx$.

**25**. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(x+1\right)}$;  2) $\int e^{-2x}\left(1-x\right)dx$;

3) $\int \frac{x+4}{(x+3)(x^2+1)}dx$;  4) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

**26**. 1) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$;  2) $\int \left(2x-1\right)e^{2x}dx$;

3) $\int \frac{x+2}{(x+1)(x^2-1)}dx$;  4) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$.

**27**. 1) $\int \frac{\sqrt{3+ctgx}\, dx}{\sin^2 x}$;  2) $\int \ln\sqrt{1-x}\, dx$;

3) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}dx$;  4) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$.

**28**. 1) $\int \frac{dx}{x(2\ln x-1)}$;  2) $\int xe^{4x}\, dx$;

3) $\int \frac{2x^2+1}{x^2-x+1}dx$;  4) $\int \frac{dx}{\sin 2x}$.

**29**. 1) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$;  2) $\int (x+5)\cos 2x\, dx$;

3) $\int \frac{2+x}{x^2+x+1}dx$;  4) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$.

**30**. 1) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$;  2) $\int x^2 e^{-x}\, dx$;

3) $\int \frac{x+4}{x(x^2+1)}dx$;  4) $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$.

**7.2** Вычислить определённый интеграл (указана рекомендуемая подстановка).

1. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $z=\frac{1}{x}$.

2. $\int\limits_{\ln 3}^{2} \frac{1-e^x}{e^x+1}dx$, $e^x=t$.

3. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$, $x=\frac{1}{\cos t}$.

4. $\int\limits_{0}^{2} \frac{\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$, $t=tg\frac{x}{2}$.

5. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$, $z=x^2+1$.

6. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} ctg^4 x\,dx$, $t=ctgx$.

7. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$, $e^x=t$.

8. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $x=tg\,t$.

9. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$, $\sin x=t$.

10. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$, $t=tg\frac{x}{2}$.

11. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}dx$, $\sqrt{e^x-2}=t$.

12. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$, $t=tg\frac{x}{2}$.

13. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, $z=\frac{1}{x}$.

14. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$, $x=\frac{2}{\sin t}$.

15. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^{2x}-5}{e^x+2}dx$, $e^x=t$,

16. $\int\limits_{\ln 0,5}^{0} \sqrt{1-e^{2x}}dx$, $\sqrt{1-e^{2x}}=t$.

17. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$, $x=2\sin t$.

18. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$, $z=\frac{1}{x}$.

19. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$, $t=tgx$.

20. $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}dx}{x^4}$, $x=\frac{3}{\cos t}$.

21. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $t=tg\frac{x}{2}$.

22. $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$, $x=5tg\,t$.

23. $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$, $z = \frac{1}{x}$.

24. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$, $e^x = t$.

25. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$, $x = 4\cos t$.

26. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$, $x+1 = 2\sin t$.

27. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$, $\sqrt{e^x - 1} = t$.

28. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, $z = \frac{1}{x}$.

29. $\int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$, $x = \sin t$.

30. $\int\limits_{0}^{5} \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$, $\sqrt{1+3x} = t$.

**7.3.** Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

1. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

2. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x)^3}$.

3. $\int\limits_{5}^{13} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-25}}$.

4. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

6. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(10+x)^3}$.

7. $\int\limits_{0}^{\pi} ctg\frac{x}{2}dx$.

8. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

9. $\int\limits_{2}^{8} \frac{dx}{(x-3)^2}$.

10. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$.

11. $\int\limits_{0}^{e^{-1}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

12. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$.

13. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-3)(x-2)}$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{x^8+4}$.

15. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(6+x)^2}$.

16. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3}$.

17. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx$.

18. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1)}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

19. $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{xdx}{(x-3)^3}$.

20. $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

21. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$.

22. $\int\limits_{-\infty}^{4} \frac{dx}{(5-x)^2}$.  23. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$.  24. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2-x}$.

25. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$.  26. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$.  27. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{(x-4)^2}$.

28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$.  29. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.  30. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3-7)^7}}$.

**7.4.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1. $x = 4-(y-1)^2,\ \ x = y^2-4y+3.$  2. $y = (x-1)^2,\ y^2 = x-1.$

3. $y = (x-2)^3,\ y = 4x-8.$  4. $y = x\sqrt{9-x^2},\ \ y = 0\ \ (0 \le x \le 3).$

5. $y = \sqrt{4-x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1.$  6. $y = \sqrt{e^x-1},\ \ y = 0,\ x = \ln 2.$

7. $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e^3.$ 8. $y = (x+1)^2,\ y^2 = x+1.$

9. $y = 2x-x^2+3,\ \ y = x^2-4x+3.$  10. $y = x\ \mathrm{arctg}x,\ y = 0,\ \ x = \sqrt{3}.$

11. $x = \sqrt{e^y-1},\ x = 0,\ y = \ln 2.$  12. $x = (y-2)^3,\ \ x = 4y-8.$

13. $x = 4-y^2,\ \ x = y^2-2y.$  14. $y = 4x-x^2,\ \ y = x.$

15. $y = 2^x,\ \ y = 2^{-2x},\ \ y = 4.$  16. $3x+2y-6 = 0,\ \ 3x^2-2y = 0,\ y = 0.$

17. $y = \frac{3}{x},\ y = 4e^x,\ \ y = 3,\ \ y = 4.$  18. $y = \ln x,\ y = \ln^2 x.$

19. $y = 5-x^2,\ x = -4y.$  20. $y = \frac{3}{2}\sqrt{x},\ y = \frac{3}{2x},\ \ x = 9.$

21. $y = x^2-4,\ x-y+8 = 0.$  22. $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{5},\ \ x = 0,\ \ y = 0.$

23. $y = x^2+4x,\ \ y = x+4.$  24. $xy = 1,\ \ x+y = 4.$

25. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x},\ y = \frac{1}{2x},\ \ x = 16.$  26. $y = x^2,\ xy = 8,\ \ x = 6.$

27. $y = 2^x,\ \ y = 2x-x^2,\ x = 0,\ \ x = 2.$  28. $y = x^2-6x+10,\ y = -x,\ x = 1,\ \ x = 5.$

29. $4y = x^2,\ \ y = \frac{8}{x^2+4}.$  30. $y^2+8x = 16,\ \ y^2-24x = 48.$

**7.5.** Решить задачи, используя определённый интеграл.

**1.** Найти длину кривой $x=\frac{t^6}{6},\ y=2-\frac{t^4}{4}$ между точками её пересечения с осями координат.

**2.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2,\ y=0$.

**3.** Скорость точки (в см/сек) меняется по закону $v=v_0+3t^2$. Какой путь пройдёт точка за первые $8$ секунд, если начальная скорость $v_0=4$ см/сек?

**4.** Вычислить длину кривой $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$ от точки $x=0$ до точки $x=0{,}75$.

**5.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x-1},\ y=0,\ y=1,\ x=0{,}5$.

**6.** Какую работу совершает переменная сила $F(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, перемещая точку по оси $Ox$ из положения $x=0$ в положение $x=\frac{\pi}{4}$ ?

**7.** Найти длину линии $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$, если параметр изменяется от $t=0$ до $t=\ln\pi$.

**8.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, заключённой между параболами $y=x^2,\quad y=\sqrt{x}$ .

**9.** Точка оси $Ox$ совершает гармонические колебания около начала координат со скоростью $v=10\cos 2t$ , где $t$ – время. Найти закон колебания точки, т. е. зависимость координаты точки $x$ от времени $t$. Определить расстояние от точки до начала координат при $t=\frac{\pi}{3}$ .

**10.** Найти длину кривой $y=1-\ln\cos x$, если $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ .

**11.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y=3\sin x,\ y=\sin x,\quad (0\le x\le\pi)$.

**12.** Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на $a$ см, если сила в $1$ Н растягивает её на $1$ см? По закону Гука сила пропорциональна растяжению пружины.

**13.** Вычислить длину кривой $y=x^2-1$ , отсечённой осью $Ox$.

**14.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$ и находящейся справа от оси $Oy$.

**15.** Скорость точки (в м/сек) меняется по закону $v = v_0 - 3t^2$. Какой путь пройдёт точка до остановки? Начальная скорость $v_0 = 48$ м/сек.

**16.** Найти длину линии $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$, если параметр изменяется от $t = 0$ до $t = \pi$.

**17.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями: $y = 2^x$, $4y - 3x - 5 = 0$.

**18.** Определить работу, необходимую для подъёма тела массой $m$ с поверхности Земли вертикально вверх на высоту $H$. Указание: сила притяжения тела Землёй равна $F(x) = \dfrac{mgR^2}{x^2}$, где $g$ – ускорение свободного падения; $R$ – радиус Земли; $x$ – расстояние от тела до центра Земли.

**19.** Вычислить длину кривой $2y = e^x + e^{-x}$ от точки $x = 0$ до точки $x = \ln 3$.

**20.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y + x^2 - 4 = 0$, $y + x^2 - 9 = 0$, $y = 0$.

**21.** Скорость точки (в см/сек) меняется по закону $v = v_0 + t^2$. Какой путь пройдёт точка за первые $2$ секунды? За следующие $4$ секунды? Начальная скорость $v_0 = 3$ см/сек.

**22.** Найти длину кривой $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y$ от точки с ординатой $y = 1$ до точки с ординатой $y = e$.

**23.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt[3]{y-2}$, $y = 1$, $x = 1$.

**24.** Какую работу совершает переменная сила $F(x) = 10^{-x}$, перемещая точку по оси $Ox$ из положения $x = 0$ в положение $x = 1$ ?

**25.** Вычислить длину кривой $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$ от точки $x = 3$ до точки $x = 4$.

**26.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

**27.** Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $5$ м/с, без учёта сопротивления воздуха равна $v = 5 - gt$, где $t$ – протекшее время, $g = 10$

м/с$^2$ – ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту и за какое время поднимается тело?

**28.** Найти длину кривой $\boldsymbol{y = \ln \sin x}$, если $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

**29.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $\boldsymbol{Ox}$ фигуры, ограниченной линиями $\boldsymbol{y = (x-1)^3}$, $\boldsymbol{y = 0}$, $\boldsymbol{x = 0}$.

**30.** Какую работу совершает переменная сила $F(x) = \cos^2 x$, перемещая точку по оси $\boldsymbol{Ox}$ из положения $x = 0$ в положение $x = \frac{\pi}{2}$?

# Раздел 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Литература: [2, модуль 17-20]; [3, глава 10]; [4, часть 7] ]; [6, глава 9].

## 1. Основные понятия

*Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее независимую переменную $\boldsymbol{x}$, неизвестную функцию $\boldsymbol{y = y(x)}$ и её производные $\boldsymbol{y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)}$ (наличие хотя бы одной производной обязательно):

$$\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}(x)\right) = 0}. \qquad (8.1)$$

Здесь $\boldsymbol{F}$ – заданная функция своих аргументов.

*Порядком дифференциального уравнения* называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение. Например, $\boldsymbol{\sqrt{x^2 + 2y} - y' = 5}$ – дифференциальное уравнение первого порядка, а $\boldsymbol{\dfrac{y'''}{x - y} + y'e^x = 0}$ – третьего порядка.

*Решением уравнения* (8.1) на некотором интервале $\boldsymbol{(a, b)}$ называется такая функция $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$, которая обращает данное уравнение в тождество на $\boldsymbol{(a, b)}$.

Например, функция $\boldsymbol{y = \sin x}$ является решением уравнения второго порядка $\boldsymbol{y'' + y = 0}$ на интервале $\boldsymbol{(-\infty, +\infty)}$. В самом деле, $\boldsymbol{y' = \cos x}$, $\boldsymbol{y'' = -\sin x}$ и, подставив в данное уравнение $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y''}$, получим $\boldsymbol{-\sin x + \sin x \equiv 0 \quad \forall x \in R}$. Заметим, что функция $\boldsymbol{y = C_1 \sin x + C_2 \cos x}$ также является решением этого уравнения при любых постоянных $\boldsymbol{C_1}$ и $\boldsymbol{C_2}$.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной линией* этого уравнения. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

К составлению и интегрированию дифференциального уравнения приводят многочисленные задачи как самой математики, так и других наук. Рассмотрим пример.

***Пример 8.1.*** Найти закон прямолинейного движения материальной точки, движущейся с постоянным ускорением $\boldsymbol{a}$.

*Решение.* Требуется найти формулу $\boldsymbol{S = S(t)}$, выражающую пройденный путь

$\boldsymbol{S}$ как функцию времени $\boldsymbol{t}$. Используя механический смысл второй производной, имеем $S''(t)=a$ – дифференциальное уравнение второго порядка. Так как $S''(t)=\left(S'(t)\right)'$, то скорость движения определяется формулой

$$S'(t)=\int S''(t)dt=\int adt=at+C_1.$$

Закон движения определяется аналогично:

$$S(t)=\int S'(t)dt=\int (at+C_1)dt=\frac{at^2}{2}+C_1t+C_2.$$

Произвольные постоянные $C_1$, $C_2$ можно определить, если в некоторый момент времени $t=t_0$ задать величину пройденного пути $S_0$ и скорость $V_0$, т. е.

$$S(t_0)=S_0, \quad S'(t_0)=V_0.$$

Действительно, при $t=t_0$ имеем

$$\begin{cases} at_0+C_1=V_0 \\ at_0^2/2+C_1t_0+C_2=S_0 \end{cases}.$$

Из первого уравнения находим $C_1=V_0-at_0$ и, подставляя во второе, находим

$$C_2=S_0-V_0t_0+at_0^2/2.$$

Подставляя найденные значения $C_1$ и $C_2$ в выражение для $S(t)$, приходим к известному закону движения материальной точки с постоянным ускорением:

$$S(t)=S_0+V_0(t-t_0)+a(t-t_0)^2/2.$$

## 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

### 2.1. *Основные понятия. Задача Коши.*

Общий вид *дифференциального уравнения первого порядка*

$$F(x,y,y')=0. \tag{8.2}$$

Если уравнение (8.2) удаётся разрешить относительно производной, то получаем *дифференциальное уравнение первого порядка*

$$y'=f(x,y), \tag{8.3}$$

*разрешённое относительно производной.* Здесь $f(x, y)$ – заданная функция своих аргументов. В основном будем рассматривать именно такие уравнения.

Уравнение (8.3) можно записать в форме, содержащей дифференциалы:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{8.4}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – заданные функции.

От формы (8.3) можно перейти к форме (8.4) и наоборот. В самом деле, если записать $y'$ в виде $\dfrac{dy}{dx}$, то получим $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ или $f(x,y)dx - dy = 0$, что представляет собой форму (8.4), где $M(x,y) = f(x,y),\ N(x,y) = -1$.

Наоборот, если разделить обе части уравнения (8.4) на $dx$ и выразить $\dfrac{dy}{dx}$, то получим форму (8.3): $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, где $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$.

Интегрирование дифференциального уравнения в общем случае приводит к бесконечному множеству решений. Чтобы выделить определённое решение уравнения первого порядка, надо задать *начальное условие*, которое заключается в том, что при заданном значении $x_0$ независимой переменной $x$ искомая функция $y(x)$ принимает заданное значение $y_0$, т. е.

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \text{ или } y(x_0) = y_0. \tag{8.5}$$

Геометрически это означает, что задается точка $(x_0, y_0)$, через которую должна пройти искомая интегральная линия.

Задачу отыскания решения $y(x)$ дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего начальному условию (8.5), называют *задачей Коши*.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях уравнение (8.3) имеет решение, даёт теорема Коши о существовании и единственности решения.

*Пусть в уравнении* $y' = f(x,y)$ *функция* $f(x, y)$ *и её частная производная* $f'_y(x,y)$ *непрерывны в некоторой области* $D$ *плоскости* $Oxy$. *Тогда в некоторой окрестности любой внутренней точки* $(x_0, y_0) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *этого уравнения, удовлетворяющее условию* $\varphi(x_0) = y_0$.

Геометрически теорема утверждает, что через каждую внутреннюю точку области $D$ проходит единственная интегральная линия.

*Общим решением* дифференциального уравнения (8.3) в области $D$, в которой выполнены условия теоремы Коши, называется функция $y = \varphi(x, C)$, если

1) она является решением уравнения (8.3) при любом значении постоянной $C$;

2) для любой внутренней точки $(x_0, y_0) \in D$ можно найти такое единственное значение постоянной $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию: $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

*Частным решением* уравнения (8.3) в области $D$ называется решение, получаемое из общего при каком-либо конкретном значении постоянной $C$ (включая случай $C = \pm\infty$). Таким образом, общее решение уравнения можно определить как множество всех его частных решений.

Если общее решение найдено в неявном виде, т. е. в виде уравнения $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом* уравнения (8.3). Уравнение $\Phi( x, y, C_0 ) = 0$, где $C_0$ – некоторое конкретное значение постоянной $C$, называется *частным интегралом*.

На практике при решении задачи Коши поступают следующим образом:

1) находят общее решение $y = \varphi(x, C)$ уравнения (8.3);

2) в полученное выражение для общего решения подставляют $x = x_0$, $y = y_0$, в результате получается уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ относительно величины $C$;

3) решают полученное уравнение, находят $C = C_0$;

4) найденное значение $C = C_0$ подставляют в выражение для общего решения, получают искомое решение задачи Коши $y = \varphi(x, C_0 )$.

Приведём основные типы дифференциальных уравнений первого порядка, которые могут быть решены аналитическими методами. Имеются в виду случаи, когда удаётся получить общее решение в виде конечных формул, содержащих знаки элементарных функций, арифметические действия и операции интегрирования.

### 2.2. *Уравнение с разделяющимися переменными.*

Уравнение вида

$$f( x )dx = g( y )dy \tag{8.6}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделёнными переменными*. Здесь $f(x)$ и $g(y)$ известные функции своих аргументов.

Предположим, что функция $y = y(x)$ является решением этого уравнения. Тогда при подстановке $y(x)$ в (8.6) получится тождество, после интегрирования которого найдём его общий интеграл

$$\int f( x )dx = \int g( y )dy + C .$$

<u>*Замечание.*</u> В теории дифференциальных уравнений символ неопределённого интеграла обозначает не всё множество первообразных, а какую-то одну первообразную из этого множества.

<u>***Пример 8.2***</u>**.** Найти общий интеграл уравнения

$$xdx + ydy = 0.$$

*Решение.* Данное уравнение легко привести к уравнению с разделёнными переменными: $xdx = -ydy$. Поэтому $\int xdx = -\int ydy + C_1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow$ $x^2 + y^2 = C^2$ – общий интеграл. Здесь $2C_1 > 0$ обозначили для удобства как $C^2$.

Интегральные линии – семейство концентрических окружностей с центром в точке $\boldsymbol{O\ (0;\ 0)}$.

Уравнение вида

$$f_1(x)\cdot g_1(y)dx = f_2(x)\cdot g_2(y)dy, \tag{8.7}$$

в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от $\boldsymbol{x}$ и только от $\boldsymbol{y}$, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными,* так как путём деления на $g_1(y)\cdot f_2(x)\neq 0$ оно приводится к уравнению с разделёнными переменными

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x)\cdot g(y) \tag{8.8}$$

также является уравнением с разделяющимися переменными. Действительно, заменим $y'$ на $\dfrac{dy}{dx}$, разделим обе части этого уравнения на $\boldsymbol{g(y)}$ (предполагая, что $\boldsymbol{g(y)\ \neq\ 0}$) и умножим на $\boldsymbol{dx}$. Тогда уравнение (8.8) примет вид уравнения с разделёнными переменными:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

<u>*Замечание.*</u> Для приведения уравнения с разделяющимися переменными (8.7), (8.8) к уравнению с разделёнными переменными приходится делить обе части этих уравнений соответственно на $g_1(y)\cdot f_2(x)$ или $\boldsymbol{g(y)}$. При этом мы могли (так же как в аналогичных случаях в алгебре) «потерять» некоторые решения исходных уравнений. В самом деле, функции, обращающие в ноль соответственно выражения $g_1(y)\cdot f_2(x)$ или $\boldsymbol{g(y)}$ являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений. В одних случаях они могут содержаться в общем решении (т.е. фактически не быть потерянными в процессе интегрирования), в других – не содержаться в нём. Такие решения называются *особыми*.

<u>***Пример 8.3.***</u> Решить уравнение

$$x(1-y^2)dx + y(1-x^2)dy = 0.$$

*Решение.* Разделим переменные, поделив уравнение на $\boldsymbol{(1-x^2)(1-y^2)}$:

$$\frac{xdx}{1-x^2} + \frac{ydy}{1-y^2} = 0.$$

Интегрируя каждое из слагаемых (для этого не обязательно одно из них переносить в правую часть), приравниваем сумму первообразных постоянной:

$$\int \frac{xdx}{1-x^2} + \int \frac{ydy}{1-y^2} = C_1 \Rightarrow -\frac{1}{2} ln\left|1-x^2\right| - \frac{1}{2} ln\left|1-y^2\right| = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln\left|\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\right| = -2C_1$$

Обозначая $-2C_1 = ln\ \left|C\right|$, получим общий интеграл $(1-x^2)(1-y^2) = C$.

Приведенные действия нельзя было проводить при $(1-x^2)(1-y^2) = 0$ или $x = \pm 1,\ y = \pm 1$. Эти функции являются решениями дифференциального уравнения (предлагаем читателю проверить самостоятельно). Но эти решения содержатся в общем интеграле при $C = 0$, так что не потеряны при преобразованиях.

***Пример 8.4.*** Найти общее решение уравнения $xy' + y = y^2$ и определить интегральную линию, проходящую через точку $M(1;\ 0{,}5)$.

*Решение*. Уравнение запишем в виде $x\dfrac{dy}{dx} = y\left(y-1\right)$, откуда $\dfrac{dy}{y\left(y-1\right)} = \dfrac{dx}{x}$,

или, после интегрирования, $ln\left|y-1\right| - ln\left|y\right| = ln\left|x\right| + ln\,C$. Потенцируя и проведя преобразования, получим общее решение $y = \dfrac{1}{1-Cx}$.

Подставим $x = 1$ и $y = 0{,}5$ в общее решение: $0{,}5 = \dfrac{1}{1-C\cdot 1}$. Отсюда $C = -1$.

Получаем $y = \dfrac{1}{1+x}$ – частное решение, удовлетворяющее условию $y\left(1\right) = 0{,}5$, или, что то же, уравнение интегральной линии, проходящей через точку $M(1;\ 0{,}5)$.

### 2.3. *Однородное уравнение.*

Функция $f(x,\ y)$ называется *однородной функцией* $n$*-й степени*, если при любом допустимом значении $t$ справедливо тождество

$$f\left(t\cdot x, t\cdot y\right) = t^n f\left(x, y\right).$$

Например, $f\left(x,y\right) = 2x^2 - xy$ – однородная функция 2-й степени, так как

$$f\left(t\cdot x, t\cdot y\right) = 2\left(t\cdot x\right)^2 - \left(t\cdot x\right)\left(t\cdot y\right) = t^2\left(2x^2 - xy\right) = t^2 f\left(x,y\right).$$

Дифференциальное уравнение $y' = f\left(x,y\right)$ называется *однородным,* если функция $f(x,\ y)$ есть однородная функция нулевой степени, т. е. если

$$f\left(t\cdot x, t\cdot y\right) = t^0 f\left(x,y\right) = f\left(x,y\right).$$

Однородным будет также всякое уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции *одинаковой степени*. В этом легко убедиться, разрешая уравнение относительно $y'$.

Если взять $t = \frac{1}{x}$, то однородное уравнение можно записать в виде

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{8.9}$$

и преобразовать в уравнение с разделяющимися переменными с помощью замены переменной (подстановки):

$$\frac{y}{x} = z \text{ или, что то же, } y = z \cdot x. \tag{8.10}$$

Здесь $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Действительно, подставляя $y = z \cdot x$ и $y' = z'x + z$ в (8.9), получаем $z'x + z = g(z)$ или $\frac{dz}{dx} = \frac{g(z) - z}{x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Найдя его общее решение (или общий интеграл), следует заменить в нём $z$ на величину $\frac{y}{x}$.

***Пример 8.5.*** Найти общее решение уравнения $y' = \frac{y}{x}\left(ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

*Решение.* Данное уравнение однородное. Функция правой части определена в области $\left\{(x, y):\ \frac{y}{x} > 0\right\}$. Полагаем $\frac{y}{x} = z$ или $y = z \cdot x$. Тогда $y' = z'x + z$, поэтому, $z'x + z = z(ln z + 1) \Rightarrow z'x = z\,ln z$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его в области $z > 0$, получаем

$$\frac{dz}{z\,ln z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow ln|ln z| = ln|x| + ln|C| \Rightarrow ln z = Cx \Rightarrow z = e^{Cx} \Rightarrow y = xe^{Cx}.$$

Итак, $y = xe^{Cx}$ – общее решение данного уравнения.

## 2.4. *Линейное уравнение и уравнение Бернулли.*

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно является уравнением первой степени относительно искомой функции и её производной:

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{8.11}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – заданные функции. Примеры линейных уравнений:

$$y' + xy = tgx\,, \quad y' - \frac{y}{x} + \sqrt{x} = 0\,, \quad xy' = x^2 - y \text{ и т. д.}$$

Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение (8.11) будет иметь вид

$$y' + a(x)\,y = 0\,, \tag{8.12}$$

его называют *линейным однородным* в отличие от исходного уравнения (8.11), называемого *линейным неоднородным.*

Легко увидеть, что в линейном однородном уравнении (8.12) переменные могут быть разделены: $\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$ откуда $ln|y| = -\int a(x)dx + ln|C|$ или

$$y = Ce^{-\int a(x)dx}.$$

Это *общее решение линейного однородного уравнения.*

Для интегрирования линейного неоднородного уравнения (8.11) может быть применён так называемый <u>*метод вариации постоянной*</u> *(метод Лагранжа).*

Он состоит в следующем. Сначала ищем общее решение линейного однородного уравнения (8.12), соответствующего данному линейному неоднородному уравнению (8.11):

$$Y = Ce^{-\int a(x)dx}\,,$$

где $C$ – произвольная постоянная. Затем будем искать общее решение исходного уравнения (8.11) в виде

$$y = z(x)e^{-\int a(x)dx}\,,$$

заменяя в найденном общем решении соответствующего линейного однородного уравнения постоянную $C$ некоторой, подлежащей определению, функцией $z(x)$.

