ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Программа, вопросы для самопроверки, контрольные задания

Санкт-Петербург
2006

Составители: А. М. Лестев, М. А. Лестев

Рецензент кандидат технических наук, доцент *П. Б. Дергачев*

Издание включает программу курса «Теоретическая механика» со ссылками на литературные источники, вопросы для самопроверки, контрольные задания с примерами решения задач и библиографический список.

Предназначено для студентов заочной формы обучения.

Подготовлено кафедрой механики и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского университета аэрокосмического приборостроения.

Редактор *Г. Д. Бакастова*
Верстальщик *Т. М. Каргапольцева*

Сдано в набор 21.09.06. Подписано к печати 08.11.06.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,74.
Уч.-изд. л. 1,98. Тираж 100 экз. Заказ № 560

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67

1. ПРОГРАММА

1.1. Кинематика

1. Способы задания движения точки [2, с. 123–129].
2. Скорость точки [2, с. 129–132].
3. Скорость точки при задании движения в декартовой системе координат [2, с. 132–134].
4. Скорость точки при естественном способе задания движения [2, с. 136–137].
5. Ускорение точки [2, с. 138–139].
6. Ускорение точки при задании движения в декартовой системе координат [2, с.139–140].
7. Ускорение точки при естественном способе задания движения [2, с. 141–145].
8. Задание движения твердого тела. Понятие о числе степеней свободы тела [2, с. 159–160].
9. Поступательное движение твердого тела [2, с. 160–162].
10. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение [2, с. 162–165].
11. Скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси [2, с. 165–166].
12. Ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси [2, с.166–168].
13. Плоское движение твердого тела. Задание движения [2, с. 168–169].
14. Скорости точек тела при плоском движении. Мгновенный центр скоростей [2, с. 169–172, 174–178].
15. Ускорение точек тела при плоском движении [2, с. 178–181].
16. Углы Эйлера [2, с. 191–192].
17. Скорости точек тела, имеющего неподвижную точку [2, с. 192–195].
18. Ускорения точек тела, имеющего неподвижную точку [2, с.198–200].
19. Движение свободного тела [2, с. 200–203].
20. Абсолютная и относительная производные от вектора [2, с.203–205].

21. Теорема о сложении скоростей [2, с. 205–207].

22. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) [2, с. 207–209].

23. Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей. Кинематические формулы Эйлера [2, с. 219–222].

1.2. Статика

1. Сила. Система сил. Равновесие твердого тела [2, с. 15–18].
2. Аксиомы статики и следствия из них [2, с. 16–23].
3. Активные силы, реакции связей [2, с. 23–27].
4. Система сходящихся сил. Условия равновесия системы сходящихся сил [2, с. 28–32].
5. Момент силы относительно точки и относительно оси [2, с. 40–43].
6. Пара сил. Момент пары сил. Равновесие системы пар [2, с. 43–44, 48–49].
7. Лемма о параллельном переносе силы [2, с. 49–50].
8. Основная теорема статики [2, с. 50–52].
9. Аналитическое определение главного вектора и главного момента [2, с. 52–54].
10. Уравнения равновесия пространственной системы сил [2, с.101–104].
11. Уравнения равновесия плоской системы сил [2, с. 62–68].
12. Центр тяжести [2, с. 110–119].

1.3. Динамика

1. Законы Ньютона [3, с. 9–15].
2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки [3, с. 16–17].
3. Две основные задачи динамики точки [3, с. 17–23].
4. Движение несвободной материальной точки. Естественные уравнения движения [3, с. 11–115, 120–124].
5. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки [3, с. 137–148].
6. Материальная система. Силы внешние и внутренние [3, с. 154–157].
7. Масса материальной системы. Центр масс системы. Моменты инерции (основные определения) [3, с. 154–155, 182–183, 242–246].

8. Момент инерции относительно параллельных осей [3, с. 250–251].
9. Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через данную точку [3, с. 252–253].
10. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек [3, с. 157–158].
11. Количество движения материальной системы [3, с. 162–164].
12. Теорема об изменении количества движения материальной системы [3, с. 164–166].
13. Теорема о движении центра масс [3, с. 166–169].
14. Момент количеств движения материальной системы и твердого тела с одной неподвижной точкой [3, с. 180–182, 266–268].
15. Момент количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси [3, с. 181–182].
16. Теорема об изменении момента количеств движения материальной системы [3, с. 64–65, 183–185].
17. Кинематическая энергия материальной системы. Теорема Кенига [3, с. 204–209].
18. Кинематическая энергия тела, имеющего одну неподвижную точку [3, с. 268–269].
19. Кинематическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси [3, с. 207–269].
20. Работа силы. Мощность [3, с. 68–75, 211–216].
21. Силовое поле, потенциальная энергия [3, с. 77–87].
22. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы [3, с. 76–77, 216–217].
23. Динамические уравнения Эйлера [3, с. 288–291].
24. Связи и их классификация [3, с. 400–405].
25. Действительные и виртуальные перемещения. Принцип виртуальных перемещений [3, с. 405–409, 413–415].
26. Обобщенные координаты и обобщенные силы. Условия равновесия в обобщенных координатах [3, с. 420–425, 429].
27. Общее уравнение динамики [3, с. 389–391].
28. Уравнения Лагранжа второго рода [3, с. 391–394].
29. Понятие об устойчивости положения равновесия. Теорема Лагранжа — Дирихле [3, с. 410–416].
30. Выражение кинетической и потенциальной энергии системы с одной степенью свободы через обобщенные скорости и обобщенные координаты [3, с. 405–407, 414–415].
31. Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы [3, с. 35–37, 420–422].
32. Свободные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления [3, с. 40–44].

33. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы (случай $\omega = k$) [3, с. 48–50].

34. Явление биений и резонанса в системах с одной степенью свободы [3, с. 50–53].

35. Вынужденные колебания с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления [3, с. 53–58].

2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

2.1. Кинематика

1. Укажите основные способы задания движения материальной точки.
2. Дайте определение вектора скорости и вектора ускорения точки.
3. Определите вектор скорости и вектор ускорения при координатном и естественном способах задания движения точки.
4. Какие изменения вектора скорости характеризуют касательное и нормальное ускорения точки?
5. Что называется траекторией точки?
6. Что называется абсолютно твердым телом?
7. Сколько степеней свободы имеет свободное твердое тело?
8. Какое движение тела называют поступательным?
9. Сколько степеней свободы имеет тело при поступательном движении?
10. Как распределяются скорости и ускорения точек тела при поступательном движении?
11. Сколько степеней свободы имеет тело при вращательном движении?
12. Как задается вращательное движение тела?
13. Дайте определение угловой скорости и углового ускорения тела при вращательном движении?
14. Как определить скорости и ускорения точек тела при вращательном движении?
15. Какое движение тела называется плоским?
16. Сколько степеней свободы имеет тело при плоском движении?
17. Как задается плоское движение тела?
18. Зависит ли угловая скорость от выбора полюса при плоском движении тела?
19. Что называют мгновенным центром скоростей?
20. Как определяется положение мгновенного центра скоростей в следующих случаях: 1) когда известна угловая скорость тела и линейная скорость какой-либо точки плоской фигуры; 2) когда известны направления скоростей в двух каких-либо точках плоской фигуры; 3) когда одно тело катится без скольжения по какой-либо неподвижной поверхности?
21. Какое движение тела называют сферическим?
22. Сколько степеней свободы имеет тело при сферическом движении?
23. Как задается сферическое движение тела?
24. Как определить скорости точек тела при сферическом движении?
25. Как записываются кинематические формулы Эйлера?
26. Как определить ускорения точек тела при сферическом движении?
27. Как направлены и чему равны по величине вращательное и осестремительное ускорения точки тела при сферическом движении?
28. Как задается движение свободного твердого тела?
29. Как определить скорость и ускорение точки свободного твердого тела?
30. Какое движение (скорость, ускорение) называют абсолютным (абсолютной, абсолютным), относительным (относительной, относительным), переносным (переносной, переносным)?
31. Сформулируйте теорему сложения скоростей.
32. Сформулируйте теорему сложения ускорений (теорему Кориолиса).
33. По какой формуле вычисляется кориолисово ускорение? В каких случаях кориолисово ускорение равно нулю?

