МИНИСТЕРСТВО ВНУТРЕННИХ ДЕЛ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОРОНЕЖСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра высшей математики

Думачев В.Н.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Воронеж - 2012

УДК 519.2
Д82

Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры высшей математики протокол №3 от 22.11.2011 г.

Рассмотрены и одобрены на заседании методического совета протокол №3 от 26.11.2011 г.

Д82 Думачев В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. - Воронеж: Воронежский институт МВД России, 2012. – 160 с.

В методических материалах, предназначенных для слушателей ФЗО, обучающихся по специальности 210406.65 -"Сети связи и системы коммутации", дается рабочая программа, контрольные задания и рекомендации по изучению дисциплины теория вероятностей и математическая статистика.

Д $\dfrac{\mathbf{1203021300\ \text{-}\ 39}}{\mathbf{221\ \text{-}\ 09}}$ 1(III) **УДК 519.2**

Оглавление

Введение

Курс теории вероятностей и математической статистики, изучаемый слушателями-заочниками инженерно-технических специальностей, состоит из следующих разделов: "Основы теории вероятностей", "Основы теории случайных процессов", "Элементы математической статистики". Данный курс ставит своей задачей сообщить слушателю сведения по теории вероятностей и математической статистике, необходимые для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, а также развить навыки логического мышления. Настоящие методические указания имеют целью помочь слушателю заочной формы обучения в самостоятельной работе над учебным материалом.

В каждом параграфе приводятся необходиме теоретические сведения и образцы решения соответствующих задач.

Нумерация задач - сквозная по всему пособию.

Нумерация примеров - сквозная по главам.

Используются обозначения:

$\square$ - начало доказательства свойства,

$\blacksquare$ - конец доказательства свойства, леммы или теоремы,

$\blacktriangle$ - конец примера.

Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

Написание контрольной работы является составной частью самостоятельной работы слушателя-заочника. Ее выполнение предполагает демонстрацию слушателем сведений и знаний, полученных из учебной и методической литературы. При подготовке контрольной работы необходимо показать глубокое знание теоретического материала и грамотное применение его для решения практических задач. Кроме этого, следует стремиться к выработке навыков грамотного выбора и использования учебной и методической литературы. Прежде чем приступать к выполнению контрольных заданий, необходимо внимательно изучить теоретический материал по указанным в рабочей программе разделам. В данном методическом пособии в помощь слушателю предлагается также 62 разобранных примера. Слушатель-заочник выполняет контрольную работу строго в соответствии со своим вариантом. Номер варианта определяется по номеру в списке группы, предоставляемым преподавателем. Произвольный выбор варианта контрольных работ не допускается. Контрольная работа включает в себя 36 задач.

При оформлении контрольной работы следует обратить внимание на следующие моменты:

- условие каждой задачи записывается полностью;

- решение задач излагается подробно, при необходимости делаются ссылки на учебную литературу;

- с левой стороны страницы необходимо оставить поля для пометок и замечаний преподавателя.

Контрольные работы оцениваются преподавателем (при условии правильного выполнения не менее 20 задач) по системе «зачтено» или «не зачтено». Если контрольная работа не зачтена, слушатель должен внимательно изучить рецензию на контрольную работу, исправить все недостатки, указанные преподавателем, и прислать на повторную проверку исправленные задания совместно с первоначальной работой. К итоговому зачету слушатель-заочник допускается только при наличии зачтенной контрольной работы.

Глава 1

Рабочая программа дисциплины ТВиМС

1.1 Организационно-методический раздел

Целью изучения курса ТВ и МС является фундаментализация образования курсантов, формирование у них научного мировоззрения и системного мышления, приобретение знаний, умений и навыков по вероятностному и статистическому моделированию случайных однородных явлений массового характера и случайных процессов в естествознании и технике.

Задачи дисциплины - обучение курсантов:

• основным методам теории вероятностей и математической статистики;

• навыкам построения и исследования вероятностных моделей реальных процессов и явлений.

Междисциплинарные связи. Изучение дисциплины базируется на знаниях средней школы, курсов математики и информатики. Данный курс обеспечивает изучение дисциплин «Моделирование систем», «Теория информации», «Математические основы криптографии»", "Квантовая и оптическая электроника".

Требования к знаниям и умениям по дисциплине.

В результате изучения дисциплины курсант должен иметь представление:

• о значении теории вероятности и математической статистики, их месте в системе фундаментальных наук и роли в решении практических задач;

• об истории развития и современных направлениях в теории вероятностей и математической статистики;

• о методологических вопросах теории вероятности и математической статистики;

знать:

• аксиоматику и основные понятия теории вероятностей;

• основные методы теории случайных процессов;

• основные понятия и задачи математической статистики;

уметь:

• применять стандартные методы и модели к решению типовых теоретико-вероятностных и статистических задач;

• пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач;

иметь навыки:

• пользования библиотеками прикладных программ для ЭВМ для решения прикладных вероятностных и статистических задач.

В соответствии с рабочим учебным планом на изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» отводится 153 учебных часов, в т.ч. 16 часов - на аудиторные занятия и 137 часа - на самостоятельную работу слушателей.

В рамках изучения дисциплины слушатели должны выполнить домашнюю контрольную работу (типовой расчет).

Обучение по указанной дисциплине завершается сдачей слушатеями зачета.

1.2 Основной раздел

1.2.1 Перечень разделов и тем дисциплины

Структурно дисциплина состоит из 3-х взаимосвязанных разделов, включающих 7 тем.

В первом разделе "Основы теории вероятностей" раскрывается предмет теории вероятностей, её математические основы и применения к типичным моделям естествознания и техники.

Второй раздел - «Основы теории случайных процессов» включает в себя изучение математических основ теории случайных процессов, теорию массового обслуживания, элементы теории игр и теории информации.

Третий раздел - "Элементы математической статистики" - включает в себя основные понятия данного предмета, статистические методы обработки результатов экспериментов и понятие о статистическом моделировании.

1.2.2 Соответствующие темы с перечнем основных вопросов, подлежащих изучению по данной теме

Тема 1. Элементарная теория вероятностей случайных событий

Случайные события и их вероятности. Математические основы теории вероятностей. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Использование простейших комбинаторных методов в теории вероятностей, биноминальная и полиноминальная схемы. Аксиоматика теории вероятностей. Операции над случайными событиями. Независимость случайных событий. Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события. Надежность электрических схем. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Полиномиальное распределение. Наивероятнейшее число появления событий. Предельные теоремы в теории вероятностей. Геометрические вероятности

Тема 2. Случайные величины

Законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин. Функция распределения и плотность распределения вероятностей Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, моменты, мода, медиана Их свойства и интерпретации. Примеры законов распределения дискретных и непрерывных случайных величин: геометрическое, биноминальное, пуассоновское, равномерное, показательное, нормальное, Стьюдента, Максвелла, Эрланга. Вычисление их основных числовых характеристик. Правило трёх сигм.