Таким образом, постоянная величина заменяется переменной, т. е. варьируется (изменяется), это и объясняет название метода. Функция $z(x)$ должна быть такова, чтобы при подстановке $y = z(x)e^{-\int a(x)dx},\ y' = z'(x)e^{-\int a(x)dx} - z(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}$ в уравнение (8.11), оно обращалось в тождество.

Итак, для определения функции $z(x)$ получаем уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dz}{dx} = b(x)e^{\int a(x)dx}$, откуда $z(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C_1$.

Следовательно,

$$y = z(x)e^{-\int a(x)dx} = Ce^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx \tag{8.13}$$

и есть *общее решение линейного неоднородного уравнения* (8.11). Здесь произвольную постоянную интегрирования снова обозначили как $C$.

Замечания.

1) Из формулы (8.13) видно, что *общее решение линейного неоднородного уравнения* (8.11) *равно сумме общего решения* $\boldsymbol{Y}$ *соответствующего однородного уравнения и частного решения* $\overline{\boldsymbol{y}}$ *неоднородного уравнения, получающегося из* (8.13) *при* $\boldsymbol{C=0}$, *т. е.*

$$\boldsymbol{y = Y + \overline{y}}\,.$$

2) При решении конкретных примеров бывает проще повторять каждый раз все приведённые выкладки, чем использовать громоздкую формулу (8.13).

***Пример 8.6.*** Найти общее решение уравнения $\boldsymbol{y' + 2xy = 2xe^{-x^2}}$ .

*Решение.* Линейное однородное дифференциальное уравнение $\boldsymbol{y' + 2xy = 0}$ , соответствующее данному, проинтегрируем, разделяя переменные:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2\,xdx \Rightarrow ln|y| = -\,x^2 + ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-x^2}}\,.$$

Общее решение исходного уравнения будем искать в виде $\boldsymbol{y = z(\,x\,)e^{-x^2}}$ , где $\boldsymbol{z(x)}$ – неизвестная функция. Находя $\boldsymbol{y'}$ и подставляя $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y'}$ в исходное уравнение, получим:

$$\boldsymbol{y' = z'e^{-x^2} - ze^{-x^2}\cdot 2x \Rightarrow z'e^{-x^2} - ze^{-x^2}\cdot 2x\ + 2xze^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2\,x \Rightarrow\ \ z(\,x\,) = 2\int xdx + C = x^2 + C}\,.$$

Таким образом, общее решение $\boldsymbol{y = \left(x^2 + C\right)e^{-x^2}}$ .

Рассмотрим другой метод интегрирования линейного уравнения – <u>метод Бернулли</u>.

Следуя этому методу, будем искать решение линейного неоднородного уравнения в виде произведения двух неизвестных функций

$$\boldsymbol{y = u\left(x\right)\cdot v\left(x\right)}.$$

Тогда одну из них (например, $\boldsymbol{v}$) можно выбрать любой (не равной нулю), а другая определится из уравнения (8.11). Так как $\boldsymbol{y' = u'v + uv'}$ , то после подстановки $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y'}$ в исходное уравнение (8.11) получим

$$\boldsymbol{u'v + uv' + auv = b} \text{ или } \boldsymbol{u'v + u\left(v' + av\right) = b}\,. \qquad (8.14)$$

Подберём функцию $\boldsymbol{v = v\left(x\right)}$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т. е. берём в качестве $\boldsymbol{v\left(x\right)}$ какое-либо ненулевое решение уравнения с разделяющимися переменными $\boldsymbol{v' + av = 0}$ .

Подставляя найденную функцию $v(x)$ в уравнение (8.14), получаем снова уравнение с разделяющимися переменными для определения функции $u(x)$:

$$u' \cdot v(x) = b(x).$$

***<u>Пример 8.7</u>.*** В качестве примера методом Бернулли найдём общее решение линейного уравнения $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, полученное в примере 8.6 методом вариации постоянной.

*Решение.* Подставляя $y = u(x) \cdot v(x)$ в это дифференциальное уравнение, получим:

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2} \text{ или } u'v + u\left(v' + 2xv\right) = 2xe^{-x^2}.$$

Интегрируем уравнение $v' + 2xv = 0$ (постоянную интегрирования берем равную, например, нулю): $\dfrac{dv}{v} = -2x\,dx \Rightarrow ln|v| = -x^2 \Rightarrow v = e^{-x^2}$.

Интегрируя затем уравнение $e^{-x^2}u' = 2xe^{-x^2}$, находим его общее решение $u$:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow u = x^2 + C.$$

Перемножая $u$ и $v$, получаем общее решение исходного уравнения

$$y = u \cdot v = e^{-x^2}(x^2 + C).$$

Некоторые дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть сведены к линейным. К числу таких уравнений относится *уравнение Бернулли*:

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}, \qquad \alpha = const. \tag{8.15}$$

При $\alpha = 1$ получаем линейное однородное уравнение $y' + \left(a(x) - b(x)\right)y = 0$,

а при $\alpha = 0$ – линейное неоднородное уравнение.

Если предположить, что $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$ (для $\alpha$ нецелого считаем, что $y > 0$), то нетрудно показать, что подстановка $z = y^{1-\alpha}$ приводит уравнение Бернулли к линейному уравнению относительно функции $z(x)$: $\dfrac{z'}{1-\alpha} + a(x)z = b(x)$.

Однако, практически, при интегрировании уравнения Бернулли нет необходимости преобразовывать это уравнение в линейное. Как это легко можно показать, уравнение Бернулли можно непосредственно решить теми же методами, что и линейное дифференциальное уравнение.

*<u>Замечание</u>.* Иногда уравнение приводится к линейному уравнению или уравнению Бернулли, если перейти к обратной функции, т. е. считать неизвестной функцией $x$, а ее аргументом $y$. Проиллюстрируем это на примере.

***Пример 8.8.*** Найти частное решение уравнения $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{xy-4}$, удовлетворяющее условию $y(2)=-2$.

*Решение.* Для функции $y(x)$ это дифференциальное уравнение не относится ни к одному из рассмотренных уравнений, интегрируемых в квадратурах. Но оно является линейным, если рассматривать $x$ как функцию от $y$:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{xy-4}{y^2}=\frac{1}{y}x-\frac{4}{y^2}.$$

Решим это уравнение, например, методом Бернулли. Для этого рассмотрим подстановку $x=u(y)\cdot v(y)$. Тогда имеем

$$\frac{du}{dy}v+u\frac{dv}{dy}=\frac{1}{y}uv-\frac{4}{y^2} \quad \text{или} \quad \frac{du}{dy}v+u\left(\frac{dv}{dy}-\frac{v}{y}\right)=-\frac{4}{y^2}.$$

Из уравнения $\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{v}{y}=0$ или, что то же, $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{dy}{y}$ находим $u=y$.

Следовательно, $y\dfrac{du}{dy}=-\dfrac{4}{y^2}$, т. е. $du=\dfrac{-4}{y^3}dy$. Отсюда $u=\dfrac{2}{y^2}+C$.

Общее решение исходного уравнения: $x=u\cdot v=y\left(\dfrac{2}{y^2}+C\right)=Cy+\dfrac{2}{y}$.

Определим частное решение, удовлетворяющее условию $y(2)=-2$:

$2=C\cdot(-2)+\dfrac{2}{-2}\Rightarrow C=-1{,}5$. Итак, $x=\dfrac{2}{y}-1{,}5y$.

**2.5.** ***Уравнение в полных дифференциалах.***

Уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{8.16}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах,* если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т. е.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du=u'_x dx+u'_y dy.$$

Уравнение в полных дифференциалах можно записать так: $du=0$, поэтому общий интеграл его имеет вид $u(x,y)=C$.

Приведём условие, по которому можно достаточно просто узнать, что уравнение (8.16) является уравнением в полных дифференциалах и выпишем его общий интеграл (без доказательства).

Для того чтобы уравнение (8.16) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы совпадали частные производные

$$M'_y = N'_x. \qquad (8.17)$$

Общий интеграл уравнения (8.16) в случае, если оно является уравнением в полных дифференциалах, имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C. \qquad (8.18)$$

*Замечания.*

1) Нижние пределы интегрирования $x_0$ и $y_0$ можно выбирать произвольно, но так, чтобы получающиеся интегралы имели смысл. Удачный выбор $x_0$ и $y_0$ во многих случаях облегчает задачу интегрирования уравнения.

2) Первый интеграл в выражении (8.18) вычисляется по $x$ в предположении, что $y$ сохраняет постоянное значение.

**Пример 8.9.** Проверить, что уравнение $xydx + \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0 \quad (y > 0)$ является уравнением в полных дифференциалах, и проинтегрировать его.

*Решение.* Имеем $M = xy$, $N = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{y}$, $M'_y = x$, $N'_x = x \Rightarrow M'_y = N'_x$.

Итак, исходное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Применим формулу (8.18), положив $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ (мы не можем полагать $y_0 = 0$, так как $y = 0$ не принадлежит области определения функции $N$):

$$\int_0^x xydx + \int_1^y \left(0 + \frac{1}{y}\right)dy = C \Rightarrow \left.\frac{x^2 y}{2}\right|_{x=0}^{x=x} + \left.\ln y\right|_1^y = C \Rightarrow \frac{x^2 y}{2} + \ln y = C$$ – общий интеграл.

## 3. Дифференциальные уравнения второго порядка

### 3.1. *Основные понятия. Задача Коши.*

*Дифференциальное уравнение 2-го порядка* в общем случае записывается в виде $F(x, y, y', y'') = 0$ или, если это возможно, в виде, *разрешённом относительно второй производной*,

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (8.19)$$

*Общим решением* уравнения 2-го порядка (8.19) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные, удовлетворяющая следующим условиям:

1) эта функция является решением данного уравнения при любых допустимых значениях постоянных;

2) каковы бы ни были *начальные условия*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \ (y_0,\ y'_0 \text{ – заданные числа}), \qquad (8.20)$$

существуют единственные значения постоянных $C_1=C_1^0$ и $C_2=C_2^0$ такие, что функция $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$ является решением уравнения (8.19) и удовлетворяет начальным условиям (8.20).

Как и в случае дифференциального уравнения первого порядка, задача нахождения частного решения дифференциального уравнения второго порядка (8.19), удовлетворяющего системе начальных условий (8.20), называется *задачей Коши.*

### 3.2. *Уравнения, допускающие понижение порядка.*

1) Пусть дано уравнение

$$y''=f(x), \qquad (8.21)$$

*не содержащее искомой функции* $y$ *и её производной первого порядка* $y'$.

Здесь порядок понижается непосредственно путём последовательного интегрирования. Действительно, учитывая, что $y''=(y')'=\dfrac{d(y')}{dx}$, уравнение (8.21) можно записать в виде $d(y')=f(x)dx$, откуда получаем

$$y'=\int f(x)dx+C_1=g_1(x)+C_1,$$

т. е. приходим к уравнению такого же вида, что и исходное, но уже первого порядка. Далее аналогично находим

$$y=\int(g_1(x)+C_1)dx+C_2=g_2(x)+C_1x+C_2$$

– общее решение данного уравнения.

***<u>Пример 8.10.</u>*** Найти частное решение уравнения $y''=\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\quad y'(0)=2$.

*Решение.* Интегрируя, получим $y'=\int \sin x\,dx+C_1=-\cos x+C_1$. Отсюда

$$y=\int(-\cos x+C_1)dx+C_2=-\sin x+C_1x+C_2.$$

Определим постоянные $C_1$ и $C_2$, полагая $x=0,\ y=1,\ y'=2$:

$$1=-\sin 0+C_1\cdot 0+C_2,\ 2=-\cos 0+C_1\ \Rightarrow C_1=3,\ C_2=1.$$

Итак, искомое частное решение имеет вид $y=-\sin x+3x+1$.

2) Пусть дано уравнение

$$y'' = f\left(x, y'\right), \tag{8.22}$$

*не содержащее явно искомой функции* $y$.

Здесь порядок уравнения понижается при помощи замены

$$y' = z\left(x\right),$$

где $z = z\left(x\right)$ – новая неизвестная функция.

Действительно, $y'' = z'$, поэтому уравнение (8.22) принимает вид $z' = f\left(x, z\right)$ – уравнение уже первого порядка. Пусть $z = g\left(x, C_1\right)$ – общее решение полученного уравнения. Заменяя функцию $z$ на $y'$, получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $y' = g\left(x, C_1\right)$. Решая это уравнение, можно получить $y = \int g\left(x, C_1\right)dx + C_2$ – общее решение уравнения (8.22).

При решении задачи Коши для уравнений второго порядка бывает целесообразно определять значения постоянных в процессе решения, а не после нахождения общего решения уравнения. Это связано с тем, что интегрирование порой значительно упрощается, когда постоянные принимают конкретные числовые значения, в то время как при их произвольных значениях интегрирование затруднительно, а то и вообще невозможно в элементарных функциях.

***<u>Пример 8.11</u>.*** Найти частное решение уравнения $y''\left(x^2 + 1\right) = 2xy'$, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(0\right) = 1,\ y'\left(0\right) = 3$.

*Решение.* Так как уравнение не содержит явно искомую функцию $y$, то сделаем замену $y' = z\left(x\right)$, откуда $y'' = z'$. Получили уравнение первого порядка для новой функции $z$: $z'\left(x^2 + 1\right) = 2xz$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{x^2 + 1} \Rightarrow ln\left|z\right| = ln\left(x^2 + 1\right) + ln\left|C_1\right| \Rightarrow z = C_1\left(x^2 + 1\right).$$

Таким образом, $y' = C_1\left(x^2 + 1\right)$. Используя начальные условия, получаем $3 = C_1(0 + 1) \Rightarrow C_1 = 3$.

Следовательно, $y' = 3x^2 + 3$, а после интегрирования $y = x^3 + 3x + C_2$.

Начальные условия дают $1 = 0 + 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$. Итак, частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид $y = x^3 + 3x + 1$.

3) Пусть дано уравнение

$$y'' = f(y, y'), \tag{8.23}$$

*не содержащее явно независимой переменной* $x$.

Здесь порядок уравнения можно понизить за счёт введения новой независимой переменной $y$ (вместо $x$) по формуле

$$y' = z(y),$$

где $z = z(y)$ – новая неизвестная функция.

Действительно, используя правило дифференцирования сложной функции, имеем $y'' = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{dz(y)}{dx} = \dfrac{dz(y)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz(y)}{dy}\cdot z$, поэтому уравнение (8.23) принимает вид $z\cdot\dfrac{dz}{dy} = f(y,z)$ – уравнение первого порядка. Пусть $z = g(y, C_1)$ – общее решение полученного уравнения. Заменяя функцию $z$ на $y'$, получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $y' = g(y, C_1)$. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (8.23):

$$\int \frac{dy}{g(y, C_1)} = x + C_2 .$$

***Пример 8.12.*** Найти общее решение уравнения $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2,\quad y'(0) = 1$.

*Решение*. Так как в уравнении явно отсутствует переменная $x$, то сделаем замену $y' = z(y) \Rightarrow y'' = z\cdot\dfrac{dz}{dy}$.

Исходное уравнение преобразуется к виду :

$$z\frac{dz}{dy} + \frac{2}{1-y}z^2 = 0 \Rightarrow z\left(\frac{dz}{dy} + \frac{2}{1-y}z\right) = 0 .$$

Рассмотрим два случая:

а) $z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ ;

б) $\dfrac{dz}{dy} + \dfrac{2}{1-y}z = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = \dfrac{2dy}{y-1} \Rightarrow z = C_1(y-1)^2$. Заменив $z$ на $y'$, получим

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y-1)^2 \Rightarrow \frac{dy}{(y-1)^2} = C_1 dx \Rightarrow -\frac{1}{y-1} = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2} .$$

Общее решение $y = C$ в случае а) входит в общее решение в случае б) при $C_1 = 0$.

Найдём постоянные $C_1$ и $C_2$: $\begin{cases} 2 = 1 - \dfrac{1}{C_2} \\ 1 = C_1(2-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$.

Таким образом, частное решение: $y = 1 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-2}{x-1}$.

### 3.3. *Линейные уравнения. Общие вопросы.*

3.3.1. Общие вопросы.

Многие задачи математики, механики и других наук приводят к *линейным дифференциальным уравнениям второго порядка*, т. е. к уравнениям, в которых неизвестная функция $y$ и её производные $y', y''$ входят линейно (в первой степени):

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{8.24}$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – заданные функции от $x$.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{8.25}$$

называется *линейным однородным дифференциальным уравнением* (сокращение – ЛОДУ) второго порядка, в противном случае уравнение (8.24) – *линейное неоднородное дифференциальное уравнение* (сокращение – ЛНДУ).

Отметим вначале некоторые важные свойства решений ЛОДУ.

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – любые частные решения уравнения (8.25). Тогда решением этого уравнения будет являться также функция $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми,* если их отношение не является постоянной величиной, т. е. $\dfrac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$. В противном случае они называются *линейно зависимыми.* Например, функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ являются линейно независимыми, так как $\dfrac{y_1}{y_2} = tgx \neq \text{const}$, а функции $y_1$ и $y_3 = 2\sin x$ являются линейно зависимыми, так как $\dfrac{y_1}{y_3} = \dfrac{1}{2} = \text{const}$.

Совокупность любых двух частных решений ЛОДУ второго порядка называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения, если они линейно независимы. Например, для уравнения $y'' + y = 0$ функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений.

Сформулируем *теорему о структуре общего решения ЛОДУ второго порядка*: *если* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *– фундаментальная система решений ЛОДУ (8.25), то формула*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{8.26}$$

*где* $C_1$ и $C_2$ *– произвольные постоянные, даёт общее решение этого уравнения.*

Таким образом, задача нахождения общего решения ЛОДУ сводится к задаче отыскания фундаментальной системы его частных решений.

Сформулируем *теорему о структуре общего решения ЛНДУ второго порядка*: *общее решение* $y$ *ЛНДУ (8.24) равно сумме какого-либо частного решения* $\bar{y}(x)$ *ЛНДУ и общего решения* $Y(x)$ *соответствующего ЛОДУ (8.25), т. е.*

$$y = \bar{y}(x) + Y(x). \tag{8.27}$$

Частное решение $\bar{y}(x)$ ЛНДУ (8.24) можно найти, если известна фундаментальная система решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствующего ЛОДУ (8.25), *методом вариации постоянных*.

Согласно этому методу частное решение ЛНДУ ищется в таком же виде, как и общее решение ЛОДУ $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, с той лишь разницей, что постоянные $C_1$ и $C_2$ заменяются функциями $z_1(x)$ и $z_2(x)$, подлежащими определению, т. е. в виде

$$\bar{y}(x) = z_1(x) y_1(x) + z_2(x) y_2(x) \cdot \tag{8.28}$$

Метод вариации постоянных в данном случае аналогичен методу вариации постоянной для ЛНДУ первого порядка, который рассматривался ранее.

Функции $z_1$ и $z_2$ должны быть найдены так, чтобы выражение (8.28) удовлетворяло исходному ЛНДУ второго порядка. Так как условие одно, а функций две, то можно произвольно выбрать дополнительное условие, лишь бы полученные условия позволяли однозначно определить эти функции. Поскольку $\bar{y}' = z_1' y_1 + z_1 y_1' + z_2' y_2 + z_2 y_2'$, то в качестве такого условия можно взять $z_1' y_1 + z_2' y_2 = 0$. Тогда $\bar{y}' = z_1 y_1' + z_2 y_2'$, поэтому $\bar{y}'' = z_1' y_1' + z_1 y_1'' + z_2' y_2' + z_2 y_2''$. Подставляя эти выражения вместе с (8.28) в (8.24), получим

$$z_1\left(\overline{y}''+a_1\overline{y}'+a_2\overline{y}\right)+z_2\left(\overline{y}''+a_1\overline{y}'+a_2\overline{y}\right)+z_1'y_1'+z_2'y_2'=f\ .$$

Выражения в скобках равны нулю, так как $y_1$ и $y_2$ – решения уравнения (8.25).

Следовательно, для определения функций $z_1$ и $z_2$ получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} z_1'y_1+z_2'y_2=0 \\ z_1'y_1'+z_2'y_2'=f(x) \end{cases}. \tag{8.29}$$

Система (8.29) является линейной системой алгебраических уравнений относительно $z_1',\ z_2'$. Эта система имеет единственное решение только при условии, что $y_1$ и $y_2$ – фундаментальная система решений ЛОДУ (доказательство этого утверждения в настоящем пособии не приводится).

Разрешая систему (8.29) относительно $z_1',\ z_2'$ и проинтегрировав их, находим искомые функции $z_1$ и $z_2$.

Таким образом, для нахождения частного решения ЛНДУ (8.24) методом вариации постоянных нужно:

1) найти два линейно независимых частных решения $y_1$ и $y_2$ соответствующего ЛОДУ;

2) составить и решить систему (8.29), т. е. найти $z_1'$ и $z_2'$;

3) проинтегрировать найденные $z_1'$ и $z_2'$, т. е. определить функции $z_1$ и $z_2$ (постоянные интегрирования при этом можно взять равными нулю);

4) составить искомое решение по формуле (8.28).

***<u>Пример 8.13.</u>*** Найти общее решение уравнения $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

*Решение*. Фундаментальной системой решений соответствующего ЛОДУ являются функции $y_1\left(x\right)=\cos x$ и $y_2(x)=\sin x$. Следовательно, $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$ – общее решение соответствующего ЛОДУ.

Согласно методу вариации постоянных ищем частное решение $\overline{y}$ для ЛНДУ в виде $\overline{y}=z_1\left(x\right)\cos x+z_2\left(x\right)\sin x$.

Для нахождения неизвестных функций $z_1$ и $z_2$ составим систему

$$\begin{cases} z_1'\cos x+z_2'\sin x=0 \\ -z_1'\sin x+z_2'\cos x=\dfrac{1}{\cos^3 x} \end{cases}.$$

Найдём из этой системы $z_1'$ и $z_2'$, например, методом Крамера.

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Следовательно, по формулам Крамера имеем:

$$z_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad z_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Интегрируя, получим

$$z_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = -\frac{1}{2\cos^2 x}, \quad z_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx.$$

Следовательно, частное решение ЛНДУ имеет вид

$$\overline{y} = -\frac{1}{2\cos^2 x}\cos x + tgx \sin x = -\frac{\cos 2x}{2\cos x}.$$

Итак, общее решение данного уравнения

$$y = \overline{y} + Y = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

При нахождении частного решения ЛНДУ полезно использовать так называемый *принцип наложения*, состоящий в том, что частное решение уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ имеет вид $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$, где $\overline{y}_1$ и $\overline{y}_2$ – частные решения соответственно уравнений $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x)$ и $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x)$.

Например, частное решение уравнения $y'' + 2y = 2 + 3e^x$ имеет вид $\overline{y} = 1 + e^x$, так как уравнение $y'' + 2y = 2$ имеет частное решение $\overline{y}_1 = 1$, а уравнение $y'' + 2y = 3e^x$ имеет частное решение $\overline{y}_2 = e^x$, в чём легко убедиться.

### 3.4. *ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Решим задачу нахождения фундаментальной системы решений для частного случая *ЛОДУ с постоянными коэффициентами*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{8.30}$$

где $a_1$ и $a_2$ – заданные числа.

Будем искать частные решения уравнения (8.30) в виде

$$y = e^{rx},$$

где $r$ – некоторое, пока неопределённое, число. Подставляя $y = e^{rx}$ и её производные $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ в (8.30), получим $e^{rx}\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0$. Учитывая, что $e^{rx} \neq 0$, делаем вывод: *функция $y = e^{rx}$ тогда и только тогда удовлетворяет ЛОДУ (8.30), т. е. является его решением, когда число **r** является корнем уравнения*

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 . \tag{8.31}$$

Квадратное уравнение (8.31) называется *характеристическим уравнением***,** а его корни – *характеристическими числами* данного дифференциального уравнения.

Заметим, что для составления характеристического уравнения достаточно в уравнении (8.30) заменить $y''$, $y'$ и $y$ соответственно на $r^2$, $r$ и $1$. Например, для ЛОДУ с постоянными коэффициентами $y'' - 3y' + 2y = 0$ характеристическое уравнение имеет вид $r^2 - 3r + 2 = 0$.

При решении квадратного уравнения (8.31) возможны три случая. Рассмотрим каждый из них.

<u>*Случай 1.*</u> Корни $r_1$ и $r_2$ характеристического уравнения *действительные и различные*: $r_1 \neq r_2$.

Каждому из этих чисел соответствует частное решение ЛОДУ. Следовательно, находим два частных решения уравнения (8.30): $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$. Они линейно независимы: $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq \text{const}$, так как $r_1 - r_2 \neq 0$. Значит, указанные решения образуют фундаментальную систему. Тогда, согласно теореме о структуре общего решения ЛОДУ, формула

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{8.32}$$

даёт общее решение ЛОДУ в рассмотренном случае ($C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные).

<u>**Пример 8.14.**</u> Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

*Решение.* Составим характеристическое уравнение для данного ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $r^2 - 3r + 2 = 0$. Его корни $r_1 = 1, r_2 = 2$ различны и действительны. Частные решения $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Общее решение дифференциального уравнения $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

<u>*Случай 2.*</u> Корни $r_1$ и $r_2$ характеристического уравнения *действительные и равные*: $r_1 = r_2$.

В этом случае рассмотренные ранее рассуждения приводят только к одному частному решению $y_1 = e^{r_1 x}$ уравнения (8.30). Нетрудно показать, что наряду с $y_1$ решением данного уравнения будет и $y_2 = xe^{r_1 x}$, причём они составляют фундаментальную систему. Следовательно, в этом случае общее решение ЛОДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}. \tag{8.33}$$

<u>***Пример 8.15.***</u> Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0$.