2.2. Статика

1. Сформулируйте аксиомы статики.
2. В чем состоит принцип освобождаемости7
3. В чем состоит принцип отвердевания?
4. Определите равнодействующую сходящихся сил. Укажите условия равновесия.
5. Дайте определение момента силы относительно точки и относительно оси.
6. Дайте определение пары сил, момента пары сил и укажите свойства пары сил.
7. Как записывается условие равновесия системы пар?
8. Что называется главным вектором и главным моментом системы сил?

9. Сформулируйте основную теорему статики.

10. Как записываются уравнения равновесия произвольной системы сил?

11. Как записываются уравнения равновесия плоской системы сил?

12. Что называется центром тяжести? Каковы методы определения центра тяжести?

2.3. Динамика

1. Сформулируйте законы Ньютона.
2. В чем состоят первая и вторая задачи динамики?
3. Запишите дифференциальное уравнение движения точки: 1) в векторной системе; 2) в проекциях на декартовые оси координат; 3) в проекциях на оси естественного трехгранника: касательную, нормаль и бинормаль к траектории движения.
4. Дайте определение несвободного движения точки.
5. Запишите естественные уравнения несвободного движения точки.
6. Запишите дифференциальное уравнение относительного движения точки.
7. Что называется переносной и кориолисовой силами инерции?
8. Что называется: 1) материальной системой; 2) неизменяемой материальной системой; 3) абсолютно твердым телом?
9. Какие силы называют внешними и внутренними?
10. Каковы свойства внутренних сил?
11. Что называют центром масс?
12. Что называют моментами инерции относительно осей, центробежными моментами инерции?
13. Какие оси называются главными осями инерции?
14. Какова зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей?
15. Как определяется момент инерции относительно произвольной оси?
16. Как записать дифференциальные уравнения движения системы материальных точек?
17. Что называют вектором количества движения материальной точки и материальной системы?
18. Как формулируется теорема об изменении количества движения материальной точки и материальной системы?
19. Сформулируйте теорему о движении центра масс материальной системы.

20. Что называют вектором момента количества движения материальной точки и главным моментом количеств движения материальной системы?
21. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки и теорему об изменении момента количеств движения материальной системы.
22. Как определяется работа силы на конечном перемещении?
23. Что называется силовым полем, потенциальным (консервативным) силовым полем?
24. Как определяется работа по перемещению точки в потенциальном поле? Чему равна работа по замкнутому контуру?
25. Укажите свойства потенциальных сил. Дайте примеры потенциальных сил.
26. Что называют потенциальной энергией, как ее определить?
27. Дайте примеры вычисления потенциальной энергии поля силы тяжести, поля центральных сил.
28. Что такое мощность?
29. Что называют кинетической энергией материальной точки и материальной системы?
30. Как определить кинетическую энергию абсолютно твердого тела в случае: 1) поступательного движения; 2) вращательного движения тела вокруг неподвижной оси; 3) плоского движения; 4) сферического движения?
31. Как определить работу сил, приложенных к материальной системе (работу сил тяжести, работу сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, работу потенциальных сил)?
32. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии для материальной точки и материальной системы.
33. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
34. Запишите в общем виде уравнение голономной удерживающей стационарной связи.
35. Что условились называть виртуальным перемещением точки, виртуальным перемещением системы?
36. Что такое виртуальная работа?
37. Что условились называть обобщенными координатами?
38. Какой вид имеет формула, выражающая скорость произвольной точки механической системы в функции обобщенных координат и обобщенных скоростей этой системы?
39. По каким формулам вычисляются обобщенные силы?
40. Какова размерность обобщенной силы и от чего она зависит?
41. Как формулируется принцип виртуальных перемещений?

42. Какой вид имеет уравнение, выражающее принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах?

43. Какой вид имеет общее уравнение динамики?

44. Как записываются уравнения Лагранжа второго рода?

45. Какой вид имеют уравнения Лагранжа второго рода, если на механическую систему действуют только силы потенциального поля?

46. Что называется функцией Лагранжа?

47. Какое положение материальной системы называется устойчивым, а какое неустойчивым?

48. Сформулируйте теорему Лагранжа — Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы.

49. Какой вид имеет приближенное выражение потенциальной энергии с одной степенью свободы?

50. Какой вид имеет выражение кинетической энергии механической системы со стационарными связями в случае одной степени свободы?

51. Какой вид имеет дифференциальное уравнение собственных колебаний с одной степенью свободы?

52. По какой формуле определяется период собственных колебаний с одной степенью свободы консервативной системы?

53. Какой вид имеет дифференциальное уравнение собственных колебаний с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления?

54. Какой вид имеет уравнение затухающих колебаний материальной системы с одной степенью свободы?

55. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний консервативной системы с одной степенью свободы при действии периодической вынуждающей силы?

56. При каких условиях возникают резонанс и биения?

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ*

Задача 1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.

По заданным уравнениям ее движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ найти положение точки

* Студенты заочного факультета выполняют вариант задания, соответствующий последней цифре номера зачетной книжки. Контрольная работа оформляется в тетради и представляется в деканат заочного факультета в соответствии с установленным порядком.

Таблица 1

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t)$, м	$y = y(t)$, м	
1	$0{,}3t$	$0{,}5t^2 + 1$	1
2	$0{,}2t^2 + 0{,}1$	$0{,}5t$	1
3	$0{,}3\cos\frac{\pi}{3}t - 0{,}2$	$0{,}5\sin\frac{\pi}{3}t + 0{,}6$	0,5
4	$0{,}7t$	$t^2 - 0{,}5$	1
5	$0{,}8\sin\frac{\pi}{6}t + 0{,}3$	$0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t - 0{,}5$	1
6	$0{,}4\cos\frac{\pi}{3}t$	$0{,}7\sin\frac{\pi}{3}t + 0{,}3$	0,5
7	$0{,}7t^2 - 0{,}4$	$0{,}3t$	1,5
8	$0{,}6t$	$-1{,}2t^2 + 0{,}4$	1
9	$-0{,}4t$	$0{,}5t^2 + 0{,}3$	1
10	$0{,}5\sin\frac{\pi}{4}t + 0{,}2$	$0{,}3\cos\frac{\pi}{4}t - 0{,}3$	1

на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 1.

Пример решения задачи

Исходные данные: $x = 2{,}2t$, $y = 3{,}6t^2 - 2$, $t_1 = 1$ (x, y — в метрах, t и t_1 — в секундах).

Р е ш е н и е. Заданные уравнения движения точки можно рассматривать как параметрические уравнения траектории. Исключая время t из уравнений движения, получим уравнение траектории в координатной форме

$$y = 0{,}74x^2 - 1.$$

Траектория точки — парабола (рис. 1).