Случайные векторы и их распределения. Многомерное нормальное распределение. Функции от случайных величин. Функции распределения суммы, произведения и частного случайных величин. Композиция законов распределения. Числовые характеристики меры связи случайных величин. Совместная плотность распределения двух случайных величин. Зависимые и независимые случайные величины. Условные законы распределения. Характеристическая функция. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Тема 3. Случайные последовательности. Теория массового обслуживания

Понятие о случайном процессе. Марковские случайные процессы. Дискретные цепи Маркова. Матрица перехода. Теорема о предельных вероятностях. Элементы теории массового обслуживания.

Матричные игры. Функция потерь. Ситуация равновесия. Чистые стратегии. Смешанные стратегии. Седловая точка в смешанных стратегиях. Сведение задачи теории игр к задаче линейного программирования. Методы решения задач теории игр. Метод Брауна приближенного решения задач теории игр. Позиционные игры. Биматричные игры.

Тема 4. Математические основы теории случайных процессов

Случайные процессы, классификация и их основные характеристики. Понятие об эргодических процессах. Модели случайных процессов, корреляционный и спектральный анализ случайных процессов. Стационарные случайные процессы. Корреляционная теория случайных функция. Спектральная плотность стационарной случайной функции. Преобразование стационарной случайной функции линейной динамической системой. Уравнение Фоккера-Планка. Винеровский процесс. Расчеты методом Ито и стохастические дифференциальные уравнения. Задача фильтрации. Стохастическая финансовая математика.

Тема 5. Энтропия и информация

Энтропия случайных событий и величин. Задачи информационного поиска. Кодирование информации методом Шеннона-Фено. Избыточность кодирования. Симметричные каналы информации. Квантовая информация. Квантовые игры.

Тема 6. Основные понятия и методы математической статистики. Точечное и интервальное оценивание

Генеральная совокупность. Выборка. Статистическая функция распределения. Полигон. Группировка выборки. Гистограмма. Точечные оценки параметров распределения. Получение оценок. Состоятельность, несмещённость и эффективность оценок. Интервальные оценки параметров распределения.

Тема 7. Проверка статистических гипотез. Принцип максимального правдоподобия

Понятие о статистической проверке гипотез. Критическая область и область принятия гипотезы. Критерий Пирсона статистической проверки гипотез о виде функций распределения. Принцип максимального правдоподобия. Порядковые статистики. Статистические методы обработки экспериментальных данных.

1.2.3 Тематика практических занятий

Тема 1. Элементарная теория вероятностей случайных событий

ПРЗ 1. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Комбинаторные схемы в теории вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события. Надежность электрических схем. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Полиномиальное распределение. Наивероятнейшее число появления события. Случайное блуждание по прямой. Предельные теоремы в теории вероятностей. Геометрические вероятности.

Тема 2. Случайные величины

ПРЗ 2. Дискретная случайная величина, закон и плотность ее распределения. Функция распределения дискретной случайной величины. Непрерывная и смешанная случайная величина, закон и плотность ее распределения. Числовые характеристики случайных величин. Теоретические моменты. Дискретные законы распределения. Биномиальный закон распределения. Геометрическое распределение. Гипергеометрическое распределение. Равномерное распределение. Распределение Пуассона. Непрерывные законы распределения. Равномерное распределение. Нормальное распределение. Показательное распределение. Функция надежности. Случайные векторы. Функции случайного аргумента. Системы двух случайных величин. Зависимые и независимые случайные величины. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Функционально зависимые случайные величины. Характеристическая функция. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.

Тема 6. Основные понятия и методы математической статистики. Точечное и интервальное оценивание

ПРЗ 3. Статистическое распределение выборки. Статистическое точечное оценивание. Линейная корреляция. Криволинейная корреляция. Ранговая корреляция. Ранговая корреляция Спирмена. Ранговая корреляция Кендалла.

ПРЗ 4. Проверка статистических гипотез. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона.

1.2.4 Перечень вопросов для подготовки к промежуточной аттестации (зачету, экзамену) по всему курсу

1. Случайные события, элементы комбинаторики, формулы сложения и умножения вероятностей.
2. Геометрическое определение вероятности, условная вероятность, формула полной вероятностей.
3. Противоположные события. Полная группа событий.
4. Условная вероятность. Переоценка гипотез, формула Байеса.
5. Система массового обслуживания. Поток заявок.
6. Независимые события. Вероятность появления хотя бы одного события.
7. Повторные испытания, формула Бернулли.
8. Локальная теорема Лапласа.
9. Интегральная теорема Лапласа.
10. Дискретная случайная величина. Функция распределения и математическое ожидание дискретной случайной величины.
11. Свойства математического ожидания.
12. Дисперсия дискретной случайной величины. Формула для вычисления дисперсии.
13. Дисперсия. Свойства дисперсии. Среднее квадратичное отклонение.
14. Начальные и центральные теоретические моменты и их взаимосвязь.
15. Функции распределения случайной величины. Биноминальное распределение.
16. Функции распределения случайной величины. Распределение Пуассона.
17. Функции распределения случайной величины. Гипергеометричекое распределение.
18. Дифференциальная функция распределения случайной величины. Плотность распределения. Свойства плотности распределения.
19. Плотность распределения. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.

20. Нормальное распределение. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.

21. Нормальное распределение. Вычисление вероятности заданного отклонения. Правило трех сигм.

22. Оценка отклонения теоретического распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс.

23. Показательное распределение. Вероятность попадания в заданный интервал показательно распределенной случайной величины.

24. Показательное распределение. Числовые характеристики показательного распределения.

25. Характеристическая функция. Начальные и центральные теоретические моменты.

26. Характеристическая функция нормального распределения.

27. Характеристическая функция равномерного распределения.

28. Характеристическая функция распределения Пуассона.

29. Смешанные законы распределения и их плотность вероятностей.

30. Система двух случайных величин. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства.

31. Система двух случайных величин. Вероятность попадания случайной точки в полуполосу и прямоугольник.

32. Двумерная плотность вероятности и ее свойства. Нахождения функции распределения по известной плотности распределения.

33. Двумерная плотность вероятности и ее свойства. Вероятность попадания случайной точки в произвольную область.

34. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции.

35. Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратической регрессии.

36. Цепи Маркова. Переходные вероятности. Матрица перехода.

37. Теория матричных игр. Чистая стратегия. Платежная матрица игры. Верхняя и нижняя цена игры. Решение матричной игры методом минимакса.

38. Доминирующие стратегии. Смешанные стратегии. Седловая точка. Игра полковника Блотто.

39. Смешанные стратегии. Метод Брауна приближенного решения теории игр.

40. Биматричные игры.

41. Случайные функции. Корреляционная теория случайных функций. Математическое ожидание случайной функции. Свойства математического ожидания.

42. Корреляционная теория случайных функций. Математическое ожидание случайной функции. Свойства математического ожидания.

43. Дисперсия случайной функции. Свойства дисперсии.

44. Корреляционная функция случайной функции. Свойства корреляционной функции. Нормированная корреляционная функция.

45. Взаимная корреляционная функция. Свойства взаимной корреляционной функции. Нормированная взаимная корреляционная функция.

46. Характеристики суммы случайных функций. Производная случайной функции и ее характеристики.

47. Интеграл от случайной функции и ее характеристики.

48. Стационарные случайные процессы. Корреляционная и нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса.

49. Корреляционная функция производной и интеграла от стационарной случайной функции.

50. Спектральная теория стационарных случайных функций. Спектральная плотность. Дельта-функция и стационарный белый шум.

51. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой.

52. Диффузионные процессы. Уравнение Фоккера-Планка.

53. Винеровский процесс.

54. Расчеты методом Ито и стохастические дифференциальные уравнения.

55. Квантовомеханические процессы. Волновая функция. Матрица плотности.

56. Матрица плотности. Энтропия фон Неймана. Квантовые двухуровневые информационные ячейки - кубиты.

57. Информация. Информационная энтропия Шенона.

58. Энтропия случайных событий и величин. Количество информации.

59. Кодирование сообщения методом Шеннона. Эффективность кода.

60. Зашумленные каналы передачи информации. Пропускная способность канала.

61. Статистические оценки параметров распределения.

62. Смещенные и несмещенные оценки.

63. Групповые и общие средние.

64. Генеральная и выборочная дисперсия.

65. Групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дисперсии.

66. Точность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал.

67. Доверительный интервал для оценки математического ожидания и дисперсии.

68. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения.

69. Метод максимального правдоплдобия.

70. Выборочные уравнения регрессии.

71. Выборочный коэффициент корреляци.

72. Метод Пирсона проверки гипотезы о выборе закона распределения.

73. Ранговая корреляция.

1.2.5 Тематический план дисциплины

«Теория вероятностей и математическая статистика»

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего часов	Ауд. зан.	Из них Л.	П.З	Л.Р.	Самост раб.
1	2	3	4	5	6	7	8
	Раздел 1. Основы теории вероятностей						
1	Элементарная теория вероятностей случайных событий.	24	2	2	2		20
2	Случайные величины	24	4	2	2		20
	Раздел 2. Основы теории случайных процессов						
3.	Случайные последовательности. Теория массового обслуживания.	20					20
4.	Математические основы теории случайных процессов.	20					20
5.	Энтропия и информация	20					20
	Контрольная работа						
	Раздел 3. Элементы математической статистики.						
6.	Основные понятия и методы математической статистики. Точечное и интервальное оценивание	24	4	2	2		20
7.	Проверка статистических гипотез. Принцип максимального правдоподобия.	19	2	2	2		17
	Зачет						
	Итого по курсу.	153	16	8	8		137

Глава 2

Случайные события

2.1 Классическое определение вероятности

Событием (или «случайным событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Достоверным называется событие U, которое в результате опыта непременно должно произойти:

$$P(U) = 1.$$

Невозможным называется событие V, которое в результате опыта не может произойти:

$$P(V) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \leq P(a) \leq 1.$$

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта одно из них непременно должно произойти.

Несколько событий в данном опыте называются **несовместными**, если никакие два из них не могут появиться одновременно.

Несколько событий в данном опыте называются **равновозможными**, если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Если несколько событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможны, то они называются **исходами** («шансами»).

Исход называется **благоприятным событию**, если появление этого исхода влечет за собой появление события.

Вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{2.1}$$

где m– число исходов благоприятных событию,
n – общее число исходов испытания.

Пример 1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях - четная, причем на гранях хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение. Выпишем все исходы, которые могут произойти в результате опыта:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Всего: $n = 6 \times 6 = 36$ исходов. Из полученных исходов выберем те, для которых сумма на выпавших гранях - четная. Их будет 18:

$$(11, 13, 15, 22, 24, 26, 31, 33, 35, 42, 44, 46, 51, 53, 55, 62, 64, 66).$$

Но из них нам необходимо выбрать только те, у которых на одной из граней есть шестерка. Таких исходов только 5:

$$(26, 46, 66, 64, 62).$$

Т.е. исходов, благоприятных нашему событию $m = 5$. Таким образом, искомая вероятность равна $P = m/n = 5/36$. ▲

Задача 1.

Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:
а) сумма выпавших очков равна n;
б) сумма выпавших очков равна n, а разность - k;
в) сумма выпавших очков равна n, а произведение - m.

вариант	n	m	k	вариант	n	m	k	вариант	n	m	k	вариант	n	m	k
1	4	3	2	**8**	4	4	0	**15**	4	3	2	**22**	11	30	1
2	5	4	3	**9**	5	6	1	**16**	5	6	3	**23**	5	4	3
3	6	5	4	**10**	6	8	2	**17**	6	9	4	**24**	6	8	2
4	7	6	5	**11**	7	10	3	**18**	7	12	5	**25**	7	12	1
5	8	7	6	**12**	8	12	4	**19**	8	15	6	**26**	8	16	0
6	9	8	7	**13**	9	14	5	**20**	9	18	7	**27**	9	20	1
7	10	9	8	**14**	10	16	6	**21**	10	21	8	**28**	10	24	2

2.2 Комбинаторные схемы в теории вероятностей

Если опыт состоит в выборе m элементов из n без возвращения и без упорядочивание, то получаемые при этом элементарные исходы носят название сочетания из n элементов по m, а их общее число определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$ - факториал числа n (произведение всех чисел, до n включительно). Числа C_n^m называются биномиальными коэффициентами и имеют следующие полезные свойства:

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_{n+1}^m = C_n^k + C_n^{k-1}, \quad C_n^0 = 1,$$

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k = 2^n.$$

Для решения практических задач часто оказывается полезной следующая формула обобщенной гипергеометрической вероятности:

$$P = \frac{C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot ... \cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_N^M},$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_k = N$, $m_1 + m_2 + ... + m_k = M$.