*Решение.* Характеристическое уравнение $r^2 + 6r + 9 = 0$ может быть записано в виде $(r + 3)^2 = 0$, значит имеем равные корни $r_{1,2} = -3$. Поэтому общее решение записывается так: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

<u>*Случай 3.*</u> Корни $r_1$ и $r_2$ характеристического уравнения *комплексные сопряжённые*: $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha$ и $\beta$ – действительные числа.

Данный случай будет при отрицательном дискриминанте $D$ квадратного уравнения (8.31): $D = a_1^2 - 4a_2 < 0$, при этом $\alpha = -\dfrac{a_1}{2}$ – *действительная часть* комплексного числа, $\beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2}$ – *мнимая часть*, $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*.

Можно показать, что в рассмариваемом случае функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ составляют фундаментальную систему ЛОДУ (8.30).

Следовательно, в этом случае общее решение ЛОДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{8.34}$$

<u>***Пример 8.16.***</u> Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.

*Решение.* Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 5 = 0$ имеет комплексные сопряжённые корни

$$r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i.$$

Поэтому $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Искомое общее решение

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x.$$

### 3.5. *ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{8.35}$$

где $a_1$ и $a_2$ - заданные числа, $f(x)$ - заданная функция.

В пункте 3.3 был рассмотрен метод решения ЛНДУ с произвольными коэффициентами – метод вариации постоянных. Для его осуществления нужно знать фундаментальную систему решений соответствующего ЛОДУ. В предыдущем пункте было показано как строить фундаментальную систему решений ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Таким образом, *общее решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами всегда может быть получено методом вариации постоянных*.

Для некоторых частных видов функции $f(x)$ перавой части ЛНДУ (8.35) удаётся найти частное решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами без интегрирования, т. е. обходясь лишь операцией дифференцирования и решением системы линейных алгебраических уравнений. В таких случаях, складывая это частное решение с общим решением соответствующего ЛОДУ, мы получим без интегрирования и общее решение ЛНДУ (согласно теореме о стрруктуре общего решения ЛНДУ).

Перейдём к рассмотрению *метода подбора частного решения* $\bar{y}$ *для ЛНДУ с постоянными коэффициентами и функцией* $f(x)$ *праавой части специального вида* (*метод неопределённых коэффициентов)*.

Суть метода состоит в следующем. Частное решение $\bar{y}$ $\bar{y}$ ЛНДУ ищут в виде, аналогичном виду функции $f(x)$, стоящей в правой части уравнения, но с неопределёнными коэффициентами. Последние определяются подстановкой функции $\bar{y}$ $\bar{y}$ в ЛНДУ.

Рассмотрим некоторые виды уравнений, допускающие применение метода неопределённых коэффициентов.

<u>*Случай 1.*</u> Пусть правая часть уравнения (8.35) имеет вид

$$f(x) = e^{ax} P_n(x), \tag{8.36}$$

где $P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ – многочлен степени $n$; $a$ и $b_i$ – заданные числа ($n = 0, 1, \ldots;\ i = 0, 1, \ldots, n$).

В этом случае частное решение $\bar{y}$ ЛНДУ ищется в виде

$$\bar{y} = x^s e^{ax} Q_n(x), \tag{8.37}$$

где число $s$ показывает, сколько раз число $a$ является корнем характеристического уравнения, а $Q_n(x) = d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0$ – многочлен степени $n$ с неопределёнными коэффициентами $d_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$).

Подставляя (8.37) в (8.35) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим систему ($n+1$) алгебраических уравнений для определения коэффициентов $d_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$).

***Пример 8.17.*** Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 1$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = -5$.

*Решение*. Характеристическое уравнение $r^2 + 4r = 0$ имеет различные действительные корни $r_1 = 0$, $r_2 = -4$. Общее решение $Y$ ЛОДУ имеет вид:

$$Y = C_1 + C_2 e^{-4x}.$$

Ищем частное решение ЛНДУ. В нём правая часть $f(x) = 12x^2 - 2x + 1 = \left(12x^2 - 2x + 1\right) \cdot e^{0 \cdot x}$ является формулой вида (8.36) при $n = 2$, $a = 0$. Так как число $a = 0$ является один раз корнем характеристического уравнения, то берём $s = 1$, поэтому, согласно рекомендации (8.37), частное решение ЛНДУ ищем в виде $\bar{y} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$, где $A$, $B$ и $C$ – неопределённые коэффициенты. Вычисляем $\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $\bar{y}'' = 6Ax + 2B$. Подставляем $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в ЛНДУ:

$$6Ax + 2B + 4\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 12x^2 - 2x + 1.$$

Приравниваем коэффициенты при степенях $x$:

$x^2$ : $12A = 12$;
$x^1$ : $6A + 8B = -2$;
$x^0$ : $2B + 4C = 1$.

Находим $A = 1$, $B = -1$, $C = \dfrac{3}{4}$.

Таким образом, частное решение ЛНДУ имеет вид $\bar{y} = x\left(x^2 - x + \dfrac{3}{4}\right)$.

Общее решение ЛНДУ

$$y = \bar{y} + Y = C_1 + C_2 e^{-4x} + x\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right).$$

Для решения задачи Коши найдём $y' = -4C_2 e^{-4x} + 3x^2 - 2x + \dfrac{3}{4}$. Так как $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$, то получаем систему $\begin{cases} -1 = C_1 + C_2 \\ 5 = -4C_2 + \dfrac{3}{4} \end{cases}$, откуда находим $C_1 = \dfrac{1}{16}$, $C_2 = -\dfrac{17}{16}$. Поэтому частное решение ЛНДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид $y = \frac{1}{16} - \frac{17}{16} e^{-4x} + x\left( x^2 - x + \frac{3}{4} \right)$.

<u>*Случай 2.*</u> Пусть правая часть уравнения (8.35) имеет вид

$$f(x) = e^{ax}\left[ P_n(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx \right], \tag{8.38}$$

где $P_n(x)$, $R_m(x)$ – известные многочлены степени $n$ и $m$ соответственно.

В этом случае частное решение $\bar{y}$ ЛНДУ ищется в виде

$$\bar{y} = x^s e^{ax}\left[ Q_k(x)\cos bx + T_k(x)\sin bx \right]. \tag{8.39}$$

Здесь число $s$ показывает, сколько раз комплексное число $a + bi$ является корнем характеристического уравнения; $k = max\{n, m\}$; $Q_k(x), T_k(x)$ – многочлены степени $k$ с неопределёнными коэффициентами. Чтобы найти эти коэффициенты, надо подставить $\bar{y}$ в ЛНДУ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях. При этом надо приравнивать друг другу соответствующие коэффициенты тех многочленов, которые стоят множителями при $\cos bx$, и отдельно – коэффициенты многочленов при $\sin bx$.

<u>***Пример 8.18.***</u> Найти общее решение уравнения $y'' + y = 2\sin x$.

*Решение*. Это уравнение вида (8.38) при $a = 0,\ b = 1,\ n = 0,\ m = 0$.

Характеристическое уравнение соответствующего ЛОДУ $r^2 + 1 = 0$ имеет комплексные корни $r_{1,2} = \pm i$. Поэтому общее решение ЛОДУ

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Так как $a + bi = i$ является корнем характеристического уравнения, то полагаем $s = 1$. По значениям $n$ и $m$ определяем $k = 0$. Согласно правилу (8.39) ищем частное решение исходного уравнения в виде $\bar{y} = x\left[ A\cos x + B\sin x \right]$.

Находим коэффициенты $A$ и $B$. Для этого вначале вычислим производные

$\bar{y}' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x = (Bx + A)\cos x + (B - Ax)\sin x$,

$\bar{y}'' = B\cos x - (Bx + A)\sin x - A\sin x + (B - Ax)\cos x = (2B - Ax)\cos x + (-2A - Bx)\sin x$.

Подставив $\bar{y}$ и $\bar{y}''$ в исходное уравнение, получим

$(2B - Ax)\cos x + (-2A - Bx)\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = 2\sin x$ или

$2B\cos x - 2A\sin x = 0 \cdot \cos x + 2\sin x$.

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$:

$\cos x$: $2B = 0$;

$\sin x$: $-2A = 2$.

Отсюда $A=-1,\ B=0$. Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид $\overline{y}=-x\cos x$. Следовательно,

$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x$ – искомое общее решение уравнения.

## 4. Понятие о системе дифференциальных уравнений

При решении многих задач приходится находить функции $y_i=y_i\left(x\right),\quad i=1,2,...,n$, которые удовлетворяют *системе дифференциальных уравнений*, содержащих независимую переменную $x$, искомые функции $y_i$ и их производные.

В дальнейшем будем рассматривать только *нормальную систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=f_1\left(x,y_1,y_2,...,y_n\right) \\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2\left(x,y_1,y_2,...,y_n\right) \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n\left(x,y_1,y_2,...,y_n\right) \end{cases}. \tag{8.40}$$

Заметим, что в нормальной системе все дифференциальные уравнения имеют первый порядок и разрешены относительно производных, число уравнений совпадает с числом искомых функций.

*Решением системы* (8.40) называется совокупность $n$ функций $y_i=\varphi_i\left(x\right)$, если они обращают все уравнения системы (8.40) в тождества по $x$.

Например, совокупность функций $y_1=-\dfrac{1}{x^2},\ y_2=-x\ln x$ при $x>0$ есть решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2xy_1^2 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=\dfrac{y_2}{x}-1 \end{cases}$. Действительно, для данных функций имеем $\dfrac{dy_1}{dx}=\dfrac{2}{x^3}$, $\dfrac{dy_2}{dx}=-1-\ln x$. Подставляя в уравнения системы вместо $y_1,\ y_2,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dfrac{dy_2}{dx}$ их выражения через $x$, получим тождества.

*Начальные условия* для системы (8.40) имеют вид

$$y_1\left(x_0\right)=y_1^0,\ y_2\left(x_0\right)=y_2^0,\ ...,\ y_n\left(x_0\right)=y_n^0, \tag{8.41}$$

где $x_0,\ y_1^0, ...,\ y_n^0$ – заданные числа.

*Задачей Коши* для системы (8.40) называется задача нахождения решения этой системы, удовлетворяющего начальным условиям (8.41).

Совокупность $n$ функций

$$y_i = \varphi_i\left(x,\ C_1,\ C_2,\ ...\ ,\ C_n\right),\quad i = 1,\ ...\ ,\ n, \tag{8.42}$$

зависящих от $n$ произвольных постоянных $C_1, ..., C_n$, называется *общим решением* системы (8.40), если:

1) совокупность (8.42) является решением системы (8.40) при всех допустимых $C_1, ... , C_n$;

2) по начальным условиям (8.41) можно однозначно определить $C_1, ... , C_n$ из системы уравнений $\varphi_i\left(x_0,\ C_1,\ C_2,\ ...\ ,\ C_n\right) = y_i^0,\quad i = 1,\ ...\ ,\ n$.

Решения, получающиеся из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, ... , C_n$, называются *частными решениями*.

Основным методом решения систем дифференциальных уравнений является *метод исключения*, который позволяет свести решение нормальной системы (8.40) из $n$ уравнений к решению одного дифференциального уравнения $n$-го порядка. Сущность этого метода заключается в последовательном исключении всех искомых функций, кроме одной, из данной системы.

Опишем этот процесс для наглядности на примере *системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z \end{cases}, \tag{8.43}$$

где $a_{ij}$ – заданные числа, а $y$ и $z$ – неизвестные функции аргумента $x$.

Эту систему можно привести к одному дифференциальному уравнению второго порядка, например, для функции $y\left(x\right)$. Это достигается дифференцированием первого уравнения системы (8.43) по переменной $x$ и последующим исключением $\dfrac{dz}{dx},\ z$ с помощью системы (8.43):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a_{11}\frac{dy}{dx} + a_{12}\frac{dz}{dx} = a_{11}\frac{dy}{dx} + a_{12}\left[a_{21}y + \frac{a_{22}}{a_{12}}\left(\frac{dy}{dx} - a_{11}y\right)\right] =$$

$$= \left(a_{11} + a_{22}\right)\frac{dy}{dx} + \left(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}\right)y.$$

Функция $y\left(x\right)$ определяется из решения полученного ЛОДУ второго порядка, а затем определяется функция $z(x)$ из первого уравнения системы (8.43).

***Пример 8.19.*** Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 7y + 3z \\ \dfrac{dz}{dx} = 6y + 4z \end{cases}.$$

*Решение.* Дифференцируем первое уравнение системы по переменной $x$ (для краткости записи сменим обозначение производной): $y'' = 7y' + 3z'$. Заменяем $z'$ из второго уравнения системы, а функцию $z$ из первого уравнения этой системы:

$$y'' = 7y' + 3\left[6y + \frac{4}{3}(y' - 7y)\right] = 11y' - 10y.$$

Составляем характеристическое уравнение для полученного ЛОДУ

$$y'' - 11y' + 10y = 0: \quad r^2 - 11r + 10 = 0.$$

Корни уравнения различные и действительные: $r_1 = 1; \quad r_2 = 10$.

Общее решение ЛОДУ определяет первую функцию $y$:

$$y = C_1e^x + C_2e^{10x}.$$

Вторую функцию $z$ находим из первого уравнения исходной системы:

$$z = \frac{1}{3}(y' - 7y) = \frac{1}{3}\left(C_1e^x + 10C_2e^{10x} - 7\left(C_1e^x + C_2e^{10x}\right)\right) = -2C_1e^x + C_2e^{10x}.$$

Аналогично проходит процедура решения *системы двух линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + f(x) \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + g(x) \end{cases}, \tag{8.44}$$

где $f(x),\ g(x)$ – заданные функции.

***Пример 8.20.*** Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z + x \end{cases}.$$

*Решение.* Продифференцируем по $x$ первое из уравнений: $y'' = y' + z'$.

Заменив производную $z'$ из второго уравнения, получим: $y'' = y' + y + z + x$. Из первого уравнения системы можно выразить $z = y' - y$. Тогда приходим к ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами для функции $y$: $y'' - 2y' = x$.

Решаем это уравнение. Характеристическое уравнение $r^2 - 2r = 0$ имеет различные действительные корни $r_1 = 0,\ r_2 = 2$. Общее решение соответствующего ЛОДУ

$$Y = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Частное решение ищем в виде

$$\overline{y} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Определим коэффициенты $A$ и $B$:

$$\overline{y}' = 2Ax + B,\quad \overline{y}'' = 2A,\quad 2A - 2(2Ax + B) \equiv x \Rightarrow A = B = -0{,}25.$$

Итак,

$$y = Y + \overline{y} = C_1 + C_2 e^{2x} - 0{,}25x\left(x + 1\right).$$

Подставляя полученное значение $y$ и производную $y' = 2C_2e^{2x} - 0{,}5x - 0{,}25$ в уравнение $z = y' - y$, находим $z = -C_1 + C_2e^{2x} + 0{,}25\left(x^2 - x - 1\right)$.

Совокупность функций

$$y = Y + \overline{y} = C_1 + C_2e^{2x} - 0{,}25x\left(x + 1\right),\quad z = -C_1 + C_2e^{2x} + 0{,}25\left(x^2 - x - 1\right)$$

является общим решением данной системы.

## Варианты заданий контрольной работы № 8

**8.1.** Найти общее решение дифференциальных уравнений:

**1**. 1) $\sqrt{4 + y^2}\, dx - ydy = x^2ydy;$ 2) $xy' + y = x^3$.

**2.** 1) $y'y\sqrt{\dfrac{1 - x^2}{1 - y^2}} + 1 = 0;$ 2) $xy' - y = x\, tg\dfrac{y}{x}$.

**3.** 1) $\sqrt{4 - x^2}\, y' + xy^2 + x = 0;$ 2) $y' - y\, tg\, x = 1/\cos x$.

**4.** 1) $y \ln y + xy' = 0;$ 2) $y^2 + x^2y' = xyy'$.

**5.** 1) $(3 + e^x)\, yy' = e^x;$ 2) $y' = \dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$.

**6.** 1) $(1 + e^x)\, y' = ye^x;$ 2) $xy' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

**7.** 1) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\, y' = 0;$ 2) $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

**8.** 1) $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx;$ 2) $xy' = 2y + x^2$.

**9.** 1) $(y+1)\sqrt{x}\,dy = (y-1)dx$; 2) $y' + 2y = y^2e^x$.

**10.** 1) $xdx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0;$ 2) $y' = \dfrac{2y}{x+1} + (x+1)^2$.

**11.** 1) $(e^x + 8)\,dy - ye^xdx = 0;$ 2) $y' - \dfrac{3y}{x} = x$.

**12.** 1) $(y^2 + 3)\,dx = \dfrac{e^x}{x}ydy;$ 2) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.

**13.** 1) $\sin x\, tg\, y = \dfrac{y'}{\sin x};$ 2) $y' - 10\dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$.

**14.** 1) $e^{-x^2}y' = x\,(1 + y^2);$ 2) $y' - \dfrac{y}{x} = tg\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\cos\dfrac{y}{x}}$.

**15.** 1) $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0;$ 2) $(xy' - y)\, arctg\dfrac{y}{x} = x$.

**16.** 1) $\dfrac{e^{-x^2}dy}{x} + \dfrac{dx}{\cos^2 y} = 0;$ 2) $xy' = y\,(1 + \ln\dfrac{y}{x})$.

**17.** 1) $(1 + e^x)\,ydy = e^ydx;$ 2) $(x^2 + 1)\,y' + 4xy = 3$.

**18.** 1) $(e^{2x} + 5)\,dy + ye^{2x}dx = 0;$ 2) $x^2y' = y\,(x + y)$.

**19.** 1) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0;$ 2) $2x^3y' = y\,(2x^2 - y^2)$.

**20.** 1) $1 + (1 + y')\,e^y = 0;$ 2) $(2x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$.

**21.** 1) $y'ctg\,x + y = 2;$ 2) $xy' = y + \sqrt{y^2 - 4x^2}$.

**22.** 1) $3e^x\sin y\,dx + (1 - e^x)dy = 0;$ 2) $(xy' - y)\,(2y + x) = y^2 + xy + x^2$.

**23.** 1) $y' = (2y + 1)\,tg\,x;$ 2) $(x + 2y)\,dx + xdy = 0$.

**24.** 1) $y'\sin x = y\ln y;$ 2) $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$.

**25.** 1) $(1 + e^y)dx = e^{2y}\sin^2 x\,dy;$ 2) $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

**26.** 1) $e^{x+3y}dy = xdx;$ 2) $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$.

**27.** 1) $y' = (2x - 1)ctg\,y;$ 2) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

**28.** 1) $\sqrt{x^2 + 4}\,\ln ydy = ydx$; 2) $x^2y' = (x - y)y$.

**29.** 1) $(y^2 + 1)dx - y\,tg\,x\,dy = 0;$ 2) $y' - y\,tg\,x + y^2\cos x = 0$.

**30.** 1) $(1-e^x)yy'=e^x$; 2) $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

**8.2.** Решить задачу Коши:

1. $y'=4+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2,\ y(1)=2.$

2. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2,\ y(0)=1.$

3. $xy'-y=x/\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ y(1)=0.$

4. $y'+2xy=e^{-x^2}\sin x,\ y(0)=1.$

5. $2(y'+y)=xy^2,\ y(1)=2.$

6. $xy'=2(y-\sqrt{xy}),\ y(1)=4.$

7. $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y,\ y(1)=2.$

8. $xy'+6y=\dfrac{2y^3}{x^5},\ y(1)=4.$

9. $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}-x,\ y(1)=0.$

10. $xy+y^2=(2x-y)xy',\ y(1)=1.$

11. $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2},\ y(0)=1.$

12. $(xe^x+\dfrac{y}{x^2})dx-\dfrac{1}{x}dy=0,\ y(1)=5.$

13. $xy'\sin\dfrac{y}{x}+x=y\sin\dfrac{y}{x},\ y(1)=0.$

14. $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

15. $x^2y'-4x^2-xy=0,\ y(1)=0.$

16. $2xy'+3y=\sqrt{x},\ y(4)=2.$

17. $yy'=3y-2x,\ y(1)=1.$

18. $xy'+y=xy^2\ln x,\ y(1)=3.$

19. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+1}{x}e^x,\ y(1)=e.$

20. $xy'+y=x^2+x,\ y(1)=6.$

21. $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2,\ y(0)=1.$

22. $xy'-y+y^2(\ln x+2)\ln x=0,\ y(1)=1.$

23. $2(y'+xy)=(x-1)e^xy^2,\ y(0)=2.$

24. $xy'-y=(x+y)\ln(1+\dfrac{y}{x}),\ y(1)=0.$

25. $(x-y)dx+(x+y)dy=0,\ y(2)=1.$

26. $3(xy'+y)=xy^2,\ y(1)=3.$

27. $y'-4xy=-4x^3,\ y(0)=-0{,}5.$

28. $(2xy-4)dx=(y-x^2+1)dy,\ y(0)=1.$

29. $xdy-ydx=xe^{\frac{y}{x}}dx,\ y(1)=0.$

30. $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{2}{x^3},\ y(1)=1.$

**8.3.** Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

1. $xy''\ln x=y',\ y(e)=e-1,\ y'(e)=1.$
2. $y''\cos^4x=-\sin 2x,\ y(\pi)=0,\ y'(\pi)=2.$

3. $2xy'' = y'$, $y(9) = 8$, $y'(9) = 3$.

4. $y'' = y' \ln y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

6. $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

7. $xy'' = (1 + 2x^2)y'$, $y(1) = \sqrt{e} + 1$, $y'(1) = \sqrt{e}$.

8. $y'' = \sin^2 x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

9. $y'' = 2\sqrt{1+y'}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -1$.

10. $y'' + (y')^2 = 0$, $y(2) = \ln(2e)$, $y'(2) = 0{,}5$.

11. $x^4y'' + x^3y' = 4$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

12. $2yy'' = 1 + (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

13. $x(y'' + 1) + y' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

14. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.

15. $y'' \operatorname{ctg} x + 2y' = 0$, $y(\pi / 4) = 1$, $y'(\pi / 4) = 0$.

16. $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

17. $x^2y'' + xy' = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

18. $(1 + \sin x)y'' = y' \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

19. $y''(2y + 3) = 2(y')^2$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

20. $(1 - x^2)y'' = xy' + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

21. $x^2y'' = (y')^2$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

22. $y'' = (y')^2$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = -1$.

23. $y^2y'' = y'$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$.

24. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$.

25. $xy'' + y' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

26. $y''x = y' + 1$, $y(5) = 1$, $y'(5) = 2$.

27. $(y - 1)y'' = 2(y')^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

28. $y''(1 + e^{-x}) = y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

29. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x - 1)$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 1$.

30. $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1} y' = 2x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 4.$

**8.4.** Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y'' + y' - 2y = 3e^x.$
2. $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}.$
3. $y'' - y' = 2 - x.$
4. $y'' - 5y' + 4y = 2e^{4x}.$
5. $y'' + y' = e^{-x}.$
6. $y'' + y' - 2y = -3e^{-2x}.$
7. $y'' + 4y = 2\sin 2x.$
8. $y'' + 9y = e^x \cos 3x.$
9. $y'' - 3y' = 2 - 6x.$
10. $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}.$
11. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$
12. $y'' + 2y' + 5y = e^x \cos 2x.$
13. $y'' - 12y' + 36y = 2e^{6x}.$
14. $y'' - 16y = e^{4x}.$
15. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}.$
16. $y'' + 2y' + 2y = x\cos x.$
17. $y'' - 3y' - 4y = -2e^{-x}.$
18. $y'' + 2y' - 3y = e^x.$
19. $y'' + y' = x(x+2).$
20. $y'' + 7y' + 12y = xe^{-3x}.$
21. $y'' + 10y' = e^{-10x}.$
22. $y'' - 6y' + 5y = (1+x)e^x.$
23. $y'' + 81y = \sin 9x.$
24. $y'' + 8y' + 16y = e^{-4x}\cos x.$
25. $y'' + 5y' = 2x - 1.$
26. $y'' - 2y' + 5y = x\sin 2x.$
27. $y'' - 2y' - 3y = (1-x)e^{-x}.$
28. $y'' + 4y = xe^{2x}.$
29. $y'' - y' - 6y = e^{3x}.$
30. $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x}.$

**8.5.** Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + 3z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y \end{cases}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = -2y + 3z \end{cases}.$

3. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y + 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 5y - 6z \end{cases}.$

4. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = -3y - 4z \end{cases}.$

5. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = -2y + 5z \end{cases}.$

6. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + 3z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - 2z \end{cases}.$

7. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y - 4z \end{cases}$.
8. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y + 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 5y \end{cases}$.
9. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = -3y + 6z \end{cases}$.

10. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 2z \end{cases}$.
11. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y + z \end{cases}$.
12. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + 8z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z \end{cases}$.

13. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -2y + 3z \end{cases}$.
14. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -2y + z \end{cases}$.
15. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y + 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z \end{cases}$.

16. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - 4z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - 2z \end{cases}$.
17. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y + z \end{cases}$.
18. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 5y + 3z \\ \dfrac{dz}{dx} = -3y - z \end{cases}$.

19. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = y \end{cases}$.
20. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y + 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = -2y + z \end{cases}$.
21. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y - z \end{cases}$.

22. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y + 4z \end{cases}$.
23. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 5z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z \end{cases}$.
24. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 3z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}$.

25. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = 5y - z \end{cases}$.
26. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 3z \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$.
27. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 5y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -z \end{cases}$.

**28.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$.  **29.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -z \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y \end{cases}$.  **30.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 2z \end{cases}$.

## Раздел 9. РЯДЫ

Литература: [2, модуль 21-24]; [3, глава 13-15]; [4, часть 6]; [6, глава 12].

### 1. Числовые ряды. Основные понятия

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{9.1}$$

называется *числовым рядом* или просто *рядом*. При этом числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*, а член $a_n$ с произвольным номером $n$ – его *общим членом* или $n$-*членом*.

Нумерацию слагаемых можно начинать не с единицы, а с любого целого числа. Например, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n}$, $\sum_{n=-1}^{\infty} 2^{n+1}$ и т. п. – это запись одного и того же ряда $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$

Ряд считается заданным, если задан его общий член. Обычно общий член ряда задаётся функцией, зависящей от номера $n$: $a_n = f(n)$. Полагая в нём $n = 1, 2, \ldots$, можно найти любой член этого ряда.