Вычислим координаты точки в момент времени $t_1 = 1$с и изобразим положение точки на траектории в этот момент времени: $x(t_1) = 2{,}2$ м, $y(t_1) = 2{,}6$ м.

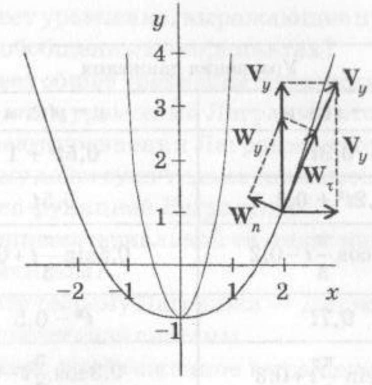


Рис. 1

Вычислим скорость и ускорение точки. Проекции скорости точки на оси x и y будут

$$V_x = \dot{x} = 2{,}2 \text{ м/с}, \ \ V_y = \dot{y} = 5{,}6t \text{ м/с}.$$

$$V_x(t_1) = 2{,}2 \text{ м/с}, \ V_y(t_1) = 5{,}6 \text{ м/с}.$$

Модуль скорости точки

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{2{,}2^2 + 5{,}6t^2} \text{ м/с},$$

$$V(t_1) = 6 \text{ м/с}.$$

Проекции ускорения точки на оси x и y равны

$$W_x = \dot{V}_x = 0, \ \ W_y = \dot{V}_y = 5{,}6 \text{ м/с}.$$

Модуль ускорения $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 5{,}6$ м/с.

Модуль касательного ускорения точки вычисляется по формуле

$$W_\tau = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \frac{\left|V_x W_x + V_y W_y\right|}{V},$$

Нормальное ускорение $W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}$.

Радиус кривизны траектории $\rho = \dfrac{V^2}{W_n}$.

Результаты вычислений по приведенным формулам будут:

$$W_\tau(t_1) = 5{,}25 \text{ м/с}^2, \ \ W_n = 1{,}86 \text{ м/с}^2, \ \rho = 19{,}3 \text{ м}.$$

Вектор скорости точки строим по составляющим $\mathbf{V}_x$ и $\mathbf{V}_y$ точки (рис. 1). Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории точки. Вектор ускорения точки строим по составляющим $\mathbf{W}_x$ и $\mathbf{W}_y$ вектора ускорения, а затем раскладываем на касательное ($\mathbf{W}_\tau$) и нормальное ($\mathbf{W}_n$) ускорения. Обратим внимание, что вектор ускорения точки направлен в сторону вогнутости траектории точки.

Задача 2. Для заданного положения механизма определить скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 2, а схемы механизмов для выполнения заданий — на рис. 2.

Пример решения задачи

Схема механизма в заданном положении изображена на рис. 3; исходные данные приведены в табл. 3.

Р е ш е н и е.

1. Определение скоростей точек и угловой скорости звена AB. Вычисляем модуль скорости точки A

$$V_A = \omega_{OA} OA = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5 \text{ м/с}.$$

Определяем положение мгновенного центра скоростей звена AB. Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA. Скорость точки B направлена параллельно направляющим ползуна. Мгновенный

Таблица 2

Номер варианта	Размеры, м				ω_{OA}, c^{-1}	ε_{OA}, c^{-2}	V_A, м/с	W_A, м/с^2
	OA	r	AB	AC				
1	0,3	–	0,6	0,15	3	10	–	–
2	0,35	–	0,6	0,4	4	8	–	–
3	0,4	0,15	–	0,8	1,5	1	–	–
4	0,3	–	0,35	0,15	2	3	–	–
5	0,35	–	0,75	0,4	5	10	–	–
6	0,4	0,15	–	0,075	1,5	2	–	–
7	–	0,2	–	0,1	–	–	0,5	0,3
8	0,25	–	0,5	0,3	1,5	1	–	–
9	–	0,3	–	0,15	–	–	0,7	0,5
10	0,5	–	–	0,25	3	1,5	–	–

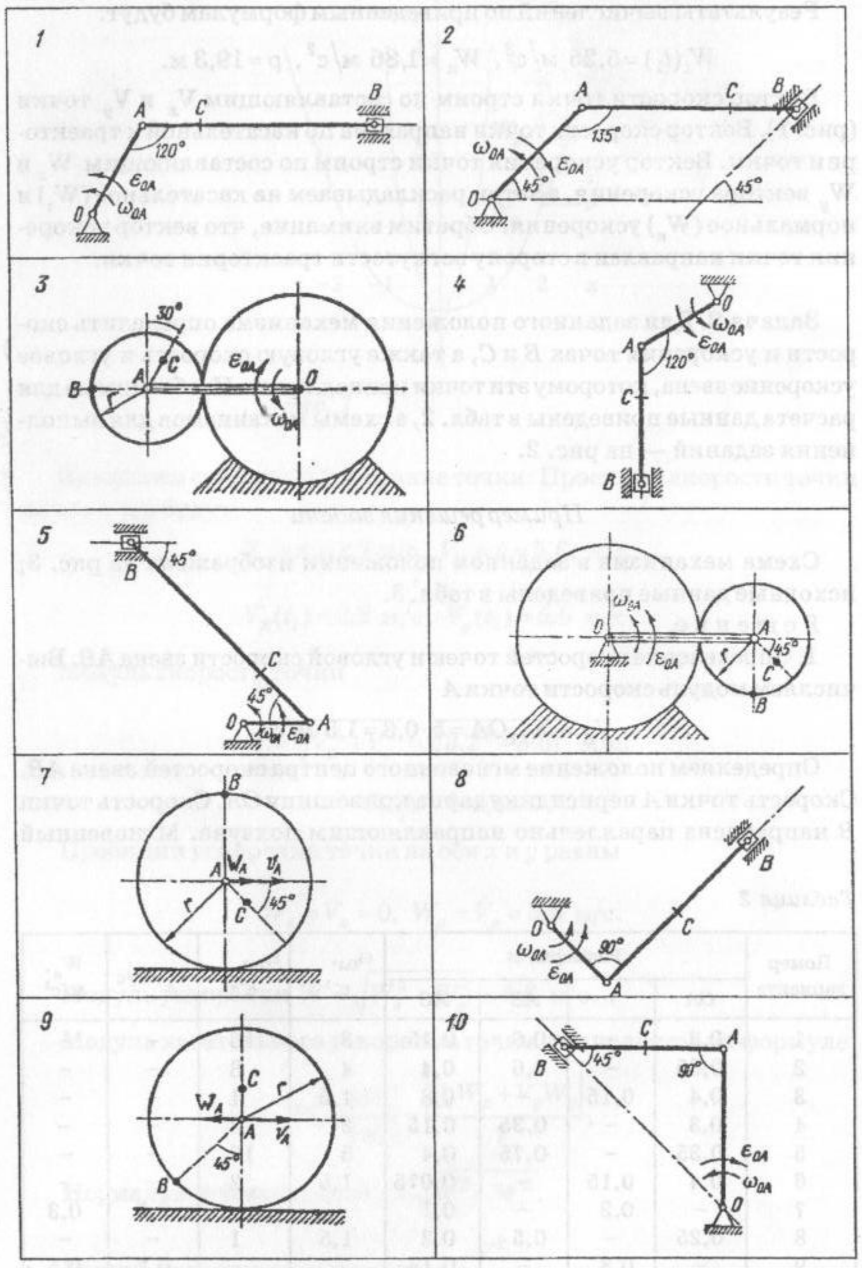


Рис. 2

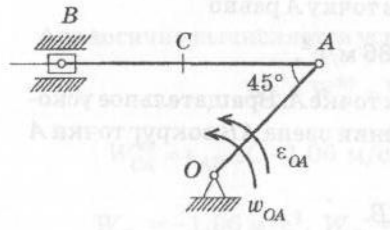


Рис. 3

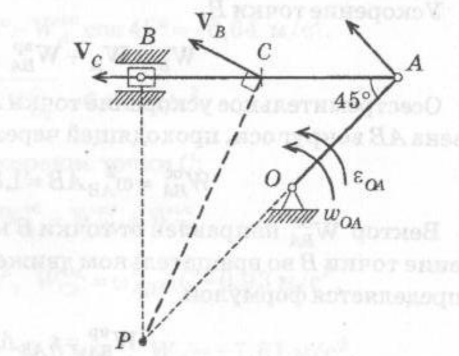


Рис. 4

Таблица 3

Размеры, м			ω_{OA}, c^{-1}	ε_{OA}, c^{-2}
OA	*AB*	*AC*		
0,3	0,6	0,3	5	15

центр скоростей *P* звена *AB* находится в точке пересечения перпендикуляров к скоростям в точках *A* и *B*.