Пример 2. В группе 20 курсантов, среди которых 4 отличника, 6 хорошистов, 7 троечников, остальные - двоечники. По списку наудачу отобраны 5 курсантов. Найти вероятность того, что среди отобранных курсантов 3 отличника, 1 хорошист и 1 троечник.

Решение. Приведем обозначения в соответствие с формулой обобщенной гипергеометрической вероятности. Согласно условию задачи: $N = 20$. Определим состав группы:

	имеем	выбираем
отличники	$n_1 = 4$	$m_1 = 3$
хорошисты	$n_2 = 6$	$m_2 = 1$
троечники	$n_3 = 7$	$m_3 = 1$
двоечники	$n_4 = 3$	$m_4 = 0$
всего	$N = 20$	$M = 5$

По формуле гипергеометрической вероятности получим

$$P = \frac{C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot C_{n_3}^{m_3} \cdot C_{n_4}^{m_4}}{C_N^M} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^1 \cdot C_7^1 \cdot C_3^0}{C_{20}^5}.$$

Пользуясь определением
$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$
перепишем последнее выражение
$$\begin{aligned} P &= \frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot\frac{7!}{1!\cdot 6!}\cdot\frac{3!}{3!\cdot 0!}\cdot\frac{5!\cdot 15!}{20!} = \frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{7!}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1\cdot 15!}{20!} \\ &= \frac{4\cdot 7!}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20} = \frac{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20} = \frac{7}{17\cdot 19\cdot 2} = \frac{7}{17\cdot 19\cdot 2}. \end{aligned}$$
▲

Задача 2.

1. В коробке 5 одинаковых деталей, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий 2 два окрашенных.

2.В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Найти вероятность того, что среди них 1 бракованная.

3. В отделе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

4. На складе имеются 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наудачу кинескопов 3 окажутся Львовскими.

5. В группе 12 курсантов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 курсантов. Найти вероятность того, что среди отобранных курсантов 5 отличников.

6. В коробке 5 одинаковых деталей, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий 1 окрашенное.

7. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

8. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают сразу 5 шаров. Найти вероятность того, что 2 из них будут белыми.

9. Среди 10 лотерейных билетов 3 выигрышных. Наудачу взяли 5 билетов. Определить вероятность того, что среди них 2 выигрышных.

10. В лифт 7 этажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере двое сошли на одном этаже.

11. В урне 3 белых, 4 черных и 5 красных шаров. Из урны вынимают сразу три шара. Найти вероятность того, что все шары будут разного цвета.

12. В урне 5 белых, 6 черных и 7 красных шаров. Из урны вынимают сразу три шара. Найти вероятность того, что все шары будут белые.

13. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий каждого сорта равно $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 1$, $n_4 = 3$. Для контроля наудачу берутся 5 изделий. Определить вероятность, что среди них $m_1 = 2$ первосортных, $m_2 = 1$ второго, $m_3 = 0$ третьего и $m_4 = 2$ четвертого сорта.

14. ППС задержали 6 хулиганов, причем 3 из них без российского гражданства. Наудачу вызывают 3 задержанных. Найти вероятность того, что среди них 2 будут без гражданства.

15. На складе из 10 деталей имеется 8 нелицензионных. Наудачу отобраны 3 детали. Найти вероятность того, что среди них 1 нелицензионная.

16. В отделе работают 8 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 4 женщины.

17. Через границу проезжает 15 КАМазов, причем 10 из них с наркотиками. Найти вероятность того, что среди 5 проверенных наудачу КАМазов 3 окажутся с наркотиками.

18. В бандгруппе 15 боевиков, среди которых 8 ваккхабитов. По списку наудачу отобраны 9 боевиков. Найти вероятность того, что среди отобранных боевиков 5 ваккхабитов.

19. В ящике 6 гранотометов, причем 3 из них российского производства. Наудачу извлечены 2 гранотомета. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных гранатомета 2 российских.

20. В конверте среди 10 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 5 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

21. На позициях стояло 8 БМП и 5 БТР. Установкой ГРАД было поражено сразу 5 единиц боевой техники. Найти вероятность того, что 2 из них будут БМП.

22. Среди 10 олигархов было 3 депутата. Наудачу взяли 5 олигархов. Определить вероятность того, что среди них 2 депутата.

23. В камере 3 таджика, 4 грузина и 6 азербайджанцев. Из камеры наудачу вызывают трех человек. Найти вероятность того, что все вызываемые будут разной национальности.

24. В камере 3 таджика, 4 грузина и 6 азербайджанцев. Из камеры наудачу вызывают трех человек. Найти вероятность того, что все вызываемые будут грузины.

25. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий каждого сорта равно $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $n_4 = 3$. Для контроля наудачу берутся 5 изделий. Определить вероятность, что среди них $m_1 = 1$ первосортных, $m_2 = 1$ второго, $m_3 = 0$ третьего и $m_4 = 3$ четвертого сорта.

2.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Аксиоматика теории вероятности существенно использует теоретико-множественные понятия.

Пусть Ω - произвольное непустое множество. Всякий элемент $\omega \in \Omega$ этого множества, будем называть элементарным исходом, а все множество Ω - множеством элементарных исходов. Случайными событиями будут произвольные подмножества $\mathrm{A} = \{A, B, C, ...,\}$ множества Ω.

Суммой двух событий А и **В** называется событие **С**, состоящее в появлении хотя бы одного из событий **А** или **В**.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий А и **В** называется событие **С**, состоящее в совместном появлении события **А** и события **В**.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теорема сложения вероятностей	Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Теорема сложения вероятностей для нескольких событий	Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$

Теорема умножения вероятностей	Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого: $P(AB)=P(A)P(B\|A)$ или $P(AB)=P(B)P(A\|B)$. Для независимых событий A и B $P(AB)=P(A)P(B)$.

В случае, когда события **А** и **В** совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$(A + B) = (A) + (B) - (AB),$$

где **AB**– произведение событий **А** и **В**.