Например, если общий член ряда имеет вид $a_n = \dfrac{n}{n^2 + (-1)^{n+1}}$, то

$$a_1 = \frac{1}{1^2 + (-1)^{1+1}} = \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{2}{2^2 + (-1)^{2+1}} = \frac{2}{3},\quad a_3 = \frac{3}{3^2 + (-1)^{3+1}} = \frac{3}{10}, \ldots$$

Ряд, составленный из этих членов, будет иметь вид

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \ldots + \frac{n}{n^2 + (-1)^{n+1}} + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + (-1)^{n+1}}.$$

Понятие суммы ряда определяется с помощью предельного перехода. Для этого рассмотрим сумму первых $n$ членов ряда (9.1)

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{9.2}$$

называемую $n$-*й частичной суммой* этого ряда. Ясно, что первая, вторая, третья и т. д. частичные суммы

$$S_1 = a_1,\quad S_2 = a_1 + a_2,\quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

будут обычными суммами конечного числа слагаемых, они образуют бесконечную последовательность.

Если эта последовательность имеет конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \tag{9.3}$$

то этот предел называется *суммой ряда*, а сам ряд называется *сходящимся*.

Если же предел частичных сумм не существует или равен $\infty$, то говорят, что ряд суммы не имеет и его называют *расходящимся*.

*Основные задачи теории числовых рядов*:

1) установить, будет ли данный ряд сходящимся или расходящимся (проверка ряда на сходимость);

2) найти сумму сходящегося ряда (суммирование ряда).

Иногда сумму ряда можно вычислить непосредственно, исходя из определения. Рассмотрим примеры.

***Пример 9.1.*** Исследовать ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0.$

*Решение.* Рассмотрим частичную сумму: $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$. Умножим обе части этого равенства на $q$, а затем вычтем одно равенство из другого:

$$S_n q = aq + aq^2 + \ldots + aq^n, \quad S_n - S_n q = a - aq^n.$$

Отсюда находим $S_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$. При нахождении $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ рассмотрим случаи.

1) Пусть $|q| < 1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, поэтому ряд сходится и его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$.

2) Пусть $|q| > 1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty, \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд расходится.

3) При $q = 1$ имеем $S_n = an$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд расходится.

4) При $q = -1$ последовательность частичных сумм имеет вид $a, 0, a, 0, \ldots$ Такая последовательность предела не имеет, поэтому ряд расходится.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и при этом его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$, а при $|q| \geq 1$ данный ряд расходится.

***Пример 9. 2.*** Исследовать ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

*Решение.* Вначале разложим правильную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}\Rightarrow A(n+1)+Bn\equiv 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)n+A\equiv 1\Rightarrow A+B=0,\ A=1\Rightarrow A=1,\ B=-1.$$

Итак, $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

Частичную сумму можно представить так:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Заметив, что все слагаемые, кроме первого и последнего, сокращаются, получим $S_n=1-\dfrac{1}{n+1}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$, поэтому ряд сходится и его сумма равна $1$.

Рассмотрим основные *свойства рядов.*

<u>*Свойство 1.*</u> *Если ряд с общим членом $a_n$ сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0. \tag{9.4}$$

Этот результат называется *необходимым признаком сходимости* ряда, так как если ряд сходится, то указанный результат обязательно имеет место.

Очевидно, что *при нарушении условия (9.4) соответствующий ряд обязательно будет расходящимся*.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+2}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2}=1\neq 0$; также расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Условию (9.4) удовлетворяют не только сходящиеся ряды, но и некоторые расходящиеся ряды. Если равенство (9.4) выполняется, то соответствующий ряд не обязательно будет сходящимся, он может оказаться и расходящимся. Поэтому условие (9.4) не является достаточным условием сходимости ряда.

<u>***Пример 9.3.***</u> Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

*Решение.* Частичная сумма $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geq n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$. Из теории пределов следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$. Следовательно, рассматриваемый ряд расходящийся, хотя условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ выполнено.

*<u>Свойство 2.</u> Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна $S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$, где $c$ – произвольное число, также сходится и его сумма равна $cS$.*

Очевидно, что если исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходящийся, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ будет расходиться при $c \neq 0$.

*<u>Свойство 3.</u> Если сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, а их суммы равны $S^{(a)}$ и $S^{(b)}$ соответственно, то сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \pm b_n\right)$, причём сумма каждого равна $S^{(a)} \pm S^{(b)}$ соответственно.*

*<u>Замечания.</u>* 1) Нетрудно убедиться, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд, а сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

2) Сходимость ряда не зависит от первых членов, а определяется поведением слагаемых $a_n$ при $n \to \infty$. Изучая сходимость ряда, можно номер $n$ брать любым натуральным числом.

## 2. <u>Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов</u>

Рассмотрим некоторые достаточные условия сходимости *знакоположительных рядов*, т. е. рядов с неотрицательными членами.

Поведение частичной суммы $S_n$ знакоположительного ряда особенно простое: $S_n$ монотонно возрастает при возрастании $n$, так как при возрастании $n$ каждый новый член ряда, попадающий в $S_n$, положителен. Если такая последовательность $S_n$ ограничена сверху, то, как следует из теории пределов, будет существовать конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и, следовательно, ряд будет сходиться.

Таким образом, для установления сходимости знакоположительного ряда достаточно установить ограниченность сверху всех его частичных сумм. Этот результат и является *общим достаточным критерием сходимости знакоположительных рядов*.

Если же последовательность частичных сумм не ограничена сверху, то ряд будет расходиться.

На практике более удобными критериями сходимости являются так называемые *достаточные признаки сходимости*. Ограничимся формулировкой основных таких признаков: *интегрального признака; двух признаков, основанных на сравнении рядов; признака Даламбера и признака Коши*.

**2.1. *Интегральный признак.***

*Пусть дан знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, члены которого являются значениями некоторой функции* $f(x)$ *при* $x = n$*, т. е.* $a_n = f(n)$*, где* $f(x)$ *– положительная, непрерывная и монотонно убывающая функция на* $[1; +\infty)$*. Тогда, если несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*; если же* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *также расходится.*

Напомним, что несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если существует конечный предел $\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_1^{a} f(x)dx.$

***<u>Пример 9.4.</u>*** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

*Решение.* Применим интегральный признак. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}$. Имеем $f(n) = a_n$. При возрастании $x$ оба сомножителя в знаменателе функции $f(x)$ монотонно возрастают, поэтому $f(x)$ монотонно убывает. Далее, $\forall x \in [2, +\infty)$ $f(x) > 0$. Вычислим интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_2^{a}\left(\ln x\right)^{-3} d\left(\ln x\right) = \lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_2^a =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2 2}-\frac{1}{2\ln^2 a}\right) = \frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Итак, несобственный интеграл сходится, поэтому, согласно интегральному признаку, данный ряд сходится.

Рассмотрим применение интегрального признака сходимости для ряда

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

*(ряд Дирихле или обобщённый гармонический ряд).*

Возьмём в качестве функции $f(x)$ функцию $\frac{1}{x^p}$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы при $p > 0$ на $[1; +\infty)$. Рассмотрим

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\lim\limits_{a\to+\infty}\left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^a & \text{при } p\neq 1\\ \lim\limits_{a\to+\infty}\ln x\Big|_1^a & \text{при } p=1\end{cases}.$$

В случае $p > 1$ будет $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$, т. е. интеграл сходится и, следовательно, исходный ряд сходится.

В случае $0 < p \le 1$ интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ расходится и ряд будет также расходиться.

Заметим, что при $p \le 0$ интегральным признаком воспользоваться нельзя, но расходимость ряда следует из того, что его общий член в этом случае не стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. нарушается необходимое условие сходимости ряда.

*<u>Вывод</u>: ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *при* $p > 1$ *сходится, а при* $p \le 1$ *расходится.*

В частности, при $p = 2$ получается сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; при $p = 1$ – расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *(гармонический ряд)*; при $p = 0,5$ – расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

**2.2.** ***Признаки сравнения рядов.***

<u>*Первый признак сравнения*</u> *(или признак мажорации).*

*Пусть даны два ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *и, начиная с некоторого номера* $n$*, вы-*

*полняется неравенство* $0 \le a_n \le b_n$. *Тогда из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *(с большими членами) следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(с меньшими членами). А из расходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

***Пример 9.5.*** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

*Решение.* Покажем вначале, что $\ln n < n$ или $\ln n - n < 0$ при $n > 1$. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = \ln x - x,\ x \in [2, +\infty)$.

Так как $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$ при $x \in [2, +\infty)$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[2, +\infty)$. Но $f(2) = \ln 2 - 2 < 0$, поэтому $f(x) < 0$ при $x \ge 2$. Итак, $\ln x < x$ при $x \in [2, +\infty)$. Из неравенства $0 < \ln n < n$ следует неравенство $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Так как гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то будет расходиться и ряд с большими членами $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

<u>*Второй признак сравнения*</u> *(или предельный признак сравнения).*

*Пусть даны два знакоположительных ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \ne 0$, *то оба рассматриваемых ряда сходятся или расходятся одновременно.*

Для того чтобы пользоваться признаками сравнения, нужно иметь набор рядов, про которые заранее известно, сходятся они или расходятся. Обычно в роли таких эталонных рядов используют ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ или ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, члены которого образуют геометрическую прогрессию.

Так, например, если у ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ общий член $a_n$ является бесконечно малой величиной (б. м.) при $n \to \infty$, т. е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (напомним, что если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится) и удаётся определить его порядок малости $p$, то следует этот ряд сравнивать с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Это следует из того, что условие $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0, \neq \infty$ равносильно тому, что две б. м. $a_n$ и $b_n$ при $n \to \infty$ имеют одинаковый порядок малости (в частном случае, при $A = 1$, эквивалентны).

*Вывод*: *знакоположительные ряды, у которых общие члены являются б. м. одинакового порядка малости при* $n \to \infty$ *(в частности, эквивалентные) одновременно сходятся или расходятся. Если этот порядок малости* $p > 1$, *то такие ряды будут сходящимися, иначе расходящимися.*

***Пример 9.6.*** Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - n + 3}{n^3 + \sqrt{n} + 2}$.

*Решение.* 1) Заметим, что $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ является б. м. при $n \to \infty$, эквивалентной б. м. $\frac{1}{n^2}$ второго порядка малости, так как $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \neq \infty.$

Сравнивая исходный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, получим, что исходный ряд также сходится.

2) У общего члена ряда числитель и знаменатель дроби являются б. б. величинами соответственно 2-го и 3-го порядка роста при $n \to \infty$, поэтому $a_n$ – б. м. 1-го порядка малости при $n\to\infty$. Действительно, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = \frac{\left(2n^2 - n + 3\right)n}{n^3 + \sqrt{n} + 2} = 2 \neq 0$.

Так как исходный ряд и расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ имеют общие члены одинакового порядка малости, то и исходный ряд расходится.

**2.3.** ***Признак Даламбера.***

*Если для знакоположительного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, *то при* $r < 1$ *ряд сходится, при* $r > 1$ *ряд расходится, а при* $r = 1$ *никакого вывода о сходимости или расходимости ряда делать нельзя. В этом случае нужно пользоваться другими признаками.*

Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$ – *факториал* натурального числа $n$, или $c^n$ – показательную функцию аргумента $n$.

***Пример 9.7.*** Исследовать на сходимость ряды

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5^n}$;  2) $\frac{5}{3} + \frac{5\cdot 8}{3\cdot 5} + \frac{5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + ...$

*Решение.* 1) Воспользуемся признаком Даламбера. В данном случае

$$a_n = \frac{3n-1}{5^n}, \quad a_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{5^{n+1}} = \frac{3n+2}{5^{n+1}}.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5(3n-1)} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{5} < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

2) Определим вначале вид общего члена ряда $a_n$. Так как $a_1 = \frac{5}{3}$, $a_2 = \frac{5\cdot 8}{3\cdot 5}$, $a_3 = \frac{5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 5\cdot 7}, ...$, замечаем, что $a_n$ представляет собою дробь, в числителе и знаменателе которой будет $n$ сомножителей, являющихся членами арифметической прогрессии $b_n$ (для числителя разность $d$ равна $3$, для знаменателя $2$). Используя формулу общего члена арифметической прогрессии $b_n = b_1 + d(n-1)$, получим

$$a_n = \frac{5\cdot 8\cdot 11\cdot ...\cdot\left[5+3(n-1)\right]}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot\left[3+2(n-1)\right]} = \frac{5\cdot 8\cdot 11\cdot ...\cdot(3n+2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2n+1)}.$$

Видно, что

$$a_{n+1} = a_n \frac{3(n+1)+2}{2(n+1)+1} = a_n \frac{3n+5}{2n+3} \text{ или } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+5}{2n+3}.$$

Вычисляем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{3}{2}>1.$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

**2.4.** ***Признак Коши.***

*Если для знакоположительного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$*, то при* $r<1$ *ряд сходится, при* $r>1$ *– расходится, а при* $r=1$ *вопрос о сходимости остаётся открытым.*

**Пример 9.8.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

*Решение.* Используем признак Коши. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}}=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{3}{e}>1.$$

Ряд расходится.

## 3. Знакочередующиеся ряды

Рассмотрим ряды, положительные и отрицательные члены которых следуют друг за другом поочерёдно. Такие ряды называются *знакочередующимися рядами.*

Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \text{ или}$$

$$-a_1+a_2-a_3+a_4-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n,$$

где $a_n>0\ (n=1,2,\ldots)$. Например, ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

является знакочередующимся рядом.

Для знакочередующихся рядов имеется простой и удобный в применении *достаточный признак сходимости Лейбница.*

*Если члены знакочередующегося ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ , $a_n > 0$ *удовлетворяют двум условиям:*

*1) последовательность* $\{a_n\}$ *монотонно убывает (т. е.* $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ *);*

*2) общий член ряда стремится к нулю (т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *),*

*то данный ряд сходится. При этом* $|S - S_n| < a_{n+1}$ *, где* $S$ *и* $S_n$ *соответственно сумма и* $n$*-я частичная сумма данного ряда.*

Итак, ошибка, которая получится, если заменить сумму $S$ сходящегося знакочередующегося ряда его частичной суммой $S_n$ (т. е. отбросить все члены ряда, начиная с $a_{n+1}$) не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов, т. е. $a_{n+1}$.

***<u>Пример 9.9.</u>*** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+5}$ .

*Решение.* Проверим условия признака Лейбница для данного знакочередующегося ряда. При возрастании $n$ знаменатель дроби $a_n = \frac{1}{n+5}$ возрастает, поэтому $a_n$ убывает. В этом можно также убедиться, вычислив производную от $a_n$ , считая $n$ непрерывной переменной. Так как $\left(\frac{1}{n+5}\right)' = -\frac{1}{(n+5)^2} < 0$ , то при возрастании $n$ выражение $a_n = \frac{1}{n+5}$ убывает. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+5} = 0$ . Итак, ряд сходится.

Сумма первых $n$ членов этого ряда $S_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+5}$ отличается от суммы ряда $S$ по абсолютной величине меньше, чем на $\frac{1}{n+6}$ .

Знакочередующийся ряд является частным случаем *знакопеременного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , который содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов, сменяющих друг друга по некоторому закону.

Сформулируем <u>*достаточный признак сходимости знакопеременных рядов,*</u> который, конечно, будет справедлив и для частного случая – знакочередующихся рядов.

*Пусть дан знакопеременный ряд* $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *. Если сходится ряд* $|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и знакопеременный ряд.*

Заметим, что рассмотренный признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым, так как существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из модулей их членов, расходятся.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, согласно признаку Лейбница, сходится (легко проверить, что $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, ...$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, составленный из модулей его членов, расходится (гармонический ряд).

Таким образом, все сходящиеся ряды можно разделить на два вида:

1) *абсолютно сходящиеся* (когда также сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда);

2) *не абсолютно (условно) сходящиеся* (когда данный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей членов данного ряда, расходится).

***Пример 9.10.*** Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(-3)^n}$;  2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$.

*Решение.* Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$, составленный из модулей членов исходного ряда. Для этого знакоположительного ряда воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3^{n+1}} : \frac{n+2}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)\cdot 3^n}{(n+2)\cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Отсюда, в силу признака Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3^n}$ сходится, а, значит, исходный ряд сходится абсолютно.

2) Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$.

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, пользуясь предельным признаком сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}=1\neq 0.$$

Отсюда, так как гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ расходится, т. е. исходный ряд абсолютно не сходится.

Проверим ряд на условную сходимость. Считая $n$ непрерывной переменной, вычислим

$$\left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)'=\frac{2n\left(n^3+1\right)-n^2\cdot 3n^2}{\left(n^3+1\right)^2}=\frac{n\left(2-n^3\right)}{\left(n^3+1\right)^2}<0 \text{ при } n\geq 2.$$

Следовательно, при возрастании $n$ выражение $\frac{n^2}{n^3+1}$ убывает. Кроме того, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}=0$. Поэтому, так как исходный ряд – знакочередующийся, то, согласно признаку Лейбница, исходный ряд сходится. Поскольку данный ряд абсолютно не сходится, то сходимость условная.

В заключение отметим (без доказательства) некоторые *свойства абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов.*

1. Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от перестановок его членов.

2. Если ряд сходится условно, то можно так переставить члены этого ряда, что сумма его окажется равной любому числу, в том числе и бесконечности, т. е. ряд окажется расходящимся.

3. Сумма (разность) двух абсолютно сходящихся рядов с суммами $\boldsymbol{S}^{(1)}$ и $\boldsymbol{S}^{(2)}$ есть абсолютный сходящийся ряд с суммой $\boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)}$ $(\boldsymbol{S}^{(1)} - \boldsymbol{S}^{(2)})$.

Итак, абсолютно сходящиеся ряды обладают свойствами конечных сумм, а условно сходящиеся ряды в общем случае такими свойствами не обладают.

## 4. Степенные ряды

### 4.1. *Интервал и радиус сходимости.*

*Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad . \quad (9.5)$$

Здесь $x$ – действительная переменная. Числа $a_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ называются *коэффициентами ряда*. В дальнейшем ограничимся случаем, когда все $a_n$ и величина $x_0$ – действительные числа. Степенной ряд (9.5) называют также *рядом по степеням разности* $x - x_0$.

Если $x_0 = 0$, то получим степенной ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad , \qquad (9.6)$$

который называют *рядом по степеням* $x$.

Степенной ряд (9.5) приводится к виду (9.6) с помощью простого преобразования $x - x_0 = t$ (перенос начала на числовой оси). В силу этого теория степенных рядов (9.5) и (9.6) общая. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением основных свойств рядов вида (9.6).

При рассмотрении степенных рядов основным вопросом является определение их *области сходимости*, т. е. множества тех значений $x$, при которых ряд сходится.

Эта задача решается на базе <u>*теоремы Абеля*</u>.

*Если степенной ряд (9.6) сходится при некотором значении* $x = x_1 \neq 0$, *то он абсолютно сходится при всех значениях* $x$, *удовлетворяющих неравенству* $|x| < |x_1|$.

*Если же ряд расходится при некотором значении* $x = x_2$, *то он расходится и при всех* $x$, *удовлетворяющих неравенству* $|x| > |x_2|$.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда (9.6).

Действительно, если $x_1$ – точка сходимости, то весь интервал $(-|x_1|, |x_1|)$ заполнен точками абсолютной сходимости.

Если $x_2$ – точка расходимости, то интервалы $(-\infty, -|x_2|)$ и $(|x_2|, +\infty)$ состоят из точек расходимости.

Из этого можно заключить, что существует такое число $R$, что при $|x| < R$ степенной ряд абсолютно сходится, а при $|x| > R$ – расходится.

Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (9.6). Число $R$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Отметим, что интервал сходимости некоторых рядов представляет собой всю числовую прямую (в этом случае $R = \infty$), у других вырождается в одну точку (случай $R = 0$). При $x = \pm R$, т. е. на концах интервала сходимости, ряд может сходиться абсолютно, условно или расходиться. Для выяснения поведения ряда в концевых точках необходимо в выражение для ряда подставить вместо $x$ значения $\pm R$ и получившиеся два числовых ряда исследовать на сходимость. Этот вопрос решается для каждого конкретного ряда индивидуально.

В применении к степенным рядам вида (9.5) полученные результаты видоизменяются только в том, что центр сходимости находится в точке $x = x_0$, а не в точке $x = 0$, т. е. интервал сходимости степенного ряда (9.5) симметричен относительно точки $x = x_0$ и представляет собой интервал $x_0 - R < x < x_0 + R$.

Заметим, что для нахождения интервала сходимости степенного ряда (9.6) можно исследовать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right| , \tag{9.7}$$

составленный из модулей членов данного ряда, так как интервалы сходимости этих рядов совпадают.

Для определения сходимости ряда (9.7), члены которого положительны, обычно применяют признаки сходимости Даламбера или Коши.

Допустим, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot A$.

Тогда по признаку Даламбера ряд (9.7) сходится при $|x| \cdot A < 1$, т. е. если $|x| < \dfrac{1}{A}$, и расходится при $|x| \cdot A > 1$, т. е. если $|x| > \dfrac{1}{A}$. Таким образом, данный ряд сходится внутри интервала $\left(-\dfrac{1}{A}, \dfrac{1}{A}\right)$ и расходится вне его, т. е. радиус сходимости равен $R = \dfrac{1}{A} = \lim\limits_{x\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

<u>*Замечания.*</u>

1) Если $A = 0$, то исходный ряд абсолютно сходится при всех числовых значениях $x$, так как при этом имеем $|x|\cdot A = 0 < 1$ для любого $x$. В этом случае радиус сходимости $R = \infty$.

2) Если $A = \infty$, то исходный ряд сходится в единственной точке $x = 0$. Ранее было принято, что в этом случае $R = 0$.

3) Аналогично, для определения интервала сходимости можно пользоваться признаком Коши, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. В этом случае $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

4) Интервал сходимости можно находить, используя непосредственно признаки Даламбера или Коши.

**_Пример 9.11._** Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{n} x^n$.

*Решение.* Здесь $a_n = (-1)^n \frac{3^n}{n}$, $a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{3^{n+1}}{n+1}$.

Поэтому

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Итак, интервал $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ является интервалом сходимости заданного ряда.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -\frac{1}{3}$ ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, он расходится.

При $x = \frac{1}{3}$ ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Этот знакочередующийся ряд сходится условно, так как легко проверить, что выполняются условия признака Лейбница, а ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Итак, при $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ ряд сходится абсолютно, при $x = \frac{1}{3}$ ряд сходится условно, во всех других точках ряд расходится.

**_Пример 9.12._** Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (x+1)^n$.

*Решение.* Воспользуемся признаком Коши. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n (x+1)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|n^n (x+1)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} n\cdot|x+1| = \begin{cases} 0, & \text{если } x = -1 \\ \infty, & \text{если } x \neq -1 \end{cases}.$$

Отсюда, ряд абсолютно сходится только при $x = -1$, а во всех других точках числовой оси ряд расходится. Радиус сходимости $R = 0$.

***Пример 9.13.*** Найти интервал сходимости ряда

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

*Решение.* Применим признак Даламбера. Имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно при всех $x$.

### 4.2. *Свойства степенных рядов.*

Сформулируем без доказательства основные свойства степенных рядов.

1. *Сумма* $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *степенного ряда является непрерывной функцией на интервале сходимости.*

2. *Степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости, при этом* $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$.

3. *Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом промежутке* $[a,b]$*, расположенном внутри интервала сходимости, при этом*

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b.$$

Ряды, полученные при дифференцировании и интегрировании, имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

## 5. Разложение функций в степенные ряды

### 5.1. *Ряды Тейлора и Маклорена.*

В пособии [1] (модуль 10, пункт 10.3) была рассмотрена так называемая формула Тейлора. Напомним эту формулу.

*Формула Тейлора* для любой функции $f(x)$, определённой в окрестности точки $x_0$ и имеющей в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, имеет вид

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \quad (9.8)$$

где $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – её остаточный член в форме Лагранжа. Точка $c$ располагается между $x$ и $x_0$.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков (говорят, что *функция бесконечно дифференцируема*) в окрестности точки $x_0$, то в формуле Тейлора число $n$ можно взять сколь угодно большим. В этом случае можно записать степенной ряд вида

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (9.9)$$

который называют *рядом Тейлора функции* $f(x)$ *по степеням* $(x-x_0)$, или что то же, в окрестности точки $x_0$. Здесь считается, что $f^{(0)}(x_0)=f(x_0),\quad 0!=1$.

Важно знать, при каких условиях этот ряд сходится и его сумма будет равна данной функции $f(x)$, так как он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции $f(x)$. Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

*Для того, чтобы ряд Тейлора (9.9) функции* $f(x)$ *сходился к* $f(x)$ *в точке* $x$, *необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора (9.8) стремился к нулю при* $n\to\infty$.

В этом случае говорят, что *функция* $f(x)$ *разлагается в степенной ряд Тейлора* и будет справедливо равенство:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (9.10)$$

Если в формуле (9.10) положить $x_0=0$, то получим разложение функции по степеням $x$ (*разложение в ряд Маклорена*):

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (9.11)$$

Приведём разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций и укажем интервалы сходимости этих рядов.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,\infty); \qquad (9.12)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,\infty); \qquad (9.13)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,\infty); \qquad (9.14)$$

$$(1+x)^a=1+\frac{a}{1!}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad x\in(-1,1); \qquad (9.15)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+..., \quad x\in(-1,1); \tag{9.15'}$$

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+..., \qquad x\in(-1,1]; \tag{9.16}$$

$$arcsin\,x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2!2^2\cdot 5}x^5+...+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1}+..., \quad x\in[-1,1]; \tag{9.17}$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+..., \qquad x\in[-1,1]. \tag{9.18}$$

Разложение (9.15$'$) – это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Отметим, что это разложение может быть получено из *биномиального разложения* (9.15) при $a=-1$, если заменить $x$ на ($-x$).

Разложения (9.12) – (9.18) называют *стандартными разложениями* и они могут быть использованы при разложении некоторых других функций в ряд Маклорена или Тейлора, если использовать правила сложения, вычитания, умножения, дифференцирования, интегрирования степенных рядов (см. свойства степенных рядов).