Угловая скорость звена *AB* (рис. 4)

$$\omega_{AB}=\frac{V_A}{PA},\ PA=\frac{AB}{\cos 45^\circ}=0{,}85\ \text{м},\ \omega_{AB}=1{,}76\ \text{с}^{-1}.$$

Скорости точек *B* и *C* будут:

$V_B=\omega_{AB}\ PB,\ PB=0{,}6\ \text{м},\ V_B=1{,}05\ \text{м},$

$V_C=\omega_{AB}PC,\ PC=0{,}67\ \text{м},\ V_C=1{,}18\ \text{м}.$

Вектор V_C скорости точки *C* направлен перпендикулярно отрезку *PC* в направлении вращения звена *AB*.

Проверку правильности решения можно провести, используя теорему о равенстве проекций скоростей двух точек тела на ось, проведенную через эти точки.

2. Определение ускорений точек и углового ускорения звена (рис. 5).

Сначала определяем ускорение точки *A*:

$$\mathbf{W}_A=\mathbf{W}_A^{\text{вр}}+\mathbf{W}_A^{\text{ос}},\quad \mathbf{W}_A^{\text{вр}}=\varepsilon_{OA}OA=4{,}5\ \text{м/с}^2,$$

$$\mathbf{W}_A^{\text{ос}}=\omega_{OA}^2 OA=7{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Вектор направлен от точки *A* к точке *O*. Вектор направлен перпендикулярно *OA* в направлении вращения.

Ускорение точки B.

$$\mathbf{W}_B = \mathbf{W}_A + \mathbf{W}_{BA}^{\text{вр}} + \mathbf{W}_{BA}^{\text{ос}}. \qquad (1)$$

Осестремительное ускорение точки B во вращательном движении звена AB вокруг оси, проходящей через точку A равно

$$W_{BA}^{\text{ос}} = \omega_{AB}^2 AB = 1{,}86 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{W}_{BA}^{\text{ос}}$ направлен от точки B к точке A. Вращательное ускорение точки B во вращательном движении звена AB вокруг точки A определяется формулой

$$W_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon_{AB} AB.$$

Вектор $\mathbf{W}_{BA}^{\text{вр}}$ перпендикулярен AB. Направление ускорения точки B параллельно направляющим ползуна. Направим для определенности вектор $\mathbf{W}_{BA}^{\text{вр}}$ в направлении оси x (рис. 5) и спроектируем обе части равенства (1) на ось x:

$$0 = W_A^{\text{вр}} \cos 45° - W_A^{\text{ос}} \cos 45° + \varepsilon_{AB} AB.$$

Отсюда

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_A^{\text{ос}} \cos 45° - W_A^{\text{вр}} \cos 45°}{AB} = 3{,}55 \text{ с}^{-2}.$$

Знак ε_{AB} показывает, соответствует ли истинное направление $\mathbf{W}_{BA}^{\text{вр}}$ принятому при расчете.

Определив угловое ускорение ε_{AB} звена AB, вычисляем $W_{BA}^{\text{вр}}$, $W_{BA}^{\text{вр}} = 2{,}12$ м/с^2.

Величину ускорения W_B точки найдем способом проекций (рис. 5). Перенесем в точку B соответствующие ускорения точки A, вычислим проекции ускорения точки B на оси x и y и модуль ускорения точки B:

$$W_{Bx} = W_{BA}^{\text{вр}} + W_A^{\text{вр}} \cos 45° - W_A^{\text{ос}} \cos 45° = 0,$$

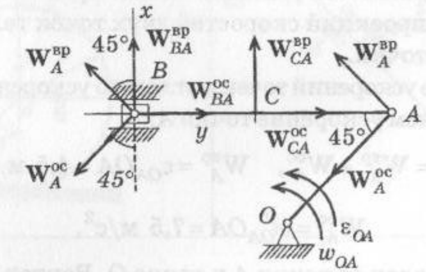


Рис. 5

$$W_{By} = W_{BA}^{\text{ос}} + W_A^{\text{вр}} \cos 45° - W_A^{\text{ос}} \cos 45° = -6{,}64 \text{ м/с}^2,$$

$$W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2} = 6{,}64 \text{ м/с}^2.$$

Аналогично вычисляется ускорение точки C:

$$\mathbf{W}_C = \mathbf{W}_A^{\text{вр}} + \mathbf{W}_A^{\text{ос}} + \mathbf{W}_{CA}^{\text{вр}} + \mathbf{W}_{CA}^{\text{ос}},$$

$$W_{CA}^{\text{вр}} = \varepsilon_{AB} AC - 1{,}06 \text{ м/с}^2, \;\; W_{CA}^{\text{ос}} = \omega_{AB}^2 AC - 0{,}93 \text{ м/с}^2,$$

$$W_{Cx} = -1{,}06 \text{ м/с}^2, \;\; W_{Cy} = -7{,}6 \text{ м/с}^2, \;\; W_C = -7{,}61 \text{ м/с}^2.$$

Решение задачи закончено.

Задача 3. Точка M движется относительно тела D. По заданным уравнениям относительного движения точки M и уравнениям движения тела D определить для заданного момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M. Схемы механизмов для выполнения заданий показаны на рис. 6, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 4.

Пример решения задачи

Схема механизма показана на рис. 7. Дано: $S_r = 0{,}15 + 0{,}1 \sin \frac{\pi}{2} t$, м; $\varphi_e = 1{,}5t^2 - 0{,}2t$, рад; $t_1 = 0{,}5$ с.