В случае, когда события A_i, совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i} P\left(A_i\right) - \prod_{i,\,j} P\left(A_i A_j\right) +$$

$$\sum_{i,\,j,\,k} P\left(A_i A_j A_k\right) - ... + (-1)^{n-1}\, P\left(A_1 A_2 A_3 ... A_n\right),$$

где суммы распространяются на все возможные комбинации различных индексов *i, j, k, ...,* взятых по одному, по два, по три и т. д. Если события $\mathbf{A}_1$**,** $\mathbf{A}_2$**, ...** $\mathbf{A}_n$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) = 1.$$

Событие $\bar{A}$ называется *противоположным* событию **A**, если оно состоит в непоявлении события **A**. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$(A) + (\bar{A}) = 1.$$

Условной вероятностью события **A** при наличии **B** называется вероятность события **A**, вычисленная при условии, что событие **B** произошло. Эта вероятность обозначается $(A|)$.

События **A** и **B** называются **независимыми**, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий

$$(A|) = (A); \qquad (|A) = ().$$

Пример 3. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие окажется стандартным, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

Решение. Обозначим $p = 0.9$ вероятность того, что изделие будет стандартным, тогда $q = 1-p = 1-0,9 = 0,1$ есть вероятность того, что изделие будет бракованным. Полная группа событий для двух изделий задается следующим выражением:

$$pp + qp + pq + qq = 1.$$

Из этого выражения нас удовлетворяют лишь те слагаемые, которые соответствуют наличию только одного стандартного изделия:

$$P\left(A\right) = pq + qp.$$

Подставляя числовые значения, получим ответ

$$P\left(A\right) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.9 = 2 \cdot 0.18 = 0.36. \qquad \blacktriangle$$

Пример 4. Устройство состоит из 3 элементов, работающих независимо. Вероятность безотказной работы 1, 2 и 3-го элемента соответственно равны: 0.6; 0.7; 0.8. Найти вероятность того, что безотказно будут работать: а) только один элемент; б) два элемента; в) все три элемента.

Решение. Обозначим p_i вероятность того, что i-е изделие будет работать, тогда $q_i = 1 - p_i$ есть вероятность того, что i-е изделие не будет работать, т.е.

$$p_1 = 0.6,\ q_1 = 0.4, \qquad p_2 = 0.7,\ q_2 = 0.3, \qquad p_3 = 0.8,\ q_3 = 0.2.$$

а) Вероятность того, что безотказно будут работать только один элемент есть

$$P(a) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3.$$

Мы в дальнейшем не будем писать индексы, а предподагаем что на первом месте стоит веротность соответствующая первому элементу, на втором - второго и.т.д.:

$$\begin{aligned} P(a) &= pqq + qpq + qqp \\ &= 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.188 \end{aligned}$$

б) Вероятность того, что безотказно будут работать два элемента есть

$$\begin{aligned} P(б) &= ppq + pqp + qpp \\ &= 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.8 = 0.452 \end{aligned}$$

б) Вероятность того, что безотказно будут работать все три элемента есть

$$\begin{aligned} P(в) &= ppp \\ &= 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8 = 0.336. \qquad \blacktriangle \end{aligned}$$

Задача 3.

Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2, 3 или 4-м ящике стола соответственно равны: (p_1, p_2, p_3, p_4). Найти вероятность того, что улика окажется в k ящиках.

№	k	p_1	p_2	p_3	p_4	№	k	p_1	p_2	p_3	p_4	№	k	p_1	p_2	p_3	p_4
1	2	0.1	0.2	0.3	0.4	**11**	3	0.1	0.3	0.5	0.7	**21**	2	0.1	0.4	0.7	0.0
2	3	0.2	0.3	0.4	0.5	**12**	2	0.2	0.4	0.6	0.8	**22**	3	0.2	0.5	0.3	0.1
3	2	0.3	0.4	0.5	0.6	**13**	3	0.3	0.5	0.7	0.9	**23**	2	0.3	0.6	0.3	0.2
4	3	0.4	0.5	0.6	0.7	**14**	2	0.4	0.6	0.8	0.1	**24**	3	0.4	0.7	0.3	0.3
5	2	0.5	0.6	0.7	0.8	**15**	3	0.5	0.7	0.9	0.2	**25**	2	0.5	0.8	0.3	0.4
6	3	0.6	0.7	0.8	0.9	**16**	2	0.6	0.8	0.1	0.3	**26**	3	0.6	0.9	0.3	0.5
7	2	0.7	0.8	0.9	1.0	**17**	3	0.7	0.9	0.2	0.4	**27**	2	0.7	0.0	0.3	0.6
8	3	0.8	0.9	0.1	0.1	**18**	2	0.8	0.1	0.3	0.5	**28**	3	0.8	0.1	0.3	0.7
9	2	0.9	0.1	0.2	0.2	**19**	3	0.9	0.2	0.4	0.6	**29**	2	0.9	0.2	0.3	0.8
10	3	0.1	0.2	0.3	0.3	**20**	2	0.1	0.3	0.5	0.7	**30**	3	0.0	0.3	0.3	0.9

Пример 5. В КПЗ сидят 7 задержанных, из которых 3 за мелкое хулиганство. Следователь наудачу вызвал двоих. Найти вероятность того, что только один из них был задержан за мелкое хулиганство.

Решение. Вероятность вычисляется по формуле

$$P = p_1 q_2 + q_1 p_2.$$

Обозначим через $p_1 = \frac{3}{7}$ -вероятность вызова хулигана первым, тогда вероятность вызова следующего хулигана является условной (зависит от того кто был первый) и равна $p = \frac{2}{6}$ отсюда $q_2 = 1 - p = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$. Аналогичным образом вычисляем $q_1 = 1 - p_1 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ и получим

$$P = p_1 q_2 + q_1 p_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{7}. \qquad \blacktriangle$$

Задача 4.

1. Для сигнализации о пожаре установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при пожаре сработает первый сигнализатор равна 0.95, второй сигнализатор - 0.9. Найти вероятность, что при пожаре сработает только один сигнализатор.

2. Два террориста стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого террориста равна 0.7, а для второго - 0.8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из террористов.

3. Вероятность того, что при одном измерении некоторой величины будет допущена ошибка равна 0.4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них будет ошибка.

4. Из группы задержанных дежурный РОВД отбирает рецидивистов. Вероятность того, что наудачу выбранный задержанный окажется рецидивистом, равна 0.8. Найти вероятность того, что из трех выбранных задержанных только два рецидивиста.

5. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2, 3 или 4-м ящике стола соответственно равны: 0.6; 0.7; 0.8, 0.9. Найти вероятность того, что улика окажется в двух ящиках.

6. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2, 3 или 4-м ящике стола соответственно равны: 0.2; 0.3; 0.4, 0.5. Найти вероятность того, что улика окажется в трех ящиках.

7. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2, 3 или 4-м ящике стола соответственно равны: 0.1; 0.2; 0.3, 0.4. Найти вероятность того, что улика окажется в одном ящике.