***Пример 9.14.*** Разложить функцию $f(x) = ln(1 + 3x + 2x^2)$ в ряд Маклорена.

*Решение.* Преобразуем данную функцию:

$$ln(1+3x+2x^2)=ln\left[(1+x)(1+2x)\right]=ln(1+x)+ln(1+2x).$$

Выпишем ряды Маклорена для полученных слагаемых функций, используя разложение (9.16):

$$ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1<x\le 1;$$

$$ln(1+2x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{n+1}, \quad -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}.$$

Здесь второй ряд получен из первого путём замены $x$ на $2x$. Складывая эти ряды почленно, имеем

$$ln(1+3x+2x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+2^{n+1})\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}.$$

***Пример 9.15.*** Разложить функцию $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$ в ряд Маклорена.

*Решение.* Запишем функцию в следующем виде: $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\left(1-\dfrac{5}{4}x\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Для разложения функции $\left(1-\frac{5}{4}x\right)^{-\frac{1}{2}}$ воспользуемся рядом (9.15) при $a=-\frac{1}{2}$, заменив $x$ на $\left(-\frac{5}{4}x\right)$:

$$\left(1-\frac{5}{4}x\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}x\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{5}{4}x\right)^2+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(-\frac{5}{4}x\right)^3+\ldots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{5}{4}x\right)^n+\ldots=$$

$$=1+\frac{1\cdot 5}{2^3\cdot 1!}x+\frac{1\cdot 3\cdot 5^2}{2^6\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 5^3}{2^9\cdot 3!}x^3+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{3n}\cdot n!}5^n x^n+\ldots.$$

Умножая этот ряд почленно на $\frac{1}{2}x^2$, получим искомый ряд:

$$\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2^4\cdot 1!}5x^3+\frac{1\cdot 3}{2^7\cdot 2!}5^2x^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{3n+1}\cdot n!}5^n x^{n+2}+\ldots=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{3n+1}n!}5^n x^{n+2}.$$

Здесь использовано сокращённое обозначение произведения нечётных натуральных чисел $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$. Аналогично записывается сокращённо произведение четных натуральных чисел $2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)=(2n)!!$.

Выясним, при каких значениях $x$ справедливо полученное разложение. Так как ряд (9.15) сходится при $|x|<1$, а вместо $x$ бралось значение $\left(-\frac{5}{4}x\right)$, то ряд для $\left(1-\frac{5}{4}x\right)^{-\frac{1}{2}}$ будет сходиться при $\left|-\frac{5}{4}x\right|<1$, т. е. при $|x|<\frac{4}{5}$.

### 5.2. *Приложения степенных рядов.*

5.2.1. Приближённое вычисление значений функции.

Разложения функций в ряды Тейлора позволяют во многих случаях вычислять с любой заданной точностью значения этих функций в точках, где эти разложения справедливы.

Наиболее удобно для вычисления приближённых значений функции пользоваться знакочередующимся рядом, так как для знакочередующегося сходящегося ряда легко оценить погрешность при замене суммы ряда на её частичную сумму. Напомним, что в силу теоремы Лейбница, погрешность не превосходит абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Если используемый ряд не является знакочередующимся, то оценка погрешности вычислений проводится с помощью остаточного члена формулы Тейлора.

Приведём примеры применения степенных рядов для приближённых вычислений значений функций.

***Пример 9.16.*** Вычислить с точностью до $0{,}0001$ значение $\sqrt[4]{17}$.

*Решение*. Преобразуем данный корень $\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$. Для приближённого вычисления применим ряд (9.15) при $a=\frac{1}{4}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{4}x+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=1+\frac{x}{4}-\frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!}x^3-\ldots,\qquad |x|<1.$$

Полагая $x=\frac{1}{16}$, получим сходящийся знакочередующийся числовой ряд.

Итак, $$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left[1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 2!16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!16^3}-\ldots\right]=$$

$$=2+\frac{1}{32}-\frac{3}{16^3}+\frac{7}{4\cdot 16^4}-\ldots$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этого знакочередующегося сходящегося ряда для вычисления $\sqrt[4]{17}$ с точностью до $\varepsilon=0{,}0001$, вычислим несколько последовательных первых членов ряда:

$$\frac{1}{32}=0{,}03125>\varepsilon,\quad \frac{3}{16^3}\approx 0{,}00073>\varepsilon,\quad \frac{7}{4\cdot 16^4}\approx 0{,}00003<\varepsilon.$$

Следовательно, $\sqrt[4]{17}\approx 2+0{,}03125-0{,}00073=2{,}03052\approx 2{,}0305.$

Все вычисления проводятся с запасным знаком и только полученный результат округляется до требуемой точности.

***Пример 9.17***. Вычислить с точностью до $\varepsilon = 0{,}00001$ значение $\sqrt[10]{e}$ .

*Решение.* Используя ряд Маклорена (9.12) для функции $e^x$ при $x = 0{,}1$, получим знакоположительный ряд:

$$\sqrt[10]{e} = e^{0,1} = 1 + \frac{0{,}1}{1!} + \frac{0{,}01}{2!} + \frac{0{,}001}{3!} + \ldots .$$

Остаточный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа для функции $e^x$ имеет вид: $r_n(x) = \dfrac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$ , где значение $c$ находится между $0$ и $x$.

При $x = 0{,}1$ и $n = 3$ имеем $r_3 = \dfrac{0{,}0001}{4!} e^c < \varepsilon$ , так как $0 < c < 0{,}1$ и $\dfrac{e^c}{4!} < 0{,}1$.
Поэтому ненаписанные члены в разложении $e^{0,1}$ не повлияют на первые пять знаков после запятой и их можно отбросить.

Итак, $\sqrt[10]{e} \approx 1 + 0{,}1 + 0{,}005 + 0{,}000167 = 1{,}105167 \approx 1{,}10517$ .

5.2.2. Вычисление определённых интегралов.

Некоторые определённые интегралы, важные на практике, не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона – Лейбница, так как не для любой функции существует первообразная, выражаемая через элементарные функции. Такие интегралы можно вычислять с помощью рядов, если подынтегральная функция разлагается в ряд.

Приведём примеры.

***Пример 9.18.*** Вычислить приближённое значение интеграла $\int_0^{1/2} \sqrt{1 + x^3}\, dx$ с точностью до $10^{-4}$, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд.

*Решение.* Воспользуемся биномиальным рядом (9.15), полагая в нём $a = \dfrac{1}{2}$ и заменяя $x$ на $x^3$:

$$\sqrt{1 + x^3} = \left(1 + x^3\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} x^3 - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^6 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} x^9 - \ldots,\ x \in \left(-1, 1\right).$$

Интегрируя почленно в указанных пределах, получим

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 + x^3}\, dx = \left[ x + \frac{x^4}{4 \cdot 2 \cdot 1!} - \frac{x^7}{7 \cdot 2^2 \cdot 2!} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 2^3 \cdot 3!} - \ldots \right] \Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{128} - \frac{1}{7168} + \frac{1}{163840} - \ldots$$

Так как ряд знакочередующийся и четвёртый член меньше $10^{-4}$, то для вычисления искомого приближённого значения интеграла достаточно взять сумму первых трёх членов ряда:

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\,dx \approx 0{,}50000 + 0{,}00781 - 0{,}00014 \approx 0{,}5077 .$$

<u>***Пример 9.19.***</u> Вычислить интеграл $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, имеющий в теории вероятностей важное значение.

*Решение*. Заменив в формуле (9.12) $x$ на $\dfrac{x^2}{2}$, получим разложение подынтегральной функции

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \ldots \quad \forall x \in R .$$

Интегрируя полученный ряд на промежутке $[0; x]$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[ x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2^2\cdot 5\cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)n!} + \ldots \right] \forall x \in R .$$

Для различных значений $x$ достаточно легко с заданной точностью вычислять значения функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{x}{2}}dx$ (*функция Лапласа*). Отметим, что для этой функции составлена таблица её значений, которая приводится во многих справочниках (функция *табулирована*).

5.2.3. Интегрирование дифференциальных уравнений.

Одним из методов интегрирования разнообразных дифференциальных уравнений является представление искомого решения в виде ряда Тейлора. Рассмотрим основные практические приёмы и решения примеров.

Для нахождения ряда, являющегося решением дифференциального уравнения, применяют в основном два метода: метод последовательного дифференцирования и метод неопределённых коэффициентов.

<u>*Метод последовательного дифференцирования*.</u>

Пусть, например, нужно найти решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{9.19}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 . \tag{9.20}$$

Предположим, что искомое решение $y = y(x)$ существует и может быть представлено в виде ряда Тейлора по степеням $x - x_0$

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (9.21)$$

Нужно найти величины $y(x_0),\ y'(x_0),\ y''(x_0),\ \ldots$ . Это можно сделать при помощи самого дифференциального уравнения (9.19) и начальных условий (9.20). Действительно, из (9.20) следует, что $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$, а из (9.19) получим величину $y''(x_0) = F(x_0, y_0, y_0')$. Дифференцируя обе части уравнения (9.19) по $x$ и заменяя $x$ на $x_0$, $y$ на $y(x_0)$, $y'$ на $y'(x_0)$, $y''$ на $y''(x_0)$, можно найти $y'''(x_0)$.

Дифференцируя полученное соотношение ещё раз, можно найти $y^{(4)}(x_0)$ и т. д. Найденные значения $y(x_0),\ y'(x_0),\ y''(x_0),\ \ldots$ подставляем в (9.21). Для тех значений $x$, для которых этот ряд сходится, он представляет искомое решение уравнения.

Недостатком этого метода является то, что не всегда можно получить выражение для $y^{(n)}(x_0)$, а, значит, общий член ряда будет неизвестен и это не позволит указать интервал сходимости данного ряда.

Найденная частичная сумма дает приближённое решение уравнения (9.19) с начальными условиями (9.20) в точках, достаточно близких к $x_0$.

***<u>Пример 9.20.</u>*** Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ задачи Коши: $y'' = x^2 + 2x - e^y,\quad y(1) = 0,\quad y'(1) = 1$.

*Решение.* Искомое решение ищем в виде ряда

$$y = y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots .$$

Из начальных условий находим $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$.

Из данного дифференциального уравнения имеем $y''(1) = 1^2 + 2\cdot 1 - e^0 = 2$.

Дифференцируем последовательно левую и правую части уравнения:

$$y''' = 2x + 2 - e^y y',\quad y^{(4)} = 2 - e^y (y')^2 - e^y y'' = 2 - e^y\left[(y')^2 - y''\right],$$

$$y^{(5)} = -e^y y'\left[(y')^2 - y''\right] - e^y\left[2y'y'' - y'''\right] = -e^y\left[(y')^3 + y'y'' - y'''\right], \ldots$$

Подставляя начальные условия и найденные до этого значения производных при $x = 1$, получим: $y'''(1) = 2,\quad y^{(4)}(1) = 3,\quad y^{(5)}(1) = -1$.

Таким образом, искомое решение запишется в виде:

$$y(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \frac{-1}{5!}(x-1)^5 + \ldots =$$

$$= x - 1 + (x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{8}(x-1)^4 - \frac{1}{120}(x-1)^5 + \ldots$$

Отметим, что при необходимости можно таким же образом продолжить вычисление других членов ряда.

<u>*Метод неопределённых коэффициентов.*</u>

Если дифференциальное уравнение линейное, то удобно искать коэффициенты разложения частного решения по методу неопределённых коэффициентов. Рассмотрим метод на примере уравнения второго порядка

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (9.22)$$

при начальных условиях

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=y'_0. \qquad (9.23)$$

Решение будем искать в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами:

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (9.24)$$

Для определения неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ нужно подставить в дифференциальное уравнение (9.22) вместо $y$ и производных соответствующие степенные ряды, а функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ заменить их разложениями в ряды Маклорена и произвести все необходимые операции над степенными рядами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях полученного уравнения и учитывая начальные условия (9.23), можно определить коэффициенты ряда (9.24), а, значит, и решение дифференциального уравнения.

<u>*Замечание.*</u> Если начальные условия заданы при $x = x_0$, то рекомендуется сделать замену $x-x_0=t$, после чего задача сводится к рассмотренной выше.

<u>***Пример 9.21.***</u> Найти решение дифференциального уравнения $y''=xy$ при начальных условиях $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

*Решение.* Ищем решение задачи Коши в виде ряда (9.24). Коэффициенты $a_0$ и $a_1$ находим из начальных условий: $a_0=y(0)=0$, $a_1=y'(0)=1$.

Дважды дифференцируем ряд:

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение вместо $y$ и $y''$ их разложения, получаем тождество:

$$2a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\ldots+a_{n-3}x^{n-2}+\ldots$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, находим

$$a_2=0, \quad a_3=0, \quad 4\cdot 3a_4=1, \ \ldots, \ n(n-1)a_n=a_{n-3}.$$

Получили рекуррентную формулу $a_n=\dfrac{1}{n(n-1)}a_{n-3}$, позволяющую находить следующие коэффициенты через предыдущие. Вычислим, используя эту формулу, коэффициенты:

$$a_4=\frac{1}{4\cdot 3}\cdot a_1=\frac{1}{4\cdot 3}, \quad a_5=\frac{1}{5\cdot 4}\cdot a_2=0, \quad a_6=\frac{1}{6\cdot 5}\cdot a_3=0, \quad a_7=\frac{1}{7\cdot 6}\cdot a_4=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7},$$

$$a_8=\frac{1}{8\cdot 7}a_5=0, \quad a_9=\frac{1}{9\cdot 8}a_6=0, \quad a_{10}=\frac{1}{10\cdot 9}a_7=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}, \ldots$$

Можно подметить следующую закономерность:

$$a_{3k-1} = a_{3k} = 0, \quad a_{3k+1} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3k(3k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Значит, решение имеет вид:

$$y = x + \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \ldots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3k \cdot (3k+1)}x^{3k+1} + \ldots .$$

Исследуем данный ряд на сходимость, используя признак Даламбера:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{x^{3(k+1)+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3k \cdot (3k+1) \cdot 3(k+1) \cdot [3(k+1)+1]} : \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3k \cdot (3k+1)} \right| =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left| \frac{x^3}{(3k+3)(3k+4)} \right| = 0 \;\; \forall x.$$

Таким образом, ряд сходится на всей оси $Ox$ и, следовательно, представляет искомое решение при всех $x$.

## 6. Ряды Фурье

### 6.1. *Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2\pi$.*

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (9.25)$$

называется *тригонометрическим рядом*. Постоянные числа $a_0$, $a_n$, $b_n$ $(n \in N)$ называются *коэффициентами тригонометрического ряда.* Свободный член ряда записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул.

Отметим, что если ряд (9.25) сходится, то его сумма $S(x)$ будет периодической функцией с периодом $2\pi$, или, короче, $2\pi$ – периодической.

Пусть $2\pi$ – периодическая функция $f(x)$ такова, что она разлагается в тригонометрический ряд, т. е. $f(x)$ является суммой ряда (9.25):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (9.26)$$

В этом случае справедливы формулы:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad (9.27)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{9.28}$$

Числа $a_n$, $b_n$, определяемые по этим формулам, называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (9.26) с такими коэффициентами – *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Сформулируем *теорему Дирихле*, которая даёт достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.

*Пусть функция* $f(x)$ *имеет период* $2\pi$ *и на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *удовлетворяет двум условиям:*

*1)* $f(x)$ *кусочно - монотонна, т. е. монотонна на всём отрезке, или этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков так, что на каждом из них функция монотонна;*

*2)* $f(x)$ *кусочно - непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва 1-го рода.*

*Тогда ряд Фурье для этой функции сходится во всех точках числовой оси. При этом сумма полученного ряда:*

$S(x) = f(x)$, *если* $x$ *– точка непрерывности функции* $f(x)$;

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, \text{ *если* } x \text{ – точка разрыва функции } f(x).$$

*Здесь* $f\left(x-0\right) = \lim\limits_{t \to x-0} f\left(t\right)$, $f\left(x+0\right) = \lim\limits_{t \to x+0} f\left(t\right)$ *– односторонние пределы функции в точке разрыва* $x$.

Условия 1) и 2) в теореме называются *условиями Дирихле*.

Из этой теоремы следует, что класс функций, представимых рядами Фурье, довольно широк. Поэтому ряды Фурье нашли широкое применение как в самой математике, так и в её приложениях к конкретным задачам механики и физики.

Условия Дирихле, накладываемые на функцию при разложении её в ряд Фурье, значительно менее строгие, чем при разложении в степенной ряд. Так, если функция представлена рядом Тейлора, то она во всём интервале сходимости ряда не только непрерывна, но и бесконечное число раз дифференцируема. Для разложения же функции в ряд Фурье этого вовсе не требуется.

***Пример 9.22.*** Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases},$$

удовлетворяющую условию $f(x+2\pi)=f(x)$, т. е. $2\pi$- периодическую (см. рисунок 1).

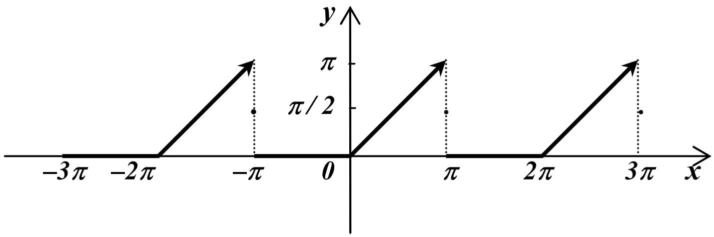


Рисунок 1

*Решение.* Функция $f(x)$ имеет точки разрыва 1-го рода $x_k = (2k+1)\pi,\ k\in Z$. Отметим, что по условию задачи $f(x_k) = 0,\ \ f(x_k - 0) = \pi,\ \ f(x_k + 0) = 0.$ Данная функция удовлетворяет условиям Дирихле. Находим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx = \left\langle \begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos nxdx \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx = \left\langle \begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin nxdx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right] = -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Следовательно, в точках непрерывности

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{\sin 2x}{2} + \left(-\frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

*Следствие*: полагая в этом равенстве $x = 0$, получим результат:

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Рассмотрим <u>*разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций*</u>.

Можно показать, что если функция $\boldsymbol{f(x)}$ интегрируема на симметричном отрезке $\left[-a, a\right]$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f\left(x\right) \text{ - нечётная функция,} \\ 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx, & \text{если } f\left(x\right) \text{ - чётная функция.} \end{cases} \qquad (*)$$

Заметим, что произведение двух чётных или двух нечётных функций – чётная функция, а произведение чётной функции на нечётную – нечётная функция.

Пусть $f(x)$ **–** чётная периодическая функция с периодом $T = 2\pi$, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье. Тогда $f(x)\cos nx$ есть функция чётная, а $f(x)\sin nx$**–** нечётная. Следовательно, используя свойство (*), получим:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = 0 .$$

Таким образом, *ряд Фурье для чётной функции содержит только чётные функции – косинусы* и записывается так:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ , где } a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \; n = 0,1,2,... \qquad (9.29)$$

Рассуждая аналогично, получаем, что если $f(x)$ **–** нечётная периодическая **(**$T = 2\pi$**)** функция, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx .$$

Следовательно, *ряд Фурье для нечётной функции содержит только нечётные функции – синусы* и записывается следующим образом:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ , где } b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \;\; (n = 1,2,...) . \qquad (9.30)$$

<u>***Пример 9.23.***</u> Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases},$$

удовлетворяющую условию $f(x+2\pi)=f(x)$, т. е. $2\pi$ **–** периодическую (см. рисунок 2).

*Решение.* Функция $f(x)$ имеет точки разрыва 1-го рода $x_k = k\pi,\ k \in Z$. Данная функция удовлетворяет условиям Дирихле.

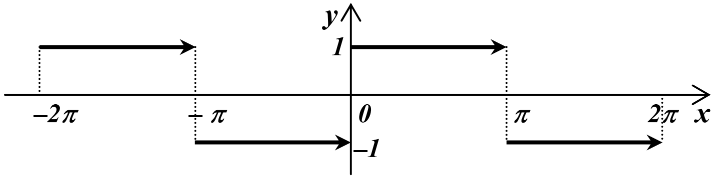


Рисунок 2

Так как заданная функция нечётная (график симметричен относительно начала координат), то разложение будет только по синусам (9.30).

Имеем:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n}\cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{\pi n}\Big[1-(-1)^n\Big].$$

Так как при $n = 2m$ (чётном) $b_{2m} = 0$, а при $n = 2m - 1$ (нечётном) $b_{2m-1} = \frac{4}{\pi(2m-1)}$, то в точках непрерывности

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}\sin(2m-1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right].$$

*Следствие*: полагая $x = \frac{\pi}{2}$, получим важный результат:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \ldots\right), \text{ откуда } \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

### 6.2. *Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода.*

Пусть теперь $f(x)$ **–** периодическая функция периода $T = 2L$ ($L$ – полупериод), удовлетворяющая условиям Дирихле на отрезке $[-L, L]$. В этом случае *ряд Фурье* будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad (9.31)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1,2,\ldots \qquad (9.32)$$

Заметим, что все результаты, которые имели место для рядов Фурье для периодических функций с периодом $T = 2\pi$ сохраняются и для рядов Фурье для периодических функций с произвольным периодом $T = 2L$. В частности, сохранит свою силу достаточный признак разложимости функции в ряд Фурье, а также разложение чётной или нечётной функции в ряд Фурье только по косинусам или синусам соответственно.

***<u>Пример 9.24.</u>*** Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T=2$, которая на отрезке $[-1,1]$ задаётся равенством $f(x) = |x|$ (см. рисунок 3).

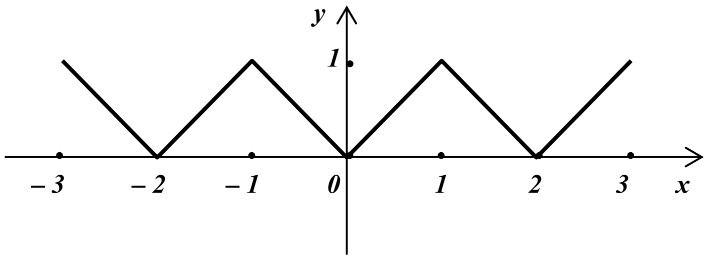


Рисунок 3

*Решение*. Функция $f(x)$ – чётная, непрерывная, удовлетворяет условиям Дирихле, $L=1$. Имеем разложение в ряд Фурье только по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x,$$

где $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = 2\int_0^1 xdx = x^2\Big|_0^1 = 1$,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx =$$

$$= 2\left[\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\Bigg|_0^1 + \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Bigg|_0^1\right] = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

Заметим, что

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n = 2m-1 \end{cases}, \text{ где } m = 1, 2, \ldots$$

Итак, для любых $x$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)\pi x}{(2m-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos\pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \ldots\right].$$

### 6.3. *Разложение в ряд Фурье непериодической функции.*

До сих пор мы рассматривали разложение в ряд Фурье периодической функции. Между тем, чаще всего приходится иметь дело с непериодической функцией.

Если $f(x)$ – непериодическая функция, заданная на всей числовой оси, то такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех $x$.

Однако непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье на любом *конечном* промежутке $[a, b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого данную функцию нужно продолжить на всю числовую прямую так, чтобы получилась периодическая функция с периодом $T = 2L = b - a$ . Её ряд Фурье будет представлять исходную функцию на промежутке $[a, b]$ (кроме точек разрыва). Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются различными функциями.

Коэффициенты Фурье можно вычислять по формулам:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx, \quad n = 0,1,2,..., \\ b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx, \quad n = 1,2,... \end{aligned} \tag{9.33}$$

Рассмотрим важный случай.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, L]$ и удовлетворяет на нем условиям Дирихле. Желая разложить эту функцию на этом отрезке в ряд Фурье, мы можем доопределить её произвольным образом для значений $x$ в промежутке $[-L, 0)$ и получить разложение полученной функции на $[-L, L]$, $T = 2L$.

Произвол в определении функции на промежуток $[-L, 0)$ даёт возможность получить таким путём различные тригонометрические ряды. В частности, если мы доопределим функцию $f(x)$ при $x \in [-L, 0)$ так, чтобы было $f(-x) = f(x)$, то в результате получится чётная функция («*функция продолжена чётным образом*», рисунок 4)).

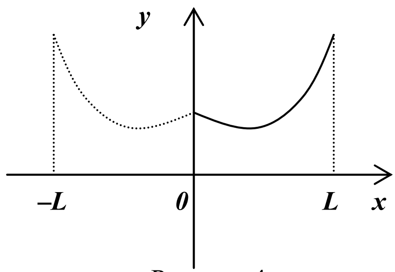

Рисунок 4

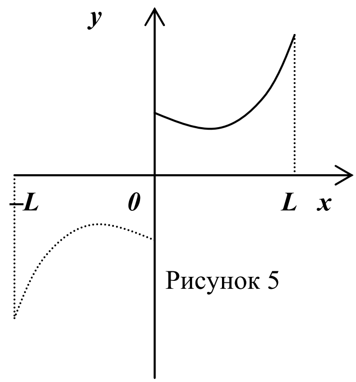

Рисунок 5

Эту функцию можно разложить в ряд Фурье, который будет содержать одни только косинусы. Коэффициенты разложения $a_n$ будут вычисляться только через первоначально заданную функцию $f(x)$:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Если же мы доопределим функцию $f(x)$ при $x \in \left[-L, 0\right)$ так, чтобы было $f(-x) = -f(x)$, то в результате получится нечётная функция («*функция продолжена нечётным образом*», рисунок 5)). Такая функция разлагается в ряд Фурье только по синусам, при этом

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, заданную в промежутке $[0, L]$ функцию при выполнении условий Дирихле оказывается возможным разлагать как в *ряд по косинусам*, так и в *ряд по синусам* (в «неполные» ряды).

Напомним, что эту функцию можно представить и в виде «полного» ряда Фурье. В этом случае можно воспользоваться формулами (9.33) при $a = 0$, $b = L$.

***Пример 9.25.*** Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

разложить: 1) по косинусам; 2) по синусам.