Р е ш е н и е. Положение точки M на теле D определяется расстоянием $S_r(t_1)$. При $t = t_1$ $S_r(t_1) = OM_1 = 0{,}22$ м. Абсолютную скорость точки M найдем, используя теорему сложения скоростей:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_e.$$

Модуль относительной скорости

$$V_r = \left|\frac{dS_r}{dt}\right|, \quad \frac{dS_r}{dt} = 0{,}1\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t, \quad \left.\frac{dS_r}{dt}\right|_{t=t_1} = 0{,}11 \text{ м/с}.$$

Положительный знак у $\frac{dS_r}{dt}$ в момент времени t_1 показывает, что вектор направлен в сторону возрастания S_r. Модуль относительной скорости точки M равен: $V_r = 0{,}11$ м/с. Модуль переносной скорости $V_e = \omega_e R$, где R — расстояние от точки M_1 до оси вращения тела D

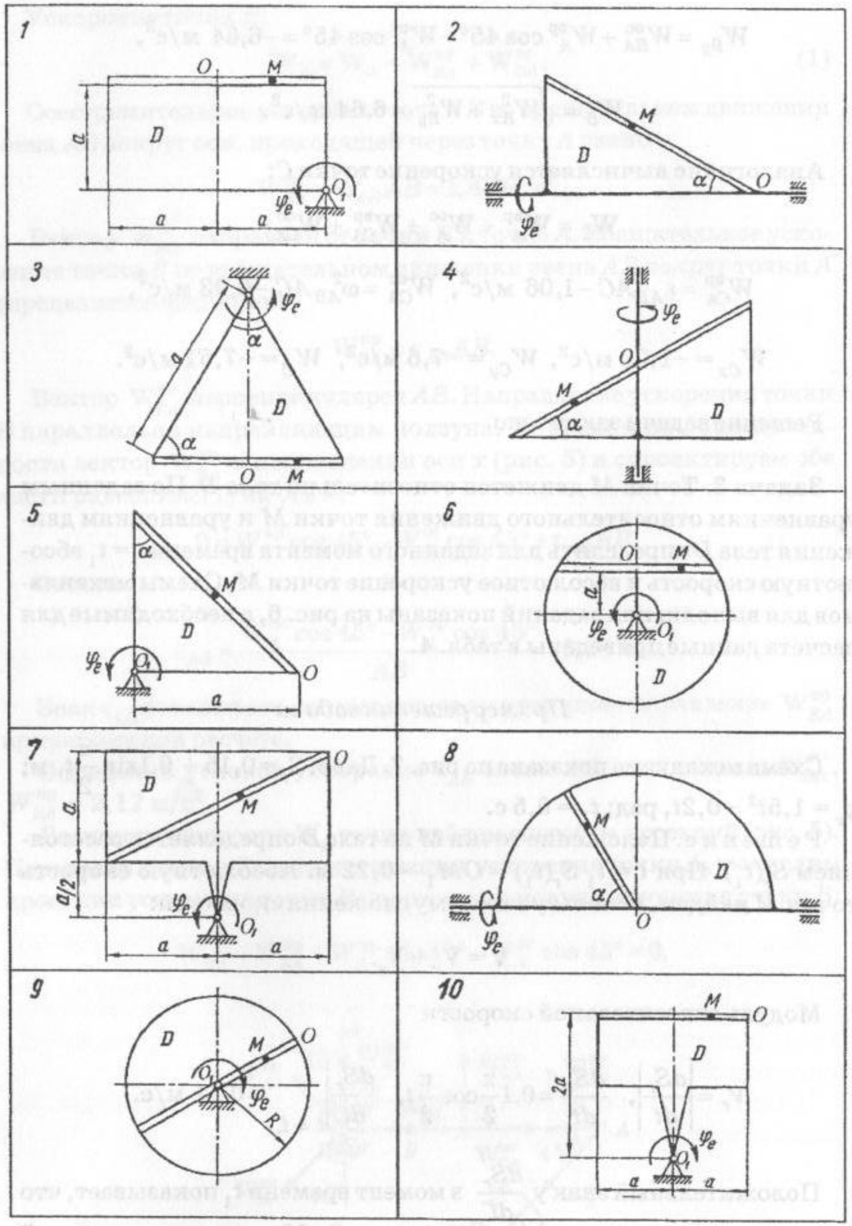


Рис. 6

Таблица 4

Номер варианта	Уравнение относительного движения точки M $OM = S_r(t)$, м	Уравнение движения тела D $\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	t_1, с	R, м	a, м	α, град
1	$0{,}25\sin\frac{\pi p}{3}t$	$t^2 - 0{,}25t$	1	–	0,3	–
2	$0{,}2t^2 + 0{,}1t$	$t^3 - 0{,}3t$	1	–	–	30
3	$0{,}2\cos\frac{\pi p}{4}t$	$0{,}5t^2 - 0{,}2t$	1	–	0,4	60
4	$0{,}25t^2 + 0{,}1t$	$t^2 - 0{,}1t$	1	–	–	30
5	$0{,}5t^2 - 0{,}4t$	$0{,}5t^3 - 0{,}5t$	1	–	0,5	45
6	$0{,}2\sin\pi t$	$0{,}8t^2 + 0{,}1t$	1/3	–	0,3	–
7	$0{,}3t^2 + 0{,}2t$	$0{,}5t^2 + 0{,}25t$	1	–	0,5	–
8	$0{,}2t^2 - 0{,}2t$	$t^2 - 0{,}5t$	1,5	–	–	60
9	$0{,}25t^2 - 0{,}25t$	$1{,}5t^2 - 0{,}5t$	1	0,5	–	–
10	$0{,}25\sin\frac{\pi p}{6}t$	$0{,}6t^2 - 0{,}2t$	1	–	0,5	–

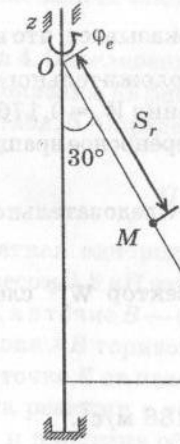


Рис. 7

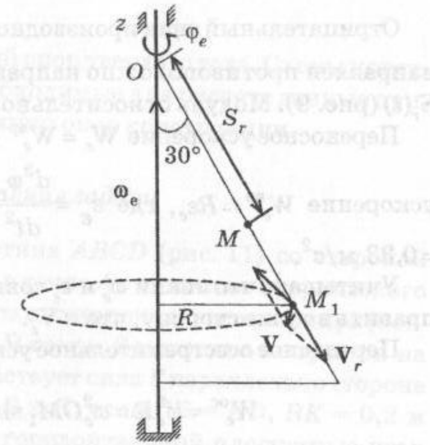


Рис. 8

(рис. 8); ω_e — угловая скорость тела D. Проекция вектора ϖ_e на ось вращения тела D

$$\omega_{ez} = \frac{d\varphi_e}{dt} = 3t - 0{,}2\ \text{c}^{-1}.$$

При $t = t_1$, $\omega_{ez} > 0$, следовательно, вектор ϖ_e совпадает с положительным направлением оси z.

Модуль угловой скорости тела D при $t = t_1$ равен: $\omega_e = 1{,}3\ c^{-1}$. Величина переносной скорости точки M: $V_e = \omega_e OM_1 \sin\alpha = 0{,}143$ м/с. Вектор $\mathbf{V}_e$ направлен по касательной к окружности радиуса R в направлении вращения тела D. Векторы $\mathbf{V}_r$ и $\mathbf{V}_e$ взаимно перпендикулярны, поэтому модуль абсолютной скорости точки M (см. рис. 8)

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 0{,}18\ \text{м/с}.$$

Перейдем к вычислению абсолютного ускорения точки M. В соответствии с теоремой сложения скоростей абсолютное ускорение точки M равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_r + \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_c.$$

Модуль относительного ускорения

$$W_r = \left|\frac{dV_r}{dt}\right|, \quad \frac{dV_r}{dt} = -0{,}1\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}t, \quad \left.\frac{dV_r}{dt}\right|_{t=t_1} = -0{,}176\ \text{м/c}^2.$$

Отрицательный знак производной $\dfrac{dV_r}{dt}$ показывает, что вектор $\mathbf{V}_r$ направлен противоположно направлению положительного отсчета $S_r(t)$ (рис. 9). Модуль относительного ускорения $W_r = 0{,}176$ м/с^2.