8. В ящике 8 гранат типа РГД-5 и 7 гранат типа Ф-1. Во время перевозки было утеряно 2 гранаты. Найти вероятность того, что обе утерянные гранты были типа Ф-1.

9. В ящике 7 гранат типа РГД-5 и 6 гранат типа Ф-1. Во время перевозки было утеряно 3 гранаты. Найти вероятность того, что только две утерянные гранты были типа Ф-1.

10. В ящике 6 американских гранат типа МК3А2 и 5 гранат типа М67. Из ящика вываливаются сразу две гранаты. Найти вероятность того, что это будут гранаты разных типов.

11. В ящике 5 американских гранат типа МК3А2 и 4 гранаты типа М67. Из ящика вываливается граната. Она возвращается в ящик. После этого из ящика опять вываливается граната. Найти вероятность того, что это будут гранаты разных типов.

12. В тайнике террористов было обнаружено 8 выстрелов гранатомета РШГ-1 и 4 гранаты РШГ-2. Из тайника в случайном порядке, один за другим, вынимают три выстрела. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут выстрел РШГ-2.

13. В тайнике террористов было обнаружено 8 выстрелов гранатомета РШГ1, 4 выстрела РШГ2 и 5 выстрелов РПГ7В1. Из тайника в случайном порядке, один за другим, вынимают три выстрела. Найти вероятность того, что, по крайней мере, два из них будут РШГ2.

14. В КПЗ сидят 7 задержанных, из которых 3 за распространение наркотиков. Следователь наудачу вызвал двоих. Найти вероятность того, что оба вызванных подозреваемых были задержаны за распространение наркотиков.

15. Среди 100 патронов изъятых сотрудниками ФСБ из тайника террористов 20 трассирующих. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных патрона окажутся трассирующими.

16. В отделе работают 7 мужчин и 3 женщины. Найти вероятность того, что из 3 случайно выбранных сотрудников все окажутся мужчинами.

17. В ящике 10 гранат, среди которых 6 с взрывателем. Сотрудник МВД извлекает наудачу 4 гранаты. Найти вероятность того, что все извлеченные гранаты окажутся с взрывателями.

18. Террорист выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он промахнется все 3 раза.

19. Террорист выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он попадет хотя бы один раз.

20. Террорист выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он попадет 2 раза.

21. Для сигнализации о пожаре установлены 3 независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при пожаре сработает первый сигнализатор равна 0.95, второй сигнализатор - 0.9, третий - 0.85. Найти вероятность, что при пожаре сработает только один сигнализатор.

22. Три террориста стреляют по вертолету федералов. Вероятность попадания в вертолет при одном выстреле для первого террориста равна 0.7, а для второго - 0.8, для третьего - 0.6. Найти вероятность того, что при одном залпе в вертолет попадет только один из террористов.

23. Вероятность того, что при одном задержании ваххабита будет допущена ошибка равна 0.4. Произведены три независимых спецоперации. Найти вероятность того, что только в одной из них будет ошибка.

24. Из группы задержанных дежурный РОВД отбирает рецидивистов. Вероятность того, что наудачу выбранный задержанный окажется рецидивистом, равна 0.7. Найти вероятность того, что из трех выбранных задержанных только два рецидивиста.

25. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2, или 3-м ящике стола соответственно равны: 0.6; 0.7; 0.8. Найти вероятность того, что улика окажется в двух ящиках.

26. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2 или 3-м ящике стола соответственно равны: 0.2; 0.3; 0.4. Найти вероятность того, что улика окажется в трех ящиках.

27. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2 или 3-м ящике стола соответственно равны: 0.1; 0.2; 0.3. Найти вероятность того, что улика окажется в одном ящике.

28. В ящике 9 гранат типа РГД-5 и 8 гранат типа Ф-1. Во время перевозки было утеряно 2 гранаты. Найти вероятность того, что обе утерянные гранты были типа Ф-1.

29. В ящике 8 гранат типа РГД-5 и 7 гранат типа Ф-1. Во время перевозки было утеряно 3 гранаты. Найти вероятность того, что только две утерянные гранты были типа Ф-1.

30. В ящике 7 американских гранат типа МК3А2 и 6 гранат типа М67. Из ящика вываливаются сразу две гранаты. Найти вероятность того, что это будут гранаты разных типов.

2.4 Вероятность появления хотя бы одного события

Вероятность наступления события **A**, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$(с вероятностями $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2, ...$, $P(A_n) = p_n$) независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n.$$

В частности, если все n событий имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n,$$

где $q = 1 - p$.

Пример 6. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен после 4 сброшенных на него бомб, вероятность попадания которых равна: 0.2; 0.3; 0.4; 0.7.

Решение. Пусть $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.7$ вероятность попадания бомбы в мост. Тогда $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.2 = 0.8$, $q_2 = 0.7$, $q_3 = 0.6$, $q_4 = 0.3$ вероятность соответствующего промаха. Вероятность промахнуться все 4 раза равна

$$Q\left(A\right) = q_1 q_2 q_3 q_4.$$

Тогда вероятность того, что хотя бы одна бомба попадет в мост, равна

$$P\left(A\right) = 1 - Q\left(A\right) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4,$$

или $P\left(A\right) = 1 - 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.3 = 1 - 0.101 = 0.899.$ ▲

Задача 5.

1. Три следователя экспертно-криминалистического управления МВД независимо один от другого, проводят дактилоскопическую идентификацию отпечатков пальца опасного преступника. Вероятность допустить ошибку для первого следователя равна 0.1; для второго - 0.15; для третьего - 0.2. Найти вероятность, что при идентификации хотя бы один следователь допустит ошибку.

2. Вероятность успешной сдачи зачета по огневой подготовке для каждого из 2 сотрудников равна 0.4. Сотрудники выполняют зачетный норматив по очереди, причем каждый делает по 2 попытки. Выполнивший норматив первым получает зачет. Найти вероятность получения кем либо зачета.

3. Для сигнализации о пожаре установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при пожаре сработает первый сигнализатор равна 0.95, второй сигнализатор - 0.9. Найти вероятность, что в дежурную часть поступит хотя бы один сигнал.

4. Два террориста стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого террориста равна 0.7, а для второго - 0.8. Найти вероятность поражения цели террористами.

5. Вероятность того, что при одном анализе на наличие наркотических веществ будет допущена ошибка равна 0.4. Произведены три независимых анализа. Найти вероятность обнаружения наркотических веществ.