*Решение.* 1) Продолжим чётным образом функцию $f(x)$ на промежуток $[-2, 0)$. Полученную функцию на отрезке $[-2, 2]$ периодически продолжаем для любых $x$
($T = 2L$, $L = 2$, рисунок 6).

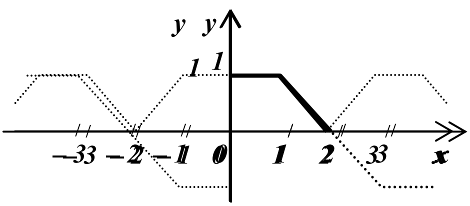

Рисунок 6

Для определения коэффициентов $a_n$ промежуток интегрирования $[0, 2]$ придётся разбить на два: от $0$ до $1$ и от $1$ до $2$, так как функция $f(x)$ задана разными формулами на этих промежутках.

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 1\cdot dx + \int_1^2 (2 - x\right.$$

;

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2 - x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi} sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1 + (2-x)\frac{2}{n\pi} sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2 - \frac{4}{n^2\pi^2} cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{n\pi} sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi} sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\left( cos\, n\pi - cos\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left( cos\frac{n\pi}{2} - cos\, n\pi \right).$$

Ряд Фурье в этом случае:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\left[ cos\frac{\pi x}{2} - \frac{2}{2^2} cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} cos\frac{5\pi x}{2} - \frac{2}{6^2} cos\frac{6\pi x}{2} + \ldots \right].$$

2) Продолжая данную функцию $f(x)$ нечётным образом (см. рисунок 7), находим

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sin\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{2}\left[ \int_0^1 sin\frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x)\, sin\frac{n\pi x}{2} dx \right] =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1 - (2-x)\frac{2}{n\pi} cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2 - \frac{4}{n^2\pi^2} sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2 =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left( cos\frac{n\pi}{2} - 1 \right) + \frac{2}{n\pi} cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} sin\frac{n\pi}{2} =$$

$$= \frac{2}{n\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2} sin\frac{n\pi}{2} = \frac{2}{n\pi}\left( 1 + \frac{2}{n\pi} sin\frac{n\pi}{2} \right).$$

Ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[ \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right) sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\left( 1 - \frac{2}{3\pi} \right) sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{4} sin\frac{4\pi x}{2} + \ldots \right].$$

## Варианты заданий контрольной работы № 9

**9.1.** Исследовать сходимость числового ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{3^n-1} \right)^n$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( 2 + \frac{1}{n} \right)^n$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \frac{7n+1}{2n} \right)^{2n}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+3}}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n10^{1-n}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n\sqrt{n}}{n!}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}$. 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{n!}$. 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{7n+1}{2n-1}\right)^{n}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2}+n}{10n^{2}-1}\right)^{n}$. 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n+1)!}$. 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{2n-1}\,(0,2)^{2-n}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+1}}{(2n+1)!}$. 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{n^{2}+3}\right)^{2n}$. 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(n+1)!}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2^{n}-1}\right)^{3n}$. 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+1}{(n+2)!}$. 21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3-n}}{2n+1}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{10}}$. 23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^{2}}$. 24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{(n+2)!}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n}$. 26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,2^{n}}$. 27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^{n}}}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}n^{2}}{n!}$. 29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$. 30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n}(n+1)}{n!}$.

**9.2.** Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^{2}}x^{n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{n^{2}+1}(x-3)^{n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n}}{n3^{n}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{n}}{n+2^{n}}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{\sqrt{n+1}}(x+1)^{n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n}\sin\frac{1}{n}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^{n}}{e^{n}}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n}(x+3)^{n}}{n+3}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(x+1)^{n}}{n+5}$. 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\frac{x^{n}}{4^{n}}$. 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2nx^{n}}{n^{3}+2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^{2}(x-4)^{n}}{e^{n}}$. 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\left(\frac{1}{n^{2}}\right)x^{n}$. 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n}(x+2)^{n}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \ln(1+\frac{1}{n^2})$.
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+3)5^{n-1}}$.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n (x+1)^n$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{n^2+2n+3}$.
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{(n+1)^2}$.
21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx^n}{n^3+1}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1,5)^n}{2^n+5n}$.
23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{3n+1}$.
24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n (x+2)^n$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n \cdot 2^n}{2^n+n}$.
26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{2^n+n^2}$.
27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+5)^n}{(n^2+1)^2}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$.
29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n x^n$.
30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}(x+1)^n$.

**9.3.** Вычислить определённый интеграл с точностью до $0,001$, разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена и затем проинтегрировав его почленно.

1. $\int\limits_0^{0,1} e^{-5x^2}\, dx$.
2. $\int\limits_0^{0,8} \cos\left(2x^2\right)\, dx$.
3. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$.

4. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt[3]{1+x^2}\, dx$.
5. $\int\limits_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.
6. $\int\limits_0^{0,5} x \,\mathrm{arctg}\, x\, dx$.

7. $\int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
8. $\int\limits_0^{1} \sin\left(x^2\right) dx$.
9. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}\, dx$.

10. $\int\limits_0^{0,5} \mathrm{arctg}\left(x^2\right)\, dx$.
11. $\int\limits_0^{0,5} x \ln\left(1+x^2\right)\, dx$.
12. $\int\limits_0^{1} \cos\left(x^2\right)\, dx$.

13. $\int\limits_0^{0,5} \ln\left(1+x^3\right)\, dx$.
14. $\int\limits_0^{0,8} \sqrt{1+x^3}\, dx$.
15. $\int\limits_0^{0,6} \sin\left(2x^2\right) dx$.

16. $\int\limits_0^{0,8} \frac{dx}{1+x^5}$.
17. $\int\limits_0^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}}\, dx$.
18. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+64}}$.

19. $\int\limits_0^{1} x^2 \sin\left(x^2\right)\, dx$.
20. $\int\limits_0^{0,8} x^2 \ln(1+x) dx$.
21. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.

22. $\int\limits_0^1 x^2\cos\left(x^2\right)dx$.

23. $\int\limits_0^{0,5} \frac{x}{1+x^5}dx$.

24. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+81}}$ .

25. $\int\limits_0^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}}dx$.

26. $\int\limits_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right)dx$.

27. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

28. $\int\limits_0^1 arctg\left(x^3\right)dx$.

29. $\int\limits_0^{0,5} \frac{x^2}{16+x^4}dx$.

30. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

**9.4.** Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ указанной задачи Коши.

1. $y' = e^x + y^2, \quad y(0) = 1.$

2. $y' = 2e^y + y, \quad y(0) = 0.$

3. $y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1.$

4. $y' = \sin x + y^2, \quad y(0) = 1.$

5. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 2$

6. $y' = 2e^y - xy, \quad y(0) = 0.$

7. $y' = x^2 + y^2 - x, \quad y(0) = 3.$

8. $y' = 2xy + y^2 + 1, \quad y(0) = 4.$

9. $y' = 2\cos x - xy^2, \quad y(0) = 1.$

10. $y' = xe^y + y^2, \quad y(0) = 1.$

11. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(0) = 4.$

12. $y' = x\sin x + y^3, \quad y(0) = 1.$

13. $y' = x \cdot arctgx + y^2, \quad y(0) = 2.$

14. $y' = x + y^2, \quad y(0) = 3.$

15. $y' = \ln(1 + x) + y^2, \quad y(0) = 0.$

16. $y' = xy + \cos y, \quad y(0) = 0.$

17. $y' = x^2 + y^2 + 2x, \quad y(0) = -1.$

18. $y' = x^2 - y^2 + 1, \quad y(0) = 2.$

19. $y' = \sqrt{1 + xy}, \quad y(0) = 1.$

20. $y' = \sqrt{x + y^2} + 2, \quad y(0) = 1.$

21. $y' = xy^2 - x - 1, \quad y(0) = 0.$

22. $y' = xy^3 + 3, \quad y(0) = -1.$

23. $y' = x\ln y - e^{-x}, \quad y(0) = 1.$

24. $y' = x\cos x + e^{2y}, \quad y(0) = 0.$

25. $y' = x^2 + y^2 - x, \quad y(0) = 3.$

26. $y' = \left(x^2 + y\right)^2, \quad y(0) = 1.$

27. $y' = \sqrt{2x + y^2}, \quad y(0) = 4.$

28. $y' = x^3 + 2y^2, \quad y(0) = -2.$

29. $y' = e^{-y} - x, \quad y(0) = 0.$

30. $y' = \ln\left(x^2 + y\right) + 1, \quad y(0) = 1.$

**9.5.** Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на указанном промежутке.

**1.** $f(x) = 5 - x$, $[0; 3]$, по синусам.

**2.** $f(x) = 2x - 1$, $[-2; 2]$.

**3.** $f(x) = \begin{cases} 2x\ , & 0 \le x < 1 \\ 2\ , & 1 \le x \le 2 \end{cases}$, по косинусам.

**4.** $f(x) = -3x + 1$, $[-\pi; \pi]$.

**5.** $f(x) = 1 + 2x$, $[0; 2]$, по синусам.

**6.** $f(x) = 1 - x$, $[-0,5; 0,5]$.

**7.** $f(x) = \begin{cases} 2(1 - x)\ , & 0 \le x < 2 \\ -2\ , & 2 \le x \le 3 \end{cases}$, по косинусам.

**8.** $f(x) = 3x$, $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$.

**9.** $f(x) = 4x - 1$, $[0; 1]$, по синусам.

**10.** $f(x) = 9 + 2x$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

**11.** $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0,5(3 - x), & 1 \le x \le 3 \end{cases}$, по косинусам.

**12.** $f(x) = x + 5$, $[-1; 1]$.

**13.** $f(x) = 1 - 3x$, $[0; 4]$, по синусам.

**14.** $f(x) = 9x - 2$, $[-3; 3]$.

**15.** $f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 \le x < 2 \\ 1\ , & 2 \le x \le 4 \end{cases}$, по косинусам.

**16.** $f(x) = -2x$, $[-1; 1]$.

**17.** $f(x) = 2x + 3$, $[0; 0,5]$, по синусам.

**18.** $f(x) = 2x - 3$, $[-4; 4]$.

**19.** $f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \le x < 1 \\ 2(x - 2), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$, по косинусам.

**20.** $f(x) = 4 - 5x$, $[-2; 2]$.

**21.** $f(x) = 2 - 3x$, $[0; 1]$, по синусам.

**22.** $f(x) = 1 - 2x$, $[-2; 2]$.

**23.** $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \le x < 2 \\ 7 - 2x, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$, по косинусам.

**24.** $f(x) = x - 4$, $[-1; 1]$.

**25.** $f(x) = 3 - 2x$, $[0; 2]$, по синусам.

**26.** $f(x) = 2x - 5$, $[-3; 3]$.

**27.** $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 4 - 2x, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$, по косинусам.

**28.** $f(x) = 4 - x$, $[-4; 4]$.

**29.** $f(x) = 3 + 4x$, $[0; 3]$, по синусам.

**30.** $f(x) = 2x + 3$, $[-2; 2]$.

## Раздел 10. ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ФИГУРАМ

Литература: [1, модуль 16]; [3, глава 11,12]; ]; [4, часть 5]; [6, глава 8].

В разделе 7 было рассмотрено понятие определённого интеграла от функции $\boldsymbol{f(x)}$, заданной на отрезке $\boldsymbol{[a,\ b]}$ числовой оси. Изложенная схема построения определённого интеграла на отрезке $\boldsymbol{[a,\ b]}$ (составление интегральных сумм, предельный переход) и его основные свойства могут быть применены для функции, заданной на фигуре. В зависимости от вида фигуры будут получены соответствующие типы определённых интегралов.

### 1. <u>Понятие определённого интеграла по фигуре</u>

#### 1.1 *Фигура. Мера. Плотность массы.*

Будем называть *фигурой* либо плоскую область $\boldsymbol{D}$ (рисунок 1), либо линию $\boldsymbol{L}$ в пространстве или на плоскости (рисунок 2), либо пространственное тело $\boldsymbol{T}$ (рисунок 3), либо поверхность $\boldsymbol{\Sigma}$ в пространстве (рисунок 4).

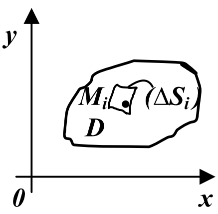


Рисунок 1

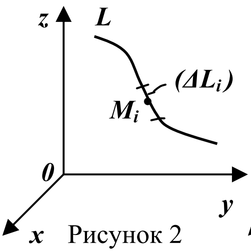


Рисунок 2

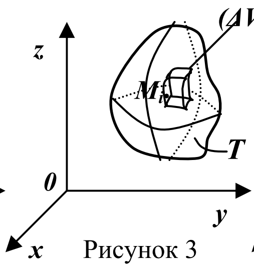


Рисунок 3

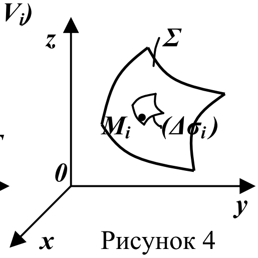


Рисунок 4

Пусть $\boldsymbol{E}$ – общее обозначение всех четырёх рассматриваемых фигур.

*Диаметром* $\boldsymbol{d(E)}$ фигуры $\boldsymbol{E}$ будем называть максимальное из расстояний между двумя точками этой фигуры. В основном будут рассматриваться только фигуры конечного диаметра (*ограниченные фигуры*).

Будем считать, что каждая фигура имеет *меру* $\boldsymbol{S(E)}$ (*площадь* для $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$, *длину* для $\boldsymbol{L}$, *объём* для $\boldsymbol{T}$). Строгие определения для площади, длины, объёма в данном пособии не приводятся.

Во многих механических приложениях каждая рассматриваемая фигура $\boldsymbol{E}$ предполагается *материальной*, т. е. на ней распределена масса вещества с *плотностью* $\boldsymbol{\rho = f(M)}$, где $\boldsymbol{M}$ – любая текущая точка фигуры $\boldsymbol{E}$, а $\boldsymbol{f(M)}$ непрерывная функция.

Если плотность постоянная во всех точках фигуры $\boldsymbol{E}$, т. е. $\boldsymbol{\rho = f(M) = const}$, то фигуру называют *однородной*.

**1.2.** ***Задача о массе фигуры.***

Рассмотрим <u>задачу:</u> *пусть в каждой точке* $\boldsymbol{M}$ *фигуры* $\boldsymbol{E}$ *известна её плотность* $\boldsymbol{\rho = f(M)}$, *нужно найти массу этой фигуры*.

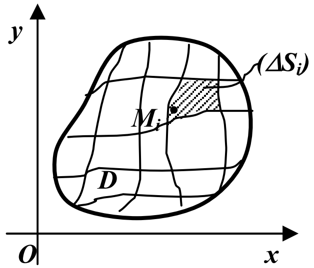

Рисунок 5

Решим эту задачу вначале для случая, когда фигура – плоская область $\boldsymbol{D}$.

Для этого разобьём произвольным образом эту фигуру на $\boldsymbol{n}$ частей: $(\Delta S_1)$, $(\Delta S_2)$, … , $(\Delta S_n)$, где $(\Delta S_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ обозначает $\boldsymbol{i}$ - ю часть разбиения. Площадь этой части будем обозначать $\Delta S_i$ (рисунок 5).

На каждой $\boldsymbol{i}$-й части $(\Delta S_i)$ возьмём произвольную точку $M_i$. Приближённо считаем, что во всех точках части $(\Delta S_i)$ плотность постоянна и равна $f(M_i)$. Тогда для массы $m(D)$ фигуры $\boldsymbol{D}$ получается приближённое равенство

$$m(D) \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i . \qquad (10.1)$$

Написанное приближённое равенство будет тем точнее, чем меньше будут размеры частей $(\Delta S_i)$, на которые разбита фигура $\boldsymbol{D}$. Пусть $d = \max\limits_i d(\Delta S_i)$ – наибольший из диаметров частей, тогда масса фигуры $\boldsymbol{D}$ будет иметь точное выражение

$$m(D) = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i . \qquad (10.1')$$

Для остальных фигур задача о массе решается совершенно аналогично, поэтому решение приведём совсем кратко.

В случае фигуры $\boldsymbol{L}$ (рисунок 2) разбиваем ее на части $(\Delta L_i)$ длиной $\Delta L_i$ $(i = 1, \dots, n)$, выбираем на каждой части $(\Delta L_i)$ произвольно точку $M_i$ и получаем для массы приближенное равенство

$$m(L) \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta L_i \qquad (10.2)$$

и точное равенство

$$m(L) = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta L_i , \qquad (10.2')$$

где $\boldsymbol{d}$ – максимальный из диаметров частей $(\Delta L_i)$.

В случае фигуры $\boldsymbol{T}$ получаем (обозначения ясны из рисунка 3):

$$m(T) \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i , \qquad (10.3)$$

$$m(T)=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i\ . \qquad (10.3')$$

Здесь $d$ – наибольший из диаметров частей $(\Delta V_i)$ с объемом $\Delta V_i$.

В случае фигуры $\Sigma$ поступаем таким же образом (см. рисунок 4):

$$m(\Sigma)\approx\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i\ , \qquad (10.4)$$

$$m(\Sigma)=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i\ , \qquad (10.4')$$

где $d$ – наибольший из диаметров частей $(\Delta\sigma_i)$ площадью $\Delta\sigma_i$.

Итак, чтобы найти массу фигур, нужно вычислить однотипные пределы (10.1′) – (10.4′).

### 1.3. *Интегральная сумма и определённый интеграл по фигуре.*

Отвлечёмся от физического смысла рассмотренной задачи о массе фигуры $E$ и перечислим те математические операции, которые привели к её решению.

Пусть теперь $F(M)$–произвольная функция, заданная в каждой точке $M$ фигуры $E$. Для получения приближённых равенств были проделаны следующие операции:

1) фигура $E$ произвольным образом разбивалась на $n$ частей $(\Delta E_i)$, $i=1,\ldots,n$, мерой $\Delta E_i$ каждая;

2) на каждой части $(\Delta E_i)$ бралась произвольная точка $M_i$ и вычислялось значение функции $f(M_i)$ в этой точке;

3) значение $f(M_i)$ умножалось на меру $\Delta E_i$ соответствующей части $(\Delta E_i)$;

4) составлялась сумма таких произведений.

Полученная в результате перечисленных операций сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta E_i \qquad (10.5)$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(M)$ по фигуре $E$. Для рассматриваемых фигур интегральные суммы записаны в правых частях выражений (10.1) – (10.4).

<u>*Замечание.*</u> При заданном числе $n$ можно составить сколько угодно интегральных сумм, так как можно разными способами разбивать фигуру на части и на каждой части можно произвольным образом выбирать точку $M_i$.

При решении задачи о массе мы делали ещё одну операцию – рассматривали предел интегральной суммы при стремлении к нулю размеров частей, на которые была разбита фигура (при этом, конечно, число частей $n\to\infty$). Важно заметить, что этот предел (в задаче о массе – это масса фигуры) не должен зависеть от способа разбиения и способа выбора точек (т. е. от способа составления интегральной суммы).

*Определённым интегралом* по фигуре $\boldsymbol{E}$ от заданной на ней функции $\boldsymbol{f(M)}$ называется предел интегральной суммы, когда стремится к нулю наибольший из диаметров $\boldsymbol{d}$ частей, на которые разбивается фигура при составлении интегральных сумм. При этом предел не должен зависеть от способа составления интегральной суммы.

Общее обозначение определённого интеграла по фигуре $\boldsymbol{E}$: $\int\limits_E f(M)dE$ .

Итак, по определению

$$\int\limits_E f(M)dE = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta E_i \ . \tag{10.6}$$

<u>*Замечание.*</u> В разделе 7 была рассмотрена фигура – отрезок $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, по которой аналогичным образом ввели понятие определённого интеграла от функции на отрезке (т. е. был рассмотрен частный случай).

Для отдельных рассматриваемых фигур определения, обозначения и названия интегралов следующие:

1) фигура – плоская область $\boldsymbol{D}$:

$$\textit{двойной интеграл} \iint\limits_D f(M)dS = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i ;$$

2) фигура – линия $\boldsymbol{L}$:

$$\textit{криволинейный интеграл} \int\limits_L f(M)dL = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta L_i ;$$

3) фигура – тело $\boldsymbol{T}$:

$$\textit{тройной интеграл} \iiint\limits_T f(M)dV = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i ;$$

4) фигура – поверхность $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\textit{поверхностный интеграл} \iint\limits_\Sigma f(M)d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta \sigma_i .$$

Так же, как и для определённого интеграла на отрезке, $\boldsymbol{f(M)dE}$ называют *подынтегральным выражением*, эта запись напоминает об устройстве интегральных сумм, состоящих из слагаемых $\boldsymbol{f(M_i)\Delta E_i}$.

Иногда бывает удобно условно понимать интеграл $\int\limits_E f(M)dE$ как «сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых вида $\boldsymbol{f(M)dE}$». При таком неточном, упрощённом подходе величину $\boldsymbol{f(M)dE}$ надо понимать как произведение меры $\boldsymbol{dE}$ бесконечно малого элемента фигуры на значение функции $\boldsymbol{f(M)}$ в произвольной точке $\boldsymbol{M}$ этого элемента.

Сформулируем <u>*достаточное условие существования определённого интеграла по фигуре*</u>:

*если функция **f(M)** непрерывна на замкнутой, т. е. включающей границу, и ограниченной фигуре, то интеграл от неё существует*.

В дальнейшем будем предполагать, что функция $\boldsymbol{f}$ и фигура $\boldsymbol{E}$ таковы, что достаточное условие существования интеграла выполнено.

Решение задачи о массе фигуры $\boldsymbol{E}$ было получено в виде

$m(E) = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta E_i$, где $\rho(M) = f(M)$ – функция плотности. Отсюда следует *механический смысл определённого интеграла по фигуре* $\boldsymbol{E}$:

$$\int_E \rho dE = m(E), \tag{10.6'}$$

т. е. определённый интеграл по фигуре от плотности равен массе этой фигуры.

**1.4. *Свойства определённого интеграла по фигуре.***

В главе 7 были рассмотрены свойства определённого интеграла на отрезке $[a, b]$ (по фигуре $[a, b]$). Так как определённые интегралы по другим четырём типам фигур имеют подобное устройство, то ранее рассмотренные свойства будут справедливы для всех других типов интегралов. Сформулируем основные из них.

<u>*Свойство 1*</u> (*о мере фигуры*).

Если функция $\boldsymbol{f(M)}$ тождественно равна единице на фигуре $\boldsymbol{E}$, то интеграл от неё дает меру $\boldsymbol{S(E)}$ этой фигуры:

$$\int_E 1\cdot dE = S(E).$$

Этот результат полезно записать подробно для всех типов интегралов:

$$\iint_D dS = S(D) \text{ – площадь фигуры } D; \tag{10.7}$$

$$\int_L dL = l(L) \text{ – длина линии } L; \tag{10.8}$$

$$\iiint_T dV = V(T) \text{ – объём тела } T; \tag{10.9}$$

$$\iint_\Sigma d\sigma = S(\Sigma) \text{ – площадь поверхности } \Sigma. \tag{10.10}$$

Эти результаты непосредственно следуют из определения интеграла по фигуре, если положить $\boldsymbol{f(M) \equiv 1}$.

*Свойство 2* (*линейность интеграла*).

$$\int_E \left[\alpha_1 f_1(M) + \alpha_2 f_2(M)\right] dE = \alpha_1 \int_E f_1(M)\,dE + \alpha_2 \int_E f_2(M)\,dE\ , \qquad (10.11)$$

где $\alpha_1$ , $\alpha_2$ – произвольные числа, $f_1(M)$, $f_2(M)$ – функции заданные на фигуре $E$.

*Свойство 3* (*аддитивность интеграла*).

$$\int_E f(M)\,dE = \int_{E_1} f(M)\,dE + \int_{E_2} f(M)\,dE\,, \qquad (10.12)$$

где $E = E_1 \cup E_2$ – объединение фигур $E_1$ и $E_2$, причём пересечение $E_1 \cap E_2$ – или пустое множество, или состоит из граничных точек.

*Свойство 4* (*об оценке интеграла*).

Пусть для любой точки $M$ фигуры $E$ справедливо $A \le f(M) \le B$, тогда

$$A \cdot S(E) \le \int_E f(M)\,dE \le B \cdot S(E)\,, \qquad (10.13)$$

где $S(E)$ – мера фигуры $E$.

*Свойство 5* (*о среднем значении функции*).

$$\int_E f(M)\,dE = f(c) \cdot S(E)\,, \qquad (10.14)$$

где точка $c$ – некоторая точка фигуры $E$, $f(c)$ называется *средним значением функции $f$ на фигуре $E$*.

Перейдём к вычислению определённых интегралов по каждой из четырёх фигур. Непосредственное вычисление интегралов, как пределов интегральных сумм, чрезвычайно громоздко и применяется очень редко. Познакомимся с другими методами вычисления.

## 2. Вычисление криволинейного интеграла

Вычисление криволинейного интеграла $\int_L f(M)\,dL$ сводится к вычислению обычного определённого интеграла.

Рассмотрим некоторые случаи (в зависимости от способа задания линии).

1) Пусть линия $L$ на плоскости $Oxy$ задана уравнением $y = \varphi(x),\ x \in [a, b]$.

В этом случае дифференциал $dL$ дуги линии $L$ вычисляется по формуле $dL = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx$ , а $f(M) = f(x, \varphi(x)),$ поэтому подынтегральное выражение $f(M)\,dL = f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx,$ при этом $x \in [a, b]$. Интегрируя этот результат в пределах возможного изменения переменной $x$, получим

$$\int\limits_L f(M)dL = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx. \qquad (10.15)$$

Для строгого доказательства этой формулы нужно убедиться, что интегральные суммы для криволинейного интеграла и для определённого интеграла на отрезке $[a, b]$ одинаковы. В данном пособии это не рассматривается.