Переносное ускорение $\mathbf{W}_e = \mathbf{W}_e^{\text{вр}} + \mathbf{W}_e^{\text{ос}}$. Переносное вращательное ускорение $W_e^{\text{вр}} = R\varepsilon_e$, где $\varepsilon_e = \dfrac{d^2\varphi_e}{dt^2} = 3\ \text{c}^{-2}$. Следовательно, $W_e^{\text{вр}} = 0{,}33\ \text{м/c}^2$.

Учитывая, что знаки ω_e и ε_e совпадают, вектор $\mathbf{W}_e^{\text{вр}}$ следует направить в ту же сторону, что и $\mathbf{V}_e$.

Переносное осестремительное ускорение

$$W_e^{\text{ос}} = \omega_e^2 R = \omega_e^2 OM_1 \sin 30^\circ = 0{,}186\ \text{м/c}^2.$$

Вектор $\mathbf{W}_e^{\text{ос}}$ направлен к оси вращения тела D.

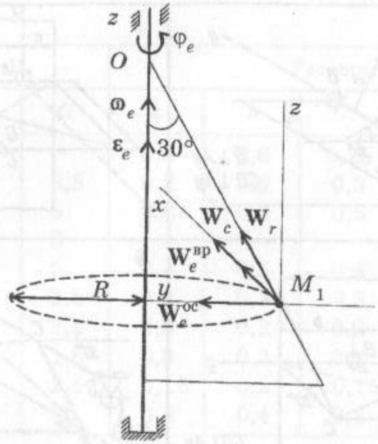


Рис. 9

Кориолисово ускорение $\mathbf{W}_c = 2\omega_e\mathbf{V}_r$. Модуль кориолисова ускорения $W_c = 2\omega_e V_r \sin 30^\circ = 0{,}143\ \text{м/c}^2$. Направление ускорения Кориолиса определяется по правилу векторного произведения.

Модуль абсолютного ускорения точки M_1 находим методом проекций (см. рис. 9):

$$W_x = W_e^{\text{вр}} + W_c = 0{,}47\ \text{м/c}^2, \quad W_y = W_e^{\text{ос}} + W_r\cos 60^\circ = 0{,}27\ \text{м/c}^2,$$

$$W_z = W_r\cos 30^\circ = 0{,}15\ \text{м/c}^2, \quad W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = 0{,}56\ \text{м/c}^2.$$

Решение задачи закончено.

Задача 4. Определение реакций опор твердого тела. Схемы конструкций показаны на рис. 10. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 5. Определить реакции опор конструкции.

Пример решения задачи

Квадратная однородная пластина $ABCD$ (рис. 11) со стороной $a = 1$ м и весом 0,8 кН закреплена в точке A с помощью сферического шарнира, а в точке B — с помощью цилиндрического шарнира (петли). Сторона AB горизонтальна. В точке E пластина опирается на острие. В точке K на пластину действует сила F параллельно стороне AB. Найти реакции в точках A, B и E, если $CE = ED$, $BK = 0{,}2$ м $F = 1$ кН и пластина образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 30^\circ$.

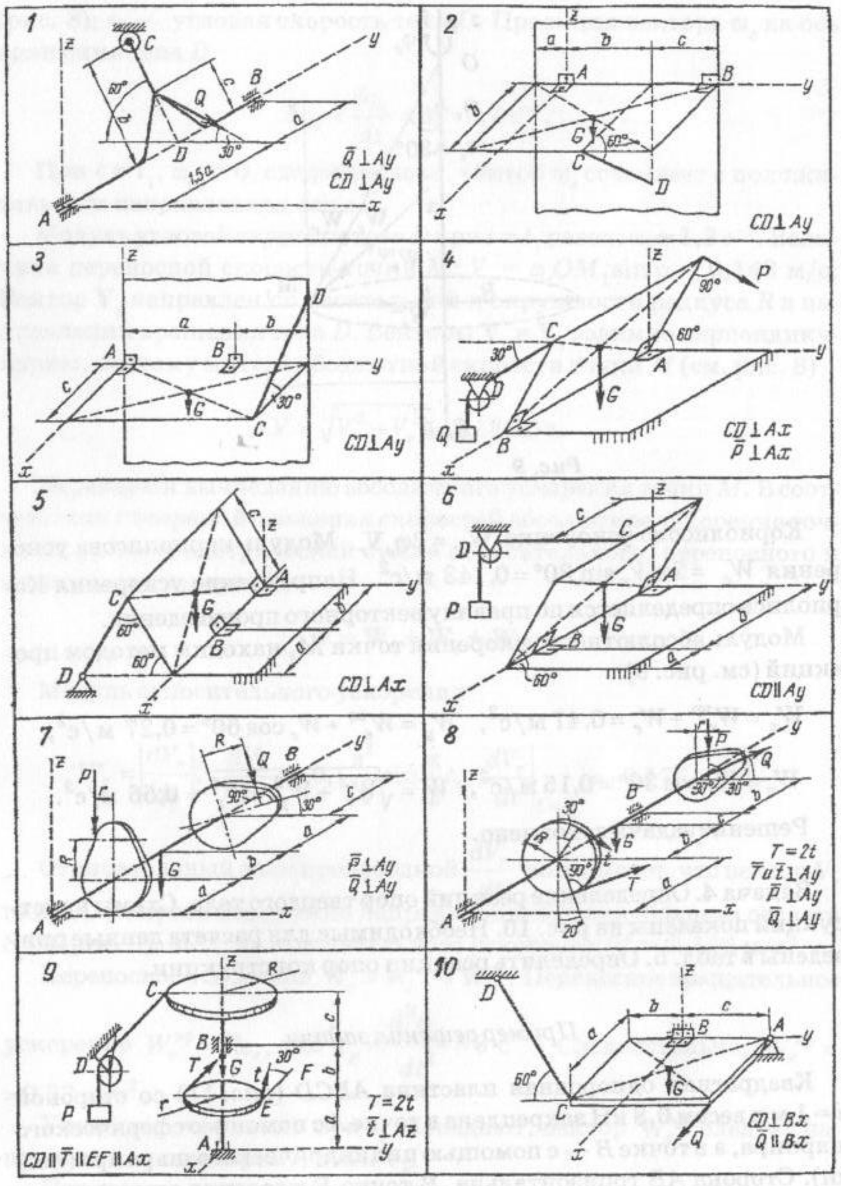


Рис. 10

Таблица 5

Номер варианта	Силы, кН			Размеры, м				
	Q	T	G	a	b	c	R	r
1	3	–	–	0,5	0,6	0,25	–	–
2	–	–	3,5	0,2	0,6	0,3	–	–
3	–	–	5	0,5	0,3	0,5	–	–
4	6	–	3	–	–	–	–	–
5	–	–	5	0,4	0,5	0,5	–	–
6	–	–	2,5	0,2	0,7	0,3	–	–
7	3	–	2,5	0,3	0,2	0,3	0,2	0,1
8	1	3	1,5	0,3	0,3	0,2	0,2	0,15
9	–	5	2,5	0,15	0,2	0,15	0,2	0,1
10	5	–	3	0,5	0,4	0,5	–	–

Решение. Рассмотрим равновесие пластины. На нее действуют две активные силы: **P** и **F**. Так как пластина однородная, сила тяжести **P** приложена в точке пересечения диагоналей. На основании принципа освобождаемости заменяем действие связей (сферического и цилиндрического шарниров и острия E) их реакциями (рис. 11). Реак-