6. Из группы задержанных дежурный РОВД отбирает рецидивистов. Вероятность того, что наудачу выбранный задержанный окажется рецидивистом, равна 0.8. Найти вероятность того, что из 3 выбранных задержанных хотя бы один рецидивист.

7. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2, 3 или 4-м ящике стола соответственно равны: 0.6; 0.7; 0.8, 0.9. Найти вероятность того что в столе окажется улика.

8. В ящике 8 гранат типа РГД-5 и 7 гранат типа Ф-1. Во время перевозки было утеряно 2 гранаты. Найти вероятность того, что хотя бы одна Ф-1 утеряна.

9. В ящике 7 гранат типа РГД-5 и 6 гранат типа Ф-1. Во время перевозки было утеряно 3 гранаты. Найти вероятность того, что хотя бы одна Ф-1 утеряна.

10. В ящике 6 американских гранат типа МК3А2 и 5 гранат типа М67. Из ящика вываливаются сразу две гранаты. Найти вероятность того, хотя бы одна М67 утеряна.

11. В тайнике террористов было обнаружено 8 выстрелов гранатомета РШГ-1 и 4 гранаты РШГ-2. Из тайника в случайном порядке, вынимают 3 выстрела. Найти вероятность того, что хотя бы один из вынутых будет выстрел РШГ-2.

12. В КПЗ сидят 7 задержанных, из которых 3 за распространение наркотиков. Следователь наудачу вызвал двоих. Найти вероятность того, что хотя бы один из вызванных подозреваемых был задержан за распространение наркотиков.

13. Среди 100 патронов изъятых сотрудниками ФСБ из тайника террористов 20 трассирующих. Найти вероятность того, что хотя бы 2 наудачу выбранных патрона окажутся трассирующими.

14. В отделе работают 7 мужчин и 3 женщины. Найти вероятность того, что из 3 случайно выбранных сотрудников будет хотя бы один мужчина.

15. В ящике 10 гранат, среди которых 6 с взрывателем. Сотрудник МВД извлекает наудачу 4 гранаты. Найти вероятность того, что хотя бы одна извлеченная граната окажется с взрывателем.

16. Террорист выстрелил 2 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после первого выстрела уменьшается на 0,3. Найдите вероятность того, что он попадет хотя бы один раз.

17. Террорист выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он попадет хотя бы один раз.

18. Террорист выстрелил 4 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он попадет хотя бы один раз.

19. Для сигнализации о пожаре установлены 3 независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при пожаре сработает первый сигнализатор равна 0.95, второй сигнализатор - 0.9, третий - 0.85. Найти вероятность, что при пожаре сработает хотя бы один сигнализатор.

20. Три террориста стреляют по вертолету федералов. Вероятность попадания в вертолет при одном выстреле для первого террориста равна 0.7, а для второго - 0.8, для третьего - 0.6. Найти вероятность того, что при одном залпе в вертолет попадет хотя бы один из террористов.

21. Вероятность того, что при одном задержании ваххабита будет допущена ошибка равна 0.4. Произведены три независимых спецоперации. Найти вероятность того, что только в хотя бы в одной из них будет ошибка.

22. Из группы задержанных дежурный РОВД отбирает рецидивистов. Вероятность того, что наудачу выбранный задержанный окажется рецидивистом, равна 0.7. Найти вероятность того, что из трех выбранных задержанных хотя бы один будет рецидивистом.

23. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2, или 3-м ящике стола соответственно равны: 0.6; 0.7; 0.8. Найти вероятность того, что хотя бы одна улика окажется в столе.

26. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2 или 3-м ящике стола соответственно равны: 0.2; 0.3; 0.4. Найти вероятность того, что хотя бы одна улика окажется в столе.

27. Вероятность того, что нужная следователю улика находится в 1, 2 или 3-м ящике стола соответственно равны: 0.1; 0.2; 0.3. Найти вероятность того, что хотя бы одна улика окажется в столе.

28. В ящике 9 гранат типа РГД-5 и 8 гранат типа Ф-1. Во время перевозки было утеряно 2 гранаты. Найти вероятность того, что была утеряна хотя бы одна Ф-1.

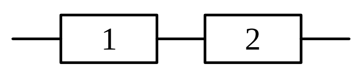
29. В ящике 8 гранат типа РГД-5 и 7 гранат типа Ф-1. Во время перевозки было утеряно 3 гранаты. Найти вероятность того, что была утеряна хотя бы одна Ф-1.

30. В ящике 7 американских гранат типа МК3А2 и 6 гранат типа М67. Из ящика вываливаются 3 гранаты. Найти вероятность того, что была утеряна хотя бы одна М67.

2.5 Надежность электрических схем

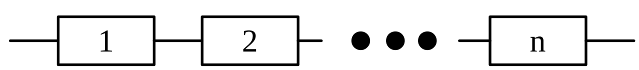
Надежность сложной электрической схемы определяется надежностью каждого элемента схемы и типом их соединения между собой.

Так, при последовательном соединении двух элементов с надежностью каждого p_1 и p_2 надежность всей схемы определяется как



$$P = p_1 p_2.$$

Другими словами схема работает, если работают оба элемента. При отказе одного (любого) из них схема работать не будет (ток через цепь не пойдет).

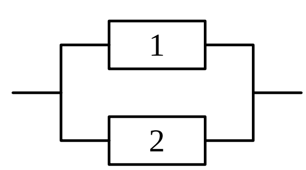


Очевидно, что схема с n последовательно соединенными элементами будет иметь надежность

$$P = p_1 p_2 p_3 ... p_n.$$

При параллельном соединении двух элементов с надежностью каждого p_1 и p_2 надежность всей схемы определяется как

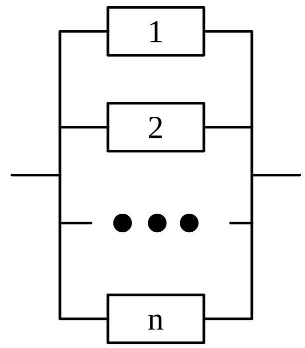
$$P = p_1 p_2 + p_1 q_2 + q_1 p_2.$$



Пользуясь формулой для вероятности появления хотя бы одного события, надежность схемы параллельного соединения записывают в виде

$$P = 1 - q_1 q_2.$$

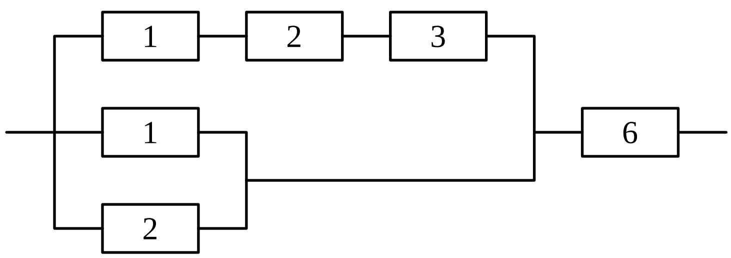
Другими словами схема работает, если работают оба элемента, но также она работает, если выйдет из строя и какой либо один из элементов. Очевидно, что схема с n параллельно соединенными элементами будет иметь надежность



$$P = 1 - q_1 q_2 q_3 ... q_n$$

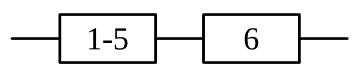
Здесь $q_i = 1 - p_i$ вероятность отказа i-го элемента схемы.