Если бы линия $L$ была задана уравнением $x = g(y),\ y \in [c, d]$, то аналогично получили бы:

$$\int\limits_L f(M)dL = \int\limits_c^d f(g(y),y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy. \qquad (10.15')$$

2) Пусть линия $L$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2]$. В этом случае $dL = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$, получим

$$\int\limits_L f(M)dL = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \qquad (10.16)$$

Если линия $L$ пространственная и задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t \in [t_1, t_2]$, то $dL = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$, поэтому,

$$\int\limits_L f(M)dL = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\,. \qquad (10.16')$$

3) Пусть линия $L$ задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. В этом случае $dL = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$, поэтому

$$\int\limits_L f(M)dL = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi. \qquad (10.17)$$

***Пример 10.1.*** Вычислить $\int\limits_L y^2 dL$, где $L$ – часть окружности, заданной параметрическими уравнениями $x = R\cos t,\ \ y = R\sin t,\quad 0 \le t \le \pi/2$.

*Решение.* Воспользуемся формулой (10.16), так как линия $L$ задана параметрически:

$$\int\limits_L y^2 dL = \int\limits_0^{\pi/2} (R\sin t)^2 \cdot \sqrt{[(R\cos t)']^2 + [(R\sin t)']^2}\,dt = R^3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt =$$

$$=\frac{R^3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt=\frac{R^3}{2}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{R^3\pi}{4}.$$

Эта часть окружности может быть задана в декартовых координатах уравнением $y=\sqrt{R^2-x^2}\,,\quad x\in[0,R]$. В этом случае воспользуемся формулой (10.15):

$$\int_L y^2dL=\int_0^R\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\cdot\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)'\right)^2}dx=\int_0^R(R^2-x^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=$$

$$=R\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx.$$

Сделав подстановку $x = R\cos t$, мы придём к только что вычисленному интегралу от $\sin^2 t$.

Эту же часть окружности очень удобно задать в полярных координатах: $r=R,\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Пользуясь формулой (10.17), получим

$$\int_L y^2dL=\int_0^{\pi/2}(R\sin\varphi)^2\sqrt{R^2+(R'_\varphi)^2}d\varphi=R^3\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{R^3\pi}{4}.$$

Итак, из рассмотренных трёх способов задания четверти окружности наиболее удобным для вычисления криволинейного интеграла по ней оказался последний.

### 3. <u>Вычисление двойного интеграла</u>

Покажем, что вычисление двойного интеграла можно свести к последовательному вычислению двух обычных определённых интегралов.

1) Вначале рассмотрим *вычисление двойного интеграла* $\iint_D f(M)dS$ *в декартовой системе координат* $Oxy$.

Найдём, прежде всего, удобное выражение для $dS$. Для этого выберем специальное разбиение области $D$ (разбиение может быть любым!), а, именно, разобьём $D$ на части прямыми, параллельными координатным осям ($x = const, y = const$). В этом случае можно взять $dS = dxdy$ (рисунок 6), а двойной интеграл записать так

$$\iint_D f(M)dS=\iint_D f(x,y)dx\,dy.$$

Пусть область интегрирования $D$ устроена так, как показано на рисунке 7, т. е. $D = \{\, M(x,y):\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ \ a\le x\le b\,\}$, причём каждая прямая, параллельная оси $Oy$ пересекает границу этой области не более чем в двух точках (говорят, что область $D$ *правильная в направлении оси* $Oy$ ).

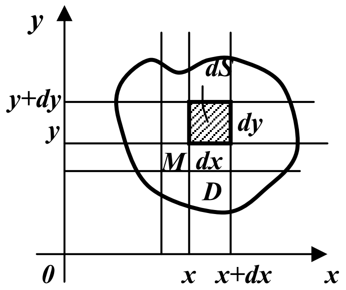


Рисунок 6

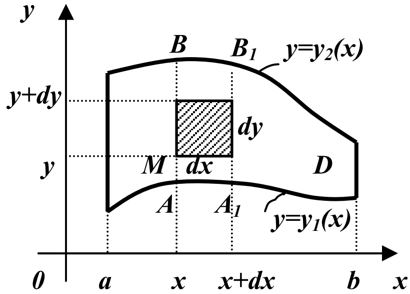


Рисунок 7

Нижнюю из этих точек будем называть *точкой входа* (они лежат на линии $y = y_1(x)$ – *линии входа*), а верхнюю – *точкой выхода* (они лежат на линии $y = y_2(x)$ – *линии выхода*).

Научимся вычислять двойной интеграл по такой области. Пусть, вначале, $f(x,y) > 0$ в области $D$, тогда эту функцию можно понимать как поверхностную плотность распределения массы и двойной интеграл будет давать массу $m(D)$ пластинки $D$. Подсчитаем эту массу теперь по-другому.

Рассмотрим вертикальную полосу $ABB_1A_1$ малой ширины $dx$ (вертикальный стержень) и выделим элемент этого стержня (на рисунке 7 он заштрихован). Площадь этого элемента $dS = dxdy$, а масса приближённо равна $f(x,y)dxdy$ (ввиду малого размера этого элемента плотность во всех его точках можно считать постоянной). Чтобы найти массу этого стержня, надо «просуммировать» массы всех таких элементов, т. е. проинтегрировать по $y$: $\left(\int\limits_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$. (*)

При этом интегрировании $x$ и $dx$ постоянны (не меняются вдоль стержня), поэтому множитель $dx$ вынесен за знак интеграла, а $y$, как видно из рисунка, меняется от значения $y_1(x)$ (на нижней границе) до значения $y_2(x)$ (на верхней границе).

Чтобы получить теперь массу всей пластинки $D$, нужно «просуммировать» массы всех бесконечно узких вертикальных стержней, т. е. проинтегрировать выражение (*) по переменной $x$ в пределах её наибольшего изменения от $a$ до $b$, поэтому получим

$$m(D) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx .$$

Так как эта же масса даётся двойным интегралом, то

$$\iint\limits_D f(M)dS = \iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx . \qquad (10.18)$$

Итак, можно сформулировать *правило вычисления двойного интеграла в декартовых координатах*: вначале надо проинтегрировать функцию $f(x,y)$ по $y$ (при фиксированном $x$) в пределах от точки входа до точки выхода, а затем полученный результат проинтегрировать по $x$ в пределах его наибольшего изменения для области $D$.

Интеграл по $y$, вычисляемый первым (в формуле (10.18) он расположен в скобках), называют *внутренним*, а интеграл по $x$ – *внешним*.

Определённый интеграл от определённого интеграла (*повторный интеграл*), стоящий в правой части равенства (10.18), часто записывают иначе:

$$\int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy.$$

<u>*Замечания*</u>.

1. Правило вычисления двойного интеграла сохраняется и для функции $f(x,y)\le 0$.
2. Если область $D = \{\ M(x,y):\ \ x_1(y) \le x \le x_2(y),\ \ c \le y \le d\ \}$ и является правильной в направлении оси $Ox$ (рисунок 8), то удобнее внутреннее интегрирование вести по $x$. Поменяв в предыдущих рассуждениях местами переменные $x$ и $y$, получим правило

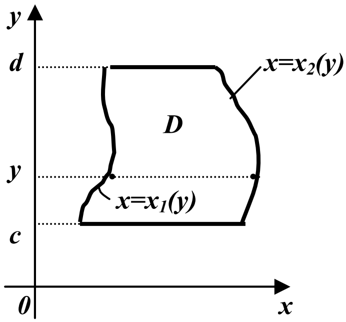

Рисунок 8

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left( \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy =$$

$$= \int_c^d dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y)dx$$

3. Если область $D$ более сложного вида, то прямыми $x = const$ и $y = const$ её следует разбить на области уже рассмотренных видов, а затем применить свойство аддитивности интеграла. Аналогичное разбиение нужно проводить и в случае, если какую-либо линию, определяющую линию входа или линию выхода, т. е. верхний или нижний предел во внутреннем интеграле, нельзя задать одним уравнением.

4. Внешнее интегрирование осуществляется по проекции области $D$ на соответствующую координатную ось.

<u>***Пример 10.2.***</u> Вычислить двойной интеграл $\iint_D \left(x^2 + y\right)dxdy,$ если область $D$ ограничена линиями $y = 2x,\ \ y = 0{,}5x,\ \ xy = 2.$

*Решение.* Решая совместно уравнения прямых $y = 2x$ и $y = 0{,}5x$, найдём точку $O(0;\ 0)$ их пересечения. Прямые с уравнением $y = 2x$ и $y = 0{,}5x$ и гипербола с уравнением $xy = 2$ или $y = \dfrac{2}{x}$ пересекаются соответственно в точках $A(1;\ 2)$ и

***B(2; 1)***. Сделаем рисунок 9.

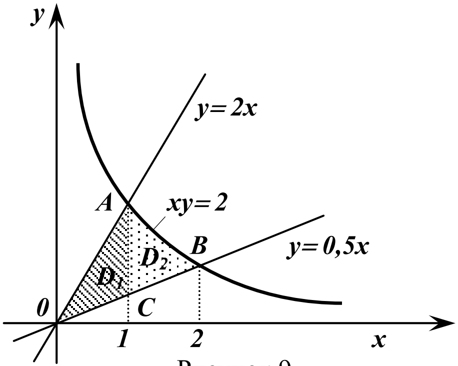

Рисунок 9

Область $D$ ограничена сверху линией $OAB$, которую нельзя задать одним уравнением, поэтому разобьём область $D$ прямой $x = 1$ на две части $D_1$ и $D_2$. Область $D_1$ ограничена снизу линией $y = 0,5x$, сверху – линией $y = 2x$, её проекция на ось $Ox$ есть отрезок $[0;\ 1]$, (т. е. $x \in [0;\ 1]$). Область $D_2$ ограничена снизу линией $y = 0,5x$, сверху – линией $y = \frac{2}{x}$, её проекция на ось $Ox$ – отрезок $[1;\ 2]$.

Пользуемся свойством аддитивности интеграла и применяем формулу (10.18):

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy = \iint\limits_{D_1} \left(x^2 + y\right)dxdy + \iint\limits_{D_2} \left(x^2 + y\right)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_{y=0,5x}^{y=2x} \left(x^2 + y\right)dy \right)dx + \int_1^2 \left( \int_{y=0,5x}^{y=\frac{2}{x}} \left(x^2 + y\right)dy \right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=0,5x}^{y=2x} dx + \int_1^2 \left( x^2 y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=0,5x}^{y=\frac{2}{x}} dx = \int_0^1 \left( \frac{3}{2}x^3 + \frac{15}{8}x^2 \right)dx +$$

$$+ \int_1^2 \left( 2x + \frac{2}{x^2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{8} \right)dx = \left( \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{8}x^3 \right)\Bigg|_0^1 + \left( x^2 - \frac{2}{x} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{24} \right)\Bigg|_1^2 = 2\frac{5}{6}.$$

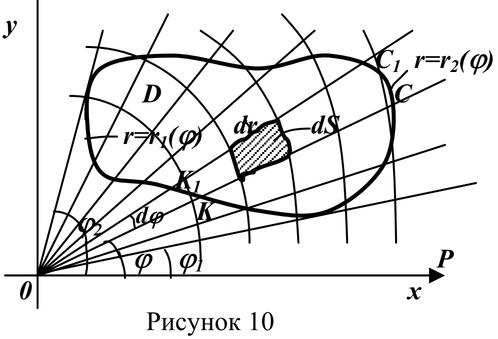

Рисунок 10

2) В некоторых случаях удобнее вычислять двойной интеграл не в прямоугольной системе координат, а в полярной.

Пусть область $D = \{\ M(r,\varphi):\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi),\ \ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \}$ и любой луч, идущий из полюса, пересекает границу области $D$ не более чем в двух точках (*область* $D$ *правильная в направлении полярного луча* ( см. рисунок 10)).

Используя связь между декартовыми и полярными координатами: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, преобразуем функцию $f(x,y)$ в функцию переменных $r$ и $\varphi$:

$$f(x,y) = f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = F(r,\varphi).$$

Получим выражение для $dS$ в полярных координатах. Для этого разобьём область $D$ на части с помощью окружностей $r = const$ и лучей $\varphi = const.$ Возьмём один из получившихся элементов (он на рисунке 10 заштрихован). Можно приближённо принять этот криволинейный четырёхугольник за прямоугольник, стороны которого будут $dr$ и $rd\varphi$. Тогда $dS = rdrd\varphi$ - выражение элемента площади в полярных координатах.

Двойной интеграл примет вид

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D F(r,\varphi)rdrd\varphi.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, будем, как и в предыдущем пункте, трактовать двойной интеграл как массу пластинки $D$ с плотностью $F(r,\varphi)$.

Представим себе фигуру $D$ разбитой на узкие стержни, ограниченные лучами, образующими с полярной осью $OP$ углы $\varphi$ и $\varphi + d\varphi$. Взяв один такой стержень $KCC_1K_1$, выделим на нем элемент, лежащий между концентрическими окружностями радиусов $r$ и $r + dr$. Масса этого элемента приближённо равна $F(r,\varphi)dS = F(r,\varphi)rdrd\varphi.$ Массу всего стержня найдём «суммированием» масс всех таких элементов, т. е. интегрированием по $r$: $\left(\int\limits_{r=r_1(\varphi)}^{r=r_2(\varphi)} F(r,\varphi)rdr\right)d\varphi$.

При этом интегрировании $\varphi$ и $d\varphi$ постоянны. Массу всей пластинки $D$ определим «суммированием» масс всех стержней, т. е. интегрированием по $\varphi$:

$$m(D) = \iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int\limits_{r=r_1(\varphi)}^{r=r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr\right)d\varphi. \quad (10.19)$$

Итак, *правило вычисления двойного интеграла в полярных координатах*: вначале надо проинтегрировать функцию $f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r$ по переменной $r$ при произвольном, но фиксированном $\varphi$ в пределах от точки входа ($r = r_1(\varphi)$) до точки выхода ($r = r_2(\varphi)$), а затем полученный результат проинтегрировать по $\varphi$ в пределах его наибольшего изменения для области $D$.

*Замечание*.

Если область $D$ ограничена замкнутой линией $r = r(\varphi)$, а полюс $O$ лежит внутри этой области, то $\varphi$ будет изменяться от $0$ до $2\pi$, а $r$ от $0$ до $r(\varphi)$.

**Пример 10.3**. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если область $D$ ограничена линиями $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 2y$ (вне окружности $x^2 + y^2 = 1$).

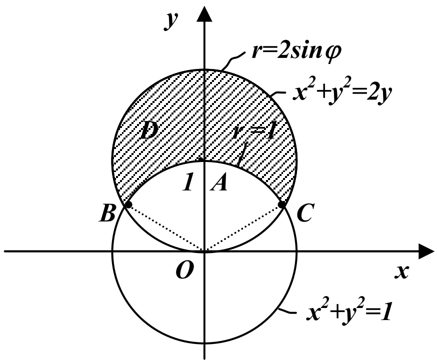

Рисунок 11

*Решение.* Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ определяет окружность с центром в начале координат радиусом $1$.

В уравнении $x^2 + y^2 = 2y$ выделим полный квадрат по $y$: $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Это окружность с центром в точке $A(0;1)$ радиуса $1$. Область $D$ на рисунке 11 заштрихована.

Граница области $D$ и подынтегральная функция в полярных координатах будут записываться проще, чем в декартовых координатах. Действительно, используя формулы связи $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, запишем:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r = 1, \quad x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r = 2\sin\varphi, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\varphi .$$

Как видно из рисунка 11, пределами изменения $\varphi$ будут полярные углы точек $C$ и $B$ – точек пересечения окружностей. Решая совместно их уравнения, найдём границы изменения угла $\varphi$: $1 = 2\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}$.

При произвольном фиксированном $\varphi$ луч входит в область $D$ на линии $r = 1$ (точка входа), а выходит на линии $r = 2\sin\varphi$ (точка выхода).

Применим формулу (10.19):

$$\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint\limits_D r\cos\varphi drd\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos\varphi \left( \int\limits_{r=1}^{r=2\sin\varphi} rdr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos\varphi \left( r^2 \Big|_{r=1}^{r=2\sin\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left( 4\sin^2\varphi - 1 \right) d\left( \sin\varphi \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3}\sin^3\varphi - \sin\varphi \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = 0 .$$

Здесь было учтено, что $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

## 4. <u>Вычисление тройного интеграла</u>

Пусть требуется вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dV$ по телу $T$, которое задано так: $T = \{ M(x,y,z):\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in D_{xy} \subset Oxy \}$ (рисунок 12) и каждая прямая, параллельная оси $Oz$ и проходящая через точку проекции $D_{xy}$ тела $T$ на плоскость $Oxy$, пересекает границу тела не более чем в двух точках – точке входа на поверхности $z = z_1(x,y)$ и точке выхода на поверхности $z = z_2(x,y)$ (*тело правильное в направлении оси* $Oz$).

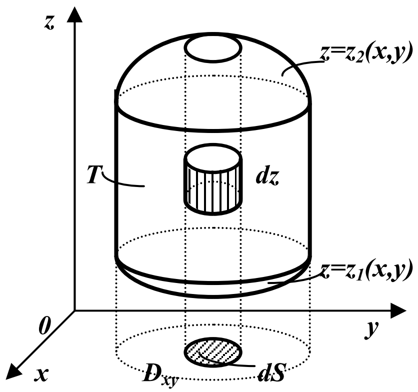


Рисунок 12

Чтобы установить правило вычисления тройного интеграла, предположим, что подынтегральная функция $f(x,y,z)$ является плотностью распределения массы для тела $T$. Тогда тройной интеграл будет равен массе $m(T)$ этого тела. Подсчитаем эту массу другим образом. Для этого на проекции $D_{xy}$ возьмём малый элемент площади $dS$ и подсчитаем массу узкого стержня, вырезанного в теле $T$ цилиндрической поверхностью (см. рисунок 12). Считаем координаты $x$ и $y$ у точек элемента $dS$, и, значит, у точек этого стержня, постоянными в силу малости $dS$. Выделим на высоте $z$ у стержня элемент длиной $dz$. Объём этого элемента есть $dSdz$, а масса приближённо будет равна $f(x,y,z)dSdz$. Заметим, что в прямоугольных координатах элемент объёма $dV$ можно записать в виде $dV = dxdydz$.

Чтобы найти массу всего выделенного узкого стержня, надо «просуммировать» массы всех таких элементов, т. е. проинтегрировать по $z$ от точки входа на поверхности $z = z_1(x,y)$ до точки выхода на поверхности $z = z_2(x,y)$, при этом величины $x, y$ и $dS$ постоянны: $\left(\int\limits_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dS$.

Заметим, что получена функция двух переменных $x$ и $y$, причём $(x,y)\in D_{xy}$.

Для определения массы всего тела $T$ нужно «просуммировать» массы всех узких стержней, подобных только что рассмотренному и опирающихся на всевозможные элементы $dS$ по области $D_{xy}$, что приводит к двойному интегралу от полученного ранее результата:

$$m(T)=\iiint\limits_T f(x,y,z)dV=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int\limits_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dS. \qquad (10.20)$$

Итак, *правило вычисления тройного интеграла от функции* $f(x,y,z)$ *по телу* $T$: вначале интегрируем функцию $f(x,y,z)$ по переменной $z$ от точки входа ($z = z_1(x,y)$) до точки выхода ($z = z_2(x,y)$), считая $x$ и $y$ постоянными, а затем от полученного результата вычисляем двойной интеграл по проекции $D_{xy}$ тела $T$ на координатную плоскость $Oxy$.

*Замечания.*

1. Вычисление внешнего двойного интеграла можно проводить в полярных координатах (если это упростит вычисление).

2. Если тело $T$ удобнее задать в виде

$$T = \{ M(x, y, z):\ x_1(y, z) \le x \le x_2(y, z),\quad (y, z) \in D_{yz} \subset Oyz\},$$

то в формуле (10.20) внутреннее интегрирование нужно проводить по $x$, а двойной интеграл вычислить по проекции $D_{yz}$ тела $T$ на плоскость $Oyz$.

Аналогичные изменения следует сделать, если тело $T$ задано в виде

$$T = \left\{ M(x,y,z) : y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z),\ (x,z) \in D_{xz} \subset Oxz \right\}.$$

3. Если тело $T$ более общего вида, то следует его разбить на части рассмотренных видов и применить свойство аддитивности интеграла.

***Пример 10.4.*** Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T x\,dV$, где тело $T$ ограничено плоскостями $x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

*Решение.* Изобразим тело $T$ (пирамиду) и отдельно проекцию $D_{xy}$ тела на плоскость $Oxy$ (треугольник) (рисунок 13).

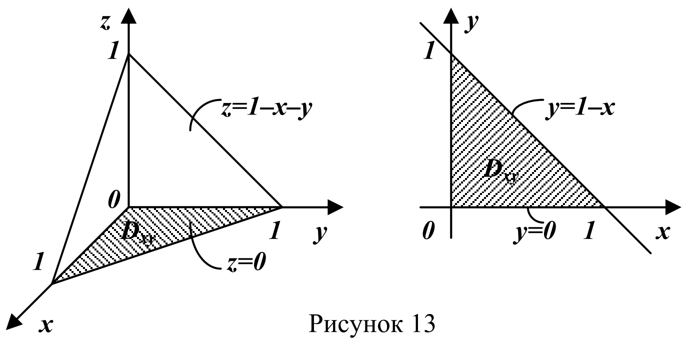


Рисунок 13

Прямая $y = 1 - x$ получена как пересечение плоскостей $x + y + z = 1,\ z = 0$. Поверхность, ограничивающая данное тело снизу, есть плоскость $z = 0$, а сверху –

плоскость $z = 1-x-y$. Применим формулу (10.20):

$$\iiint\limits_T x dV = \iint\limits_{D_{xy}} \left( \int\limits_{z=0}^{z=1-x-y} x dz \right) dS = \iint\limits_{D_{xy}} xz\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dS = \iint\limits_{D_{xy}} x\left(1-x-y\right) dS =$$

$$= \int\limits_0^1 x\left( \int\limits_{y=0}^{y=1-x} \left(1-x-y\right) dy \right) dx = \int\limits_0^1 x\left[ \left(1-x\right) y - \frac{y^2}{2} \right]\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x\left[ \left(1-x\right)^2 - \frac{\left(1-x\right)^2}{2} \right] dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(1-x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x-2x^2+x^3\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left( \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}.$$

## 5. Вычисление поверхностного интеграла

Пусть поверхность $\Sigma$ задана уравнением $z = z(x,y)$, причём $(x,y) \in D_{xy} \subset Oxy$. Здесь $D_{xy}$ по сути дела проекция поверхности $\Sigma$ на плоскость $Oxy$. Требуется вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z) d\sigma$.

Допустим, что элемент площади $d\sigma$ поверхности $\Sigma$ проецируется в элемент площади $dS$ в области $D_{xy}$ (рисунок 14).

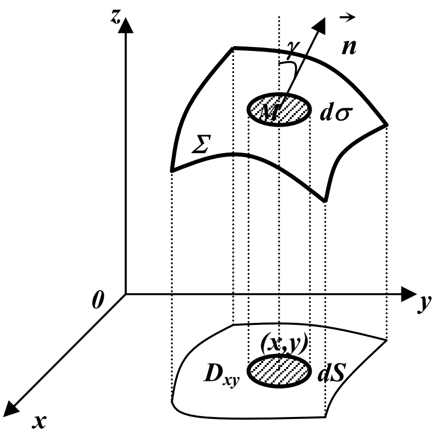


Рисунок 14

Тогда

$$d\sigma = \frac{dS}{\left|\cos\gamma\right|},$$

где $\gamma$ – угол, который вектор нормали $\vec{n}$ в точке $M(x,y,z) \in \Sigma$ составляет с осью $Oz$ (в данном пособии обоснование этого результата не приводится).

Вектор нормали $\vec{n} = \{z'_x, z'_y, -1\}$, поэтому

$$\left|\cos\gamma\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}.$$

Значит

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dS\ .$$

Так как функция $f(x,y,z)$ задана на поверхности $\Sigma$: $z = z(x, y)$, то

$$f(x, y, z) d\sigma = f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dS\ .$$

Из этого равенства следует, что интегрирование выражения, стоящего слева, по поверхности $\Sigma$ (поверхностный интеграл) равносильно интегрированию выражения, стоящего справа, по проекции $D_{xy}$ поверхности $\Sigma$ на плоскость $Oxy$ (двойной интеграл):

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dS\ . \qquad (10.21)$$

*Замечания.*

1) Если поверхность задана не уравнением $z = z(x,y)$, а уравнением $y = y(x,z)$ или уравнением $x = x(y,z)$, то формула (10.21) преобразуется естественным образом. Советуем читателю выписать расчётные формулы для этих случаев.

2) Если на разных участках поверхность задана разными уравнениями, то надо интегралы вычислять отдельно по каждому участку и затем их сложить, воспользовавшись свойством аддитивности интеграла.

***<u>Пример 10.5.</u>*** Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Sigma} z^2 d\sigma$ по части поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \le z \le 2$ (рисунок 15).

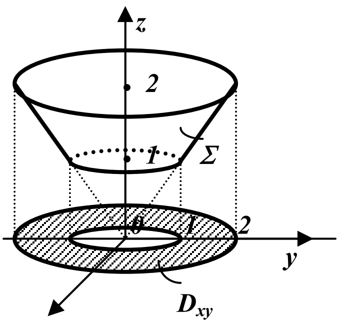

Рисунок 15

*Решение.* Проекция $D_{xy}$ поверхности $\Sigma$ на плоскость $Oxy$ представляет собой кольцо $1 \le x^2 + y^2 \le 4$. Так как на поверхности $\Sigma$ имеем

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\text{, а}\quad z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ,$$

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\text{, то, согласно формуле (10.21),}$$

приводим данный поверхностный интеграл к двойному:

$$\iint\limits_{\Sigma} z^2 d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dS = \sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dS .$$

Проще вычислить этот двойной интеграл в полярных координатах. Так как $x^2+y^2=r^2$, $dS = rdrd\varphi$, $1\le r\le 2$, $0\le\varphi\le 2\pi$, то

$$\iint\limits_{\Sigma} z^2 d\sigma = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{r=1}^{r=2} r^2\cdot rdr\right)d\varphi = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\bigg|_1^2 d\varphi = \frac{15\sqrt{2}}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{15\pi\sqrt{2}}{2} .$$

## 6. Приложения определённых интегралов по фигурам

В разделе 7 рассматривались некоторые задачи геометрии и механики, которые решались с помощью определённого интеграла по отрезку. Эти задачи и многие другие бывает удобнее исследовать с помощью интегралов по фигурам. В зависимости от того, для какой фигуры поставлена задача, при решении этой задачи и используется соответствующий тип интеграла.