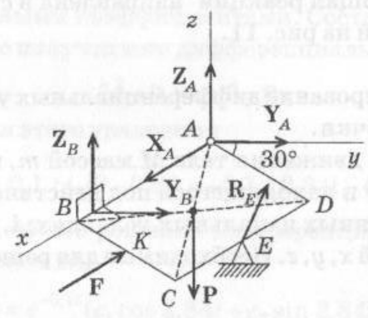


Рис. 11

ция $\mathbf{R}_E$ направлена перпендикулярно плоскости пластины. Таким образом, в данной задаче шесть неизвестных величин: X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B и R_E. Для их определения составляем уравнения равновесия системы сил, действующих на пластину:

$$\sum_{j=1}^{n} F_{jx} \equiv X_A - F = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_{jy} \equiv Y_A + Y_B + R_E \sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_{jz} \equiv Z_A + Z_B + R_E \cos\alpha - P = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} M_x(\bar{F}_j) \equiv R_E a - P\frac{a}{2}\cos\alpha = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} M_y(\bar{F}_j) \equiv -Z_B a - R_E\frac{a}{2}\cos\alpha + F\cdot BK\sin\alpha + P\frac{a}{2} = 0.$$

Из уравнений равновесия находим неизвестные:

$X_A = F = 1$ кН; $R_E = 1/2P\cos\alpha = 0{,}346$ кН,
$Z_B = 1/a(F\cdot BK\sin\alpha + 1/2Pa - R_E a/2\cos\alpha) = 0{,}35$ кН,
$Z_A = P - R_E\cos\alpha - Z_B = 0{,}15$ кН,
$Y_B = -1/a(F\cdot BK\cos\alpha + R_E a/2\sin\alpha) = -0{,}35$ кН,
$Y_A = -Y_B - R_E\sin\alpha = 0{,}18$ кН.

Таким образом, $X_A = 1$ кН, $Y_A = 0{,}18$ кН, $Z_A = 0{,}15$ кН, $Y_B = -0{,}35$ кН, $Z_B = 0{,}35$ кН, $R_E = 0{,}346$ кН.

Знак «минус» в значении Y_B свидетельствует о том, что в действительности составляющая реакции направлена в сторону, противоположную указанной на рис. 11.

Задача 5. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Найти уравнения движения тела M массой m, принимаемого за материальную точку и находящегося под действием силы $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_x\mathbf{k}$, при заданных начальных условиях; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты (единичные векторы) осей x, y, z. Необходимые для решения данные приведены в табл. 6.

Пример решения задачи

Исходные данные: $m = 1{,}2$ кг, $\mathbf{F} = -(3{,}6x + 0{,}9\dot{x})\mathbf{i}$, H, $x_0 = 1$ м, $\dot{x}_0 = 0{,}5$ м/с. Найти уравнение движения точки.

Решение. На точку действует сила $\mathbf{F}$, проекция которой на ось x равна коэффициенту при $\mathbf{i}$. Следовательно, дифференциальное уравнение движения точки $m\mathbf{W} = \mathbf{F}$ в проекции на ось x будет

$$1{,}2\ddot{x} = -(3{,}6x + 0{,}9\dot{x}),$$

или

$$\ddot{x} + 0{,}5\dot{x} + 3x = 0.$$

Таблица 6

Номер варианта	m, кг	F, Н	Начальные условия					
			x_0, м	y_0, м	z_0, м	$\dot{x}_0$, м/с	$\dot{y}_0$, м/с	$\dot{z}_0$, м/с
1	1	$-(4x+0{,}5\dot{x})\mathbf{i}$	1	–	–	0,2	–	–
2	1,5	$-(3y+0{,}15\dot{y})\mathbf{j}$	–	0,5	–	–	0,1	–
3	1,2	$-(3{,}6z+0{,}12\dot{z})\mathbf{k}$	–	–	1	–	–	0,5
4	3	$-(12x+0{,}6\dot{x})\mathbf{i}$	1	–	–	0,3	–	–
5	1,8	$-(5{,}4z+0{,}27\dot{z})\mathbf{k}$	–	–	0,5	–	–	0,2
6	1,5	$-4{,}5y + 3$	–	0,5	–	–	1	-
7	2	$-8z + 1{,}2$	–	–	0,5	–	–	0,1
8	2,5	$-5x + 7{,}5$	1,5	–	–	1	–	–
9	3	$-9y + 4{,}2$	–	1	–	–	0,5	–
10	5	$-15z + 7{,}5$	–	–	0,5	–	–	1

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение полученного дифференциального уравнения

$$\lambda^2 + 0{,}9\lambda + 3 = 0$$

и определяем корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -0{,}1 \pm i\sqrt{9 - 0{,}81} = -0{,}1 \pm 2{,}84i, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения движения точки имеет вид

$$x = e^{-0{,}1t}(c_1\cos 2{,}84t + c_2\sin 2{,}84t).$$

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 находим, используя начальные условия:

$$x_0 \equiv 1 = c_1,$$

$$\dot{x}_0 \equiv 0{,}5 = -0{,}1c_1 + 2{,}84c_2.$$

Отсюда $c_1 = 1$, $c_2 = 0{,}22$. Уравнение движения точки

$$x = e^{-0{,}1t}(\cos 2{,}84t + 0{,}22\sin 2{,}84t).$$

Задача 6. Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Начальное положение системы показано на рис. 12. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 7. Учитывая трение скольжения тела *1* (варианты *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *8*, *9*, *10*) и сопротивление качению тела *3*, катящегося без скольжения (варианты *1*, *2*, *5*, *6*, *7*, *8*, *9*), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела *1* в тот момент времени, когда пройденный им путь станет S. В задаче приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 — массы тел *1*, *2*, *3*, *4*; R_2, r_2, R_3, r_3 — радиусы больших и малых окружностей; i_{2x}, $i_{3\xi}$ — радиусы инерции тел *2* и *3* относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры масс; f — коэффициент трения скольжения; δ — коэффициент трения качения. Блоки и катки, для которых радиусы инерции не указаны, считать однородными сплошными цилиндрами.

Пример решения задачи

Схема механической системы показана на рис. 13. Исходные данные: $m_1 = m$, $m_2 = m_3 = 2m$, $R_2 = 0{,}16$ м, $R_3 = 0{,}25$ м, $i_{2x} = 0{,}15$ м, $\alpha = 30°$, $\delta = 0{,}002$ м, $S = 2$ м.

Найти V_1 – скорость груза в конечном положении.

Р е ш е н и е. Для решения задачи используем теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = A^e + A^i,$$

где T и T_0 — кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; A^e — сумма работ всех внешних сил, приложенных к системе на рассматриваемом перемещении; A^i — сумма работ всех внутренних сил на этом же перемещении. Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, $A^i = 0$. Так как в начальном положении система находится в покое, $T_0 = 0$. Вычислим кинетическую энергию T системы в конечном положении и сумму работ A^e всех внешних сил на перемещении системы из начального положения в конечное.

Изобразим систему в конечном положении (рис. 14). Кинетическая энергия системы в конечном положении равна сумме кинетических энергий тел *1*, *2* и *3*:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Кинетическая энергия груза *1*, движущегося поступательно, $T_1 = 1/2\, m_1 V_1^2$.

Кинетическая энергия тела *2*, вращающегося вокруг неподвижной оси, $T_1 = 1/2\, I_{2x}\omega_2^2$. Здесь $I_{2x} = m_2 i_{2x}^2$ — момент инерции тела *2* относительно его оси вращения; $\omega_2 = V_1 / r_2$ — угловая скорость тела *2*.

Таблица 7

Номер варианта	m_1,	m_2,	m_3, кг	m_4,	R_2,	R_3, м	i_{2x},	$i_{3\xi}$,	α,	β, град	f	δ, м	S, м
1	m	$0{,}5m$	$1{,}5m$	–	0,2	0,2	0,15	–	30	45	0,1	0,002	1,2
2	То же	То же	$0{,}2m$	–	–	0,3	–	0,25	То же	То же	0,12	То же	1,5
3	»	»	$0{,}1m$	$0{,}5m$	0,2	–	0,15	–	»	–	0,1	–	1,2
4	»	»	То же	То же	–	–	–	–	45	–	То же	–	1,5
5	»	$0{,}3m$	$0{,}3m$	–	–	0,3	–	0,2	30	45	0,15	0,002	То же
6	»	$0{,}5m$	$2m$	$2m$	–	0,25	–	–	–	–	–	То же	»
7	»	То же	То же	$0{,}2m$	0,2	0,2	0,15	–	30	–	–	»	»
8	»	»	$0{,}3m$	–	–	0,3	–	–	То же	45	0,1	0,001	1,8
9	»	$0{,}25m$	$0{,}1m$	–	–	То же	–	–	15	30	То же	0,002	2,0
10	»	$0{,}5m$	$0{,}25m$	m	0,3	0,3	0,2	0,15	30	–	»	–	1,5

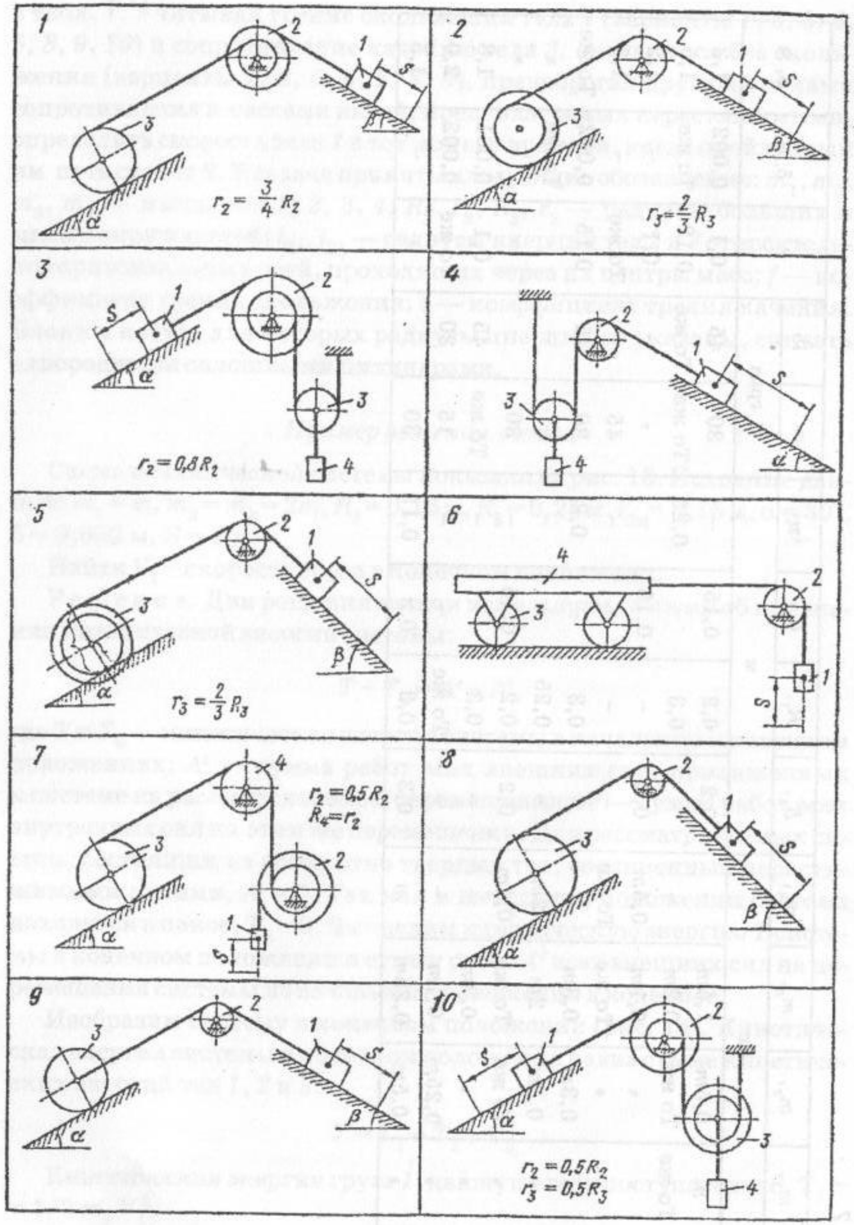
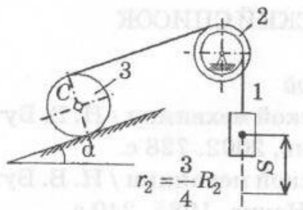


Рис. 12



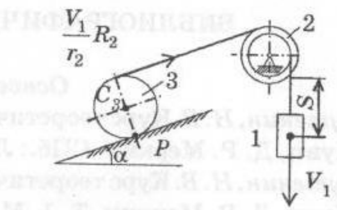


Рис. 13 *Рис. 14*

Следовательно, $T = 1/2\, m_2\, i_{2x}^2\, (V_1 /\, r_2)^2$. Кинетическая энергия катка 3, совершающего плоское движение:

$$T_3 = 1/2\, m_3 V_{c3}^2 + 1/2\, I_{3\xi}\, \omega_3^2,$$

где $V_{C3} = \dfrac{V_1 R_2}{2r_2}$; $\omega_3 = \dfrac{V_1 R_2}{2r_2 R_3}$ (*P* — мгновенный центр скоростей катка 3); $I_{3\xi} = m_3 R_3^2/2$ — момент инерции катка 3 относительно его оси симметрии.

Таким образом, $T_3 = 3/16 \dfrac{m_3 R_2^2}{r_2^2} V_1^2$ и $T = 1/2 m(1 + 2 i_{2x}^2 / r_2^2 + 3/4 R_2^2 / r_2^2) V_1^2 = 2{,}75 m V_1^2$.

Перейдем к вычислению работы всех внешних сил, приложенных к системе, на рассматриваемом перемещении системы.

Работа сил тяжести $m_1 g$, $m_3 g$ и момента трения качения катка будет

$$A^e = m_1 g S - m_3 g \frac{R_2}{2r_2} S \sin\alpha - \delta m_3 g \cos\alpha \frac{R_2}{2r_2 R_3} S =$$

$$= mgS\left(1 - \frac{R_2}{r_2}\sin\alpha - \delta \frac{R_2}{r_2 R_3}\cos\alpha\right) = 6{,}26m.$$

Приравнивая T и A^e, определяемые полученными формулами, находим $V_1 = 1{,}49$ м/с.

Решение задачи закончено.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. *Бутенин, Н. В.* Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. СПб.: Лань, 2002. 728 с.

2. *Бутенин, Н. В.* Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. Т. 1. М.: Наука, 1985. 240 с.

3. *Бутенин, Н. В.* Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. Т. 2. М.: Наука, 1985. 496 с.

Дополнительный

4. *Яблонский, А. А.* Курс теоретической механики / А. А. Яблонский. СПб.: Лань, 2002. 710 с.

5. *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. М.: Высш. шк., 1995. 416 с.

6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А. А. Яблонского. М.: Высш. шк., 1985. 367 с.

7. *Бать, М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельсон. М.: Наука, 1990. 672 с.