### 6.1. *Приложения в геометрии.*

Геометрические приложения интегралов по фигурам следуют из свойства 1 (см. пункт 1.4). Площадь плоской области $D$, длина линии $L$, объём тела $T$, площадь поверхности $\Sigma$ определяются соответственно по формулам (10.7) – (10.10).

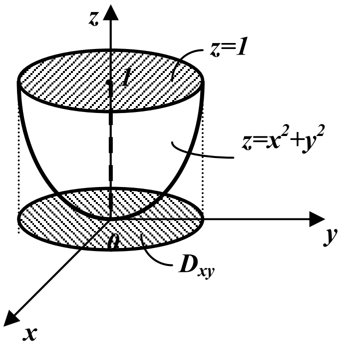


Рисунок 16

***Пример 10.6.*** Вычислить объём тела $T$, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z,\quad z=1$.

*Решение.* Запишем рабочую формулу. Здесь фигурой является пространственное тело $T$, поэтому используем тройной интеграл

$$V(T)=\iiint\limits_T dV .$$

Тело $T$ и его проекция $D_{xy}$ представлены на рисунке 16. Снизу тело $T$ ограничено поверхностью $z = x^2 + y^2$, сверху – плоскостью $z = 1$. Проекция $D_{xy}$ – круг $x^2+y^2\le 1$. Имеем

$$V(T)=\iiint\limits_T dV = \iint\limits_{D_{xy}}\left(\int\limits_{z=x^2+y^2}^{z=1} dz\right)dS = \iint\limits_{D_{xy}} z\Big|_{z=x^2+y^2}^{z=1} dS = \iint\limits_{D_{xy}}\left(1-x^2-y^2\right)dS =$$

$$=\left\langle x^2+y^2=r^2,\ dS=rdrd\varphi,\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right\rangle=\int_0^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{r=1}(1-r^2)rdr\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_{r=0}^{r=1}(r-r^3)dr=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

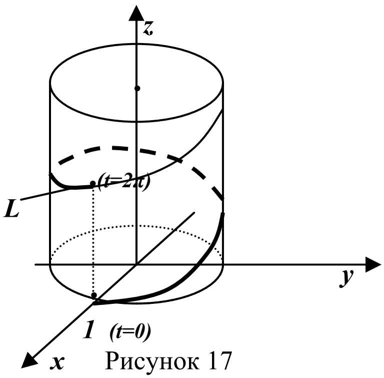

Рисунок 17

***Пример 10.7.*** Найти длину первого витка винтовой линии $L$:

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,\quad 0\le t\le 2\pi$$

(см. рисунок 17).

*Решение.*

$$l(L)=\int_L 1\cdot dL=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}dt=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}dt=2\sqrt{2}\pi.$$

**6.2.** ***Приложения в механике и физике.***

Рассмотрим наиболее важные приложения в механике и физике.

*Масса материальной фигуры*

Исходя из механического смысла интегралов, напомним формулу (10.6′) вычисления массы материальной фигуры $E$: $m(E)=\int_E f(M)dE$, где $f(M)$ – функция плотности распределения массы.

Для конкретных фигур получаются частные случаи этой формулы. Например, если $E$ – тело $T$, то $m(T)=\iiint_T f(x,y,z)dV$.

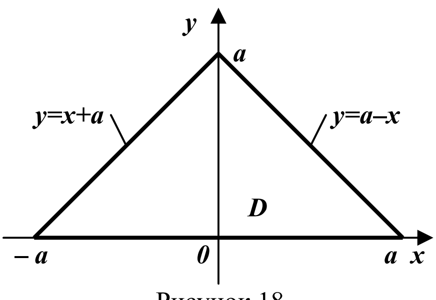

Рисунок 18

***Пример 10.8.*** Найти массу плоской пластинки, имеющей форму равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой точке пластинки поверхностная плотность пропорциональна расстоянию этой точки до гипотенузы. Взять гипотенузу равной $2a$, а коэффициент пропорциональности $k$.

*Решение*. Расположим треугольник в декартовой системе координат так, как показано на рисунке 18. Уравнения катетов будут $y = x + a$ и $y = a - x$. По условию задачи в точке $M(x,y)$ плотность $f(x,y) = ky$. Так как фигура – плоская область $D$, то используется двойной интеграл

$$m(D) = \iint_D f(x,y)dS = k\iint_D ydxdy = k\int_0^a \left( \int_{x=y-a}^{x=a-y} dx \right) ydy = k\int_0^a \left( x \Big|_{x=y-a}^{x=a-y} \right) ydy =$$

$$= k\int_0^a [a - y - y + a]ydy = 2k\int_0^a (ay - y^2)dy = 2k\left( \frac{ay^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^3}{3}.$$

<u>*Координаты центра масс материальной фигуры*</u>

Пусть в прямоугольной системе координат, на плоскости или в пространстве, задана система материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots , m_n$ и радиусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$.

*Центром масс (или центром тяжести)* этой системы точек называется точка $C$, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}.$$

При проецировании векторов на координатные оси из этого равенства получаются формулы для координат центра масс:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

Величины, стоящие в числителях этих дробей, в механике называют *статическими моментами*.

Формулы для вычисления координат центра масс материальной фигуры $E$ несложно получить, используя определения интегралов и свойство аддитивности масс и статических моментов:

$$x_c = \frac{1}{m(E)}\int_E xf(M)dE, \quad y_c = \frac{1}{m(E)}\int_E yf(M)dE, \quad z_c = \frac{1}{m(E)}\int_E zf(m)dE. \qquad (10.22)$$

Здесь, как и раньше, $f(M)$ – функция плотности, $m(E)$ – масса фигуры $E$. Ясно, что если, например, фигура $E \subset Oxy$, то $z_c = 0$.

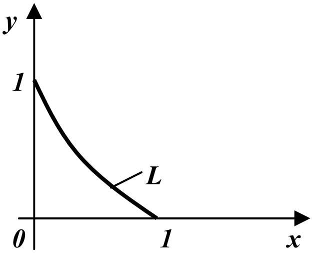


Рисунок 19

***Пример 10.9.*** Найти координаты центра масс дуги астроиды $x = cos^3 t$, $y = sin^3 t$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, если линейная плотность пропорциональна абсциссе точки.

*Решение.* Здесь фигурой $E$ является плоская линия $L$, поэтому используется криволинейный интеграл. Функция плотности $f(M) = kx$, $k$ –коэффициент пропорциональности, $dE = dL$. Рабочие формулы

$$x_c = \frac{1}{m(L)}\int_L x\,kx\,dL, \quad y_c = \frac{1}{m(L)}\int_L y\,kx\,dL, \quad m(L) = \int_L kx\,dL.$$

Линия $L$ изображена на рисунке 19. Вычислим:

$$x'(t) = -3\cos^2 t\sin t,\ y'(t) = 3\sin^2 t\cos t,\ dL = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt =$$

$$= 3\sin t\cos t\,dt, \quad m(L) = k\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\cdot 3\sin t\cos t\,dt = -3k\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,d(\cos t) = \frac{3}{5}k,$$

$$k\int_L x^2 dL = k\int_0^{\pi/2}\cos^6 t\cdot 3\sin t\cos t\,dt = -3k\int_0^{\pi/2}\cos^7 t\,d(\cos t) = \frac{3}{8}k,$$

$$k\int_L xy\,dL = k\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\sin^3 t\cdot 3\sin t\cos t\,dt = \frac{3}{16}k\int_0^{\pi/2}\sin^4 2t\,dt =$$

$$= \frac{3}{32}k\left(\frac{3t}{4} - \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{32}\sin 8t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{256}k.$$

Итак, $x_c = \left(\frac{3}{8}k\right):\left(\frac{3}{5}k\right) = \frac{5}{8}$, $\quad y_c = \left(\frac{9\pi}{256}k\right):\left(\frac{3}{5}k\right) = \frac{15\pi}{256}$.

## *Момент инерции материальной фигуры*

*Моментом инерции материальной точки* массы $m$ относительно оси (точки, плоскости) называется произведение массы $m$ на квадрат расстояния $r$ точки от оси (точки, плоскости): $J = mr^2$.

*Моментом инерции системы материальных точек* с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ относительно оси (точки, плоскости) называется величина $J = \sum m_i r_i^2$,

где $r_1, r_2, \dots, r_n$ – расстояния материальных точек от оси (точки, плоскости).

*Моментом инерции материальной фигуры* $E$ относительно оси (точки, плоскости) называется величина

$$J = \int_E f(M) r^2(M) dE, \tag{10.23}$$

где $f(M)$ – функция плотности, $r(M)$ – расстояние текущей точки $M$ фигуры от оси (точки, плоскости).

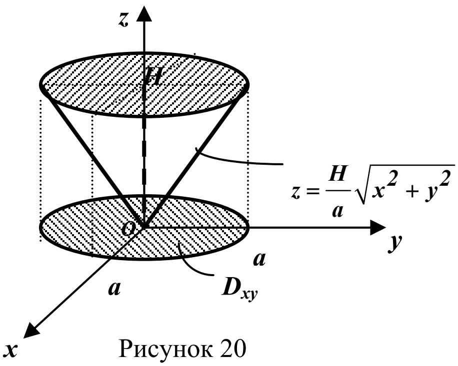

Рисунок 20

***Пример 10.10.*** Найти момент инерции конуса $T$ (см. рисунок 20) относительно оси $Oz$, если функция плотности $f(M) = 1$ (однородная фигура).

*Решение.* Здесь фигурой $E$ является пространственное тело $T$, поэтому используется тройной интеграл. Рабочая формула: $J_{Oz} = \iiint\limits_T 1 \cdot (x^2 + y^2) dV$,

так как расстояние текущей точки $M(x,y,z)$ тела $T$ до оси $Oz$ равно $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Для вычисления тройного интеграла нужно записать уравнение конической поверхности, которая получается вращением прямой $z = \frac{H}{a} x, \quad x \in [0, a]$ вокруг оси $Oz$: $z = \frac{H}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Итак,

$$J_{Oz} = \iint\limits_{D_{xy}} \left( \int\limits_{z = \frac{H}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{z=H} \left( x^2 + y^2 \right) dz \right) dS = \iint\limits_{D_{xy}} \left( x^2 + y^2 \right) \left( H - \frac{H}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \right) dS =$$

$$= H \iint\limits_{D_{xy}} r^2 \left( 1 - \frac{r}{a} \right) r dr d\varphi = H \int\limits_0^{2\pi} \left( \int\limits_{r=0}^{r=a} \left( r^3 - \frac{r^4}{a} \right) dr \right) d\varphi = 2\pi H \left( \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5a} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=a} = \frac{\pi H a^4}{10}.$$

## Варианты заданий контрольной работы № 10

**10.1.** Найти с помощью двойного интеграла массу плоской фигуры, ограниченной заданными линиями. Плотность задана функцией $\rho = \rho(x, y)$. Сделать чертёж фигуры.

1. $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 16$, $\rho(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.
2. $y = 0,\ y = \sqrt{4x - x^2}$, $\rho(x,y) = x^2 y$.
3. $x^2 + y^2 \le 16$, $\rho(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.
4. $x = 0,\ y = \dfrac{3}{2}x\ (x \ge 0),\ y = 4 - (x-1)^2$, $\rho(x,y) = x + y$.
5. $xy = 1,\ y - x = 0,\ x = 2$, $\rho(x,y) = x^4 y$.
6. $y = \sqrt{9 - x^2},\ y = 0$, $\rho(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.
7. $x^2 + y^2 \le 1$, $\rho(x, y) = e^{x^2 + y^2}$.
8. $y = \sqrt{6x - x^2},\ y = 0$, $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
9. $x^2 + y^2 = 4x,\ y = 0,\ y = \sqrt{3}x$, $\rho(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
10. $y = x^2 + 1,\ y = 2x - x^2,\ x = 0,\ x = 2$, $\rho(x,y) = x + 1$.
11. $x + y - 2 = 0,\ x^2 - y = 0,\ y = 0$, $\rho(x,y) = xy$.
12. $y = \arcsin x,\ x - 1 = 0,\ y = 0$, $\rho(x,y) = 1 + \sin y$.
13. $y = 0{,}5x,\ y + x^2 = 2x$, $\rho(x,y) = 2x + y$.
14. $y = x^2,\ xy = 8,\ x = 3$, $\rho(x,y) = x$.
15. $y^2 = 4x,\ x = 1$, $\rho(x,y) = xy^2$.
16. $y = x^3 + 1,\ y = x + 1$, $\rho(x,y) = 1 + y$.
17. $y = x^2,\ y = 8 - x^2,\ x = 0\ (x \ge 0)$, $\rho(x,y) = xy$.
18. $y = (x+1)^2,\ y = x,\ x = 1,\ y = 0$, $\rho(x,y) = x^2 y$.

19. $xy=4,\ x+y=5$, $\rho(x,y)=x+y$.

20. $x=4,\ y=x,\ xy=4$, $\rho(x,y)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$.

21. $x=8-y^2,\ x=-2y$, $\rho(x,y)=3+y$.

22. $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1$, $\rho(x,y)=\dfrac{1}{y}$.

23. $x=0,\ x=\sqrt{8y-y^2}$, $\rho(x,y)=xy^2$.

24. $x=0,\ y=2x\ (x\geq 0),\ y=2-(x-1)^2$, $\rho(x,y)=2x+y$.

25. $x^2+y^2\leq 9$, $\rho(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$.

26. $x=\sqrt{10y-y^2},\ x=0$, $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

27. $x=0,\ y=1,\ y=x$, $\rho(x,y)=(x+y)^2$.

28. $x^2+y^2=2x$, $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

29. $2x+y=3,\ y=x^2,\ x=0\ (x\geq 0)$, $\rho(x,y)=xy$.

30. $y=\sqrt{x},\ y=\dfrac{1}{8x},\ x=64$, $\rho(x,y)=\sqrt{x}$.

**10.2.** Найти с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного заданными поверхностями. Сделать чертёж заданного тела и его проекции на плоскость ***Oxy***.

1. $x+y=2,\ x=\sqrt{y},\ z=2{,}4x,\ z=0$.
2. $x^2+y^2+2-z=0,\ x=3,\ y=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.
3. $z=0,\ 2-x-y-2z=0,\ y=x^2,\ y=x$.
4. $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=6-x^2-y^2$.
5. $z=4-x^2-y^2,\ z=0,\ x=\pm 1,\ y=\pm 1$.
6. $z=4-x^2,\ 2x+y=4,\ y=0,\ z=0$.
7. $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ z=15x,\ y=0,\ z=0$.
8. $2z=4-x^2-y^2,\ z=2-x-y,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

9. $z = y^2, \quad x + 3y = 9, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.

10. $x = 20\sqrt{2y}, \quad x = 5\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z + y = 0{,}5$.

11. $x^2 + y^2 = 4x, \quad z = x, \quad z = 2x$.

12. $x^2 + y^2 = z, \quad y = 5x, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0$.

13. $x^2 + y^2 = 4y, \quad z = 4 - x^2, \quad z = 0$.

14. $z = 4 - y^2, \quad 2x = y^2, \quad x = 0, \quad z = 0$.

15. $x + y = 6, \; y = \sqrt{3x}, \; z = 4y, \; z = 0$.

16. $y = 0, \quad y = x, \quad z = 4, \quad z = x^2 + y^2$.

17. $z = x^2 + y^2, \quad z = 2\left(x^2 + y^2\right), \quad y = x, \quad y = x^2$.

18. $z = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

19. $2z = x^2 + y^2, \quad z = 2$.

20. $x^2 + y^2 = z + 1, \quad z = 0$.

21. $z = 0, \quad 4z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 2x$.

22. $z = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 4$.

23. $y^2 + z^2 = 4x, \quad x^2 + y^2 = 2x$.

24. $y + z = 0, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$.

25. $2z = x^2, \quad 3x + 12y = 12, \quad z = 0, \quad y = 0$.

26. $x^2 + y^2 = 9, \quad x + y + z = 6, \quad z = 0$.

27. $z = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad y = 1, \quad y = 2x, \quad y = 6 - x$.

28. $x + y = 1, \quad z = x^2 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.

29. $z = 4 - x^2, \quad 2x + y = 4, \quad y = 0, \quad z = 0$.

30. $y = \sqrt{x}, \quad x + y = 1, \quad z = 0, \quad z = 2y$.

**10.3.** Решить задачи с применением криволинейного интеграла.

1. Найти координаты центра тяжести части однородной окружности $x^2 + y^2 = 4$, расположенной в первой четверти.

2. Найти момент инерции относительно оси ординат дуги кривой $y = \ln x, \ 1 \le x \le 2$, если линейная плотность $\rho = x^2$.

3. Найти координаты центра тяжести части однородной дуги цепной линии $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad |x| \le 1$.

4. Найти момент инерции относительно начала координат дуги окружности $y = \sqrt{2x - x^2}, \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1$, если линейная плотность $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

5. Найти координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

6. Найти момент инерции относительно оси ординат дуги эллипса $x = 4\sqrt{2}\cos t, \ \ y = 3\sqrt{2}\sin t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$, если линейная плотность $\rho = \dfrac{y}{x}$.

7. Найти координаты центра тяжести дуги кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность $\rho = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}$.

8. Найти момент инерции относительно начала координат полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, расположенной над осью абсцисс, если линейная плотность $\rho = x^2 + y$.

9. Найти координаты центра тяжести дуги кривой

$x = 8\sin t + 6\cos t, \quad y = 6\sin t - 8\cos t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность $\rho = x$.

10. Найти момент инерции относительно начала координат одного витка однородной винтовой линии $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

11. Найти координаты центра тяжести дуги параболы $y = x^2$ между точками $A(1;\,1)$ и $B(2;\,4)$, если линейная плотность $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$.

12. Найти момент инерции относительно оси абсцисс дуги циклоиды

$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi$, если линейная плотность $\rho = \dfrac{1}{y}$.

13. Найти координаты центра тяжести ломаной с вершинами $A(0;\,1)$, $B(1;\,0)$, $C(2;\,0)$, если линейная плотность $\rho = x + y$.

14. Найти момент инерции относительно оси абсцисс прямолинейного отрезка, соединяющего точки $A(1;\ 1)$ и $B(2;\ 3)$, если линейная плотность $\rho = x$.

15. Найти координаты центра тяжести дуги параболы $y^2 = 2x$ между точками $A(2;\ 2)$ и $B(8;\ 4)$, если линейная плотность $\rho = \sqrt{2x}$.

16. Найти момент инерции относительно начала координат дуги кривой $y = e^{-x},\ \ 0 \le x \le 1$, если линейная плотность $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}$.

17. Найти координаты центра тяжести дуги гиперболы $y = \dfrac{1}{x},\ \ 1 \le x \le 2$, если линейная плотность $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^5 y}}$.

18. Найти момент инерции относительно начала координат дуги кривой $y = \sqrt{x-1},\ \ 2 \le x \le 5$, если линейная плотность $\rho = y\sqrt{4x-3}$.

19. Найти координаты центра тяжести дуги синусоиды $y = \sin x,\ \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность $\rho = \dfrac{x}{\sqrt{2-y^2}}$.

20. Найти момент инерции относительно оси ординат дуги кривой $y = e^x,\ \ \ln 2 \le x \le \ln 4$, если линейная плотность $\rho = \dfrac{y}{x^2}$.

21. Найти координаты центра тяжести дуги кривой $x = t,\ \ y = t^3,\ \ 0 \le t \le 1$, если линейная плотность $\rho = \sqrt{9xy+1}$.

22. Найти момент инерции относительно начала координат дуги кривой $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi},\ \ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$, если линейная плотность $\rho = r$.

23. Найти координаты центра тяжести части окружности $x = 4\cos t,\ \ y = 4\sin t$, расположенной в первой четверти, если линейная плотность $\rho = x + 2y$.

24. Найти момент инерции относительно начала координат дуги кривой $x = \cos t + t\sin t,\ \ y = \sin t - t\cos t,\ \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

25. Найти координаты центра тяжести дуги кривой $r=\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi$, если линейная плотность $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}}$.

26. Найти момент инерции относительно оси абсцисс прямолинейного отрезка, соединяющего точки $A(0;\ -2)$ и $B(4;\ 0)$, если линейная плотность $\rho=\dfrac{x}{2}+y+2$.

27. Найти координаты центра тяжести дуги кривой

$x=t,\quad y=\dfrac{t^2}{\sqrt{2}},\quad z=\dfrac{t^3}{3},\quad 0\le t\le 1$, если линейная плотность $\rho=x$.

28. Найти момент инерции относительно оси абсцисс дуги кардиоиды $r=1-\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi$, если линейная плотность $\rho=\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

29. Найти координаты центра тяжести дуги параболы $y=1-x^2,\quad 0\le x\le 1$, если линейная плотность $\rho=\sqrt{4x^2+1}$.

30. Найти момент инерции относительно оси ординат однородной дуги астроиды $x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

**10.4.** Вычислить поверхностный интеграл.

1. $\iint\limits_{\Sigma}(2y^2z^2+y^4+z^4)d\sigma$, где $\Sigma$ – часть плоскости $x+y+z=9$, вырезанная цилиндром $y^2+z^2=1$.

2. $\iint\limits_{\Sigma}yzd\sigma$, где $\Sigma$ – цилиндрическая поверхность $x^2+z^2=1$, заключённая между плоскостями $y=0$ и $y=1$.

3. $\iint\limits_{\Sigma}\left(x+y^2+z^2-\dfrac{3}{2}\right)d\sigma$, где $\Sigma$ – конечная часть поверхности параболоида $x=2-\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{z^2}{2}$, отсечённая плоскостью $x=0$.

4. $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)d\sigma$, где $\Sigma$– коническая поверхность $z=\sqrt{x^2+y^2}$ при условии $0\le z\le 1$.

5. $\iint\limits_{\Sigma}z(x+y)\,d\sigma$, где $\Sigma$ – часть цилиндрической поверхности $z=\sqrt{9-x^2}$, отсечённая плоскостями $y=0,\ \ y=2$.

6. $\iint\limits_{\Sigma}(2-z)d\sigma$, где $\Sigma$ – часть поверхности параболоида $z=2-\dfrac{x^2+y^2}{2}$, расположенная над плоскостью $Oxy$.

7. $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,d\sigma$, где $\Sigma$– полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

8. $\iint\limits_{\Sigma}(6x+4y+3z)d\sigma$, где $\Sigma$– часть плоскости $x+2y+3z=6$, расположенная в первом октанте.

9. $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2-z^2}\,d\sigma$, где $\Sigma$– часть конической поверхности $x=\sqrt{y^2+z^2}$, вырезанная цилиндрической поверхностью $y=x^2$.

10. $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y+z^2-2)d\sigma$, где $\Sigma$ – часть поверхности параболоида $2y=9-x^2-z^2$, отсечённая плоскостью $y=0$.

11. $\iint\limits_{\Sigma}z\,d\sigma$, где $\Sigma$– часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$ при условии $0\le z\le 1$.

12. $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)d\sigma$, где $\Sigma$– полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

13. $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)d\sigma$, где $\Sigma$– часть плоскости $z=x$, ограниченная плоскостями $x+y=1,\ y=0,\ x=0$.

14. $\iint\limits_{\Sigma}yx^2d\sigma$, где $\Sigma$– часть цилиндрической поверхности $y=\sqrt{1-x^2}$, вырезанная плоскостями $z=1$ и $z=4$.

15. $\iint\limits_{\Sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{1+2x}}$, где $\Sigma$ – часть цилиндрической поверхности $z=\sqrt{2x}$, вырезанная поверхностями $y^2=x$ и $x=2$.

16. $\iint\limits_{\Sigma} \frac{x}{y} d\sigma$, где $\Sigma$ – часть поверхности $x=\sqrt{y^2-z^2}$, вырезанная плоскостями $y=1$ и $y=2$.

17. $\iint\limits_{\Sigma} xyz d\sigma$, где $\Sigma$ – часть плоскости $x+y+z=1$, ограниченная координатными плоскостями.

18. $\iint\limits_{\Sigma} xyz^2 d\sigma$, где $\Sigma$ – часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=R^2$ при условии $x \geq 0, \quad y \geq 0$.

19. $\iint\limits_{\Sigma} x^2 z d\sigma$, где $\Sigma$ – полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

20. $\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{y^2+z^2} d\sigma$, где $\Sigma$ – часть плоскости $z=7-2x-2y$, вырезанная цилиндром $z^2+y^2=1$.

21. $\iint\limits_{\Sigma} \frac{2z}{\sqrt{1+4z^2}} d\sigma$, где $\Sigma$ – часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, вырезанная конусом $z^2=x^2+y^2$.

22. $\iint\limits_{\Sigma} (x+y+z) d\sigma$, где $\Sigma$ – полусфера $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

23. $\iint\limits_{\Sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, где $\Sigma$ – часть плоскости $x+y+z=1$, расположенная в первом октанте.

24. $\iint\limits_{\Sigma} x d\sigma$, где $\Sigma$ – часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=4x$.

25. $\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2}\, d\sigma$, где $\Sigma$– боковая поверхность конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при условии $z \le 1$.

26. $\iint\limits_{\Sigma} y\, d\sigma$, где $\Sigma$– часть поверхности параболоида $4z = x^2 + y^2$ при условии $0 \le z \le 4$.

27. $\iint\limits_{\Sigma} d\sigma$, где $\Sigma$– часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2 + 4$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 9$.

28. $\iint\limits_{\Sigma} x\sqrt{1 + 2z}\, d\sigma$, где $\Sigma$– часть поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 2 \quad (x \ge 0,\ y \ge 0)$.

29. $\iint\limits_{\Sigma} z\, d\sigma$, где $\Sigma$– часть полусферы $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ при условии $\frac{1}{\sqrt{3}} x \le y \le \sqrt{3} x$.

30. $\iint\limits_{\Sigma} x(z + y)\, d\sigma$, где $\Sigma$ – часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{9 - z^2}$, отсечённая плоскостями $y = 0,\ \ y = 1$.