Пример 7. Вычислить надежность схемы, если надежность каждого элемента известна.



Решение. Пусть $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ - надежность соответствующего элемента схемы. Для анализа схемы разобьем ее на составляющие блоки (по несколько элементов) так, чтобы стало возможно использовать для вычислений формулы для параллельного и последовательного соединений.

1) Объединяя элементы 1, 2, 3, 4, и 5 получим блок элементов с надежностью p_{1-5} соединенный последовательно с элементом 6. Для такого соединения

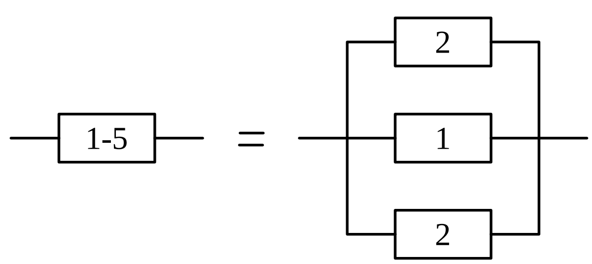


$$P = p_{1-5} p_6$$

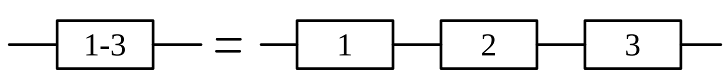
Теперь исследуем блок элементов 1-5.

2) Представим его в виде трех параллельно соединенных элементов, а надежность вычислим по формуле

$$p_{1-5} = 1 - q_{1-3} q_4 q_5.$$



3) Блок последовательно соединенных элементов 1, 2, 3 имеет надежность, вычисляемую по формуле



$$p_{1-3} = p_1 p_2 p_3.$$

Отсюда
$$q_{1-3} = 1 - p_{1-3}.$$
Собирая все блоки воедино, получим

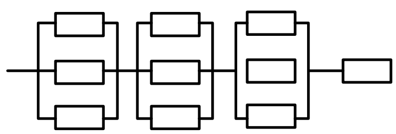
$$p_{1-5} = 1 - (1 - p_1 p_2 p_3)\, q_4 q_5,$$

и окончательно, надежность всей схемы:

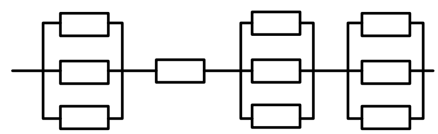
$$P = p_{1-5} p_2 = (1 - (1 - p_1 p_2 p_3)\, q_4 q_5)\, p_2 \qquad \blacktriangle.$$

Задача 6. Вычислить надежность схемы, если надежность каждого элемента известна.

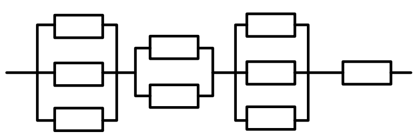
1.



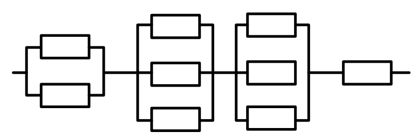
2.



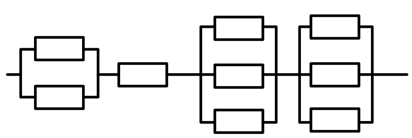
3.



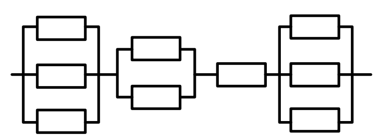
4.



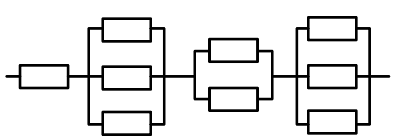
5.



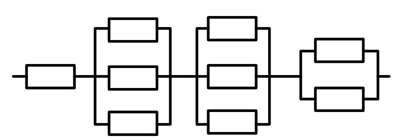
6.



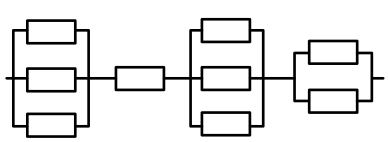
7.



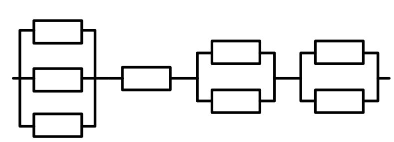
8.



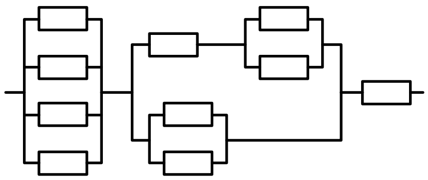
9.



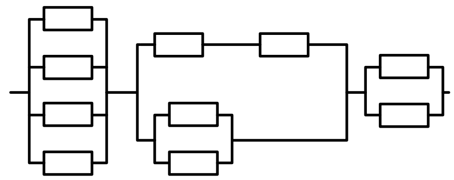
10.



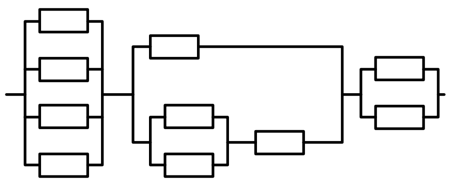
11.



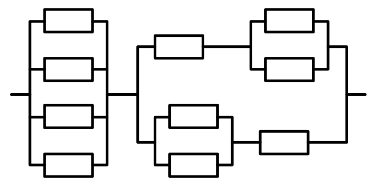
12.



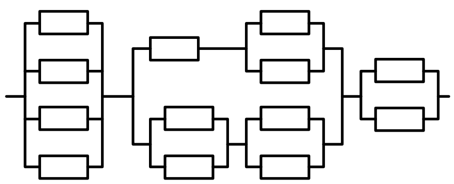
13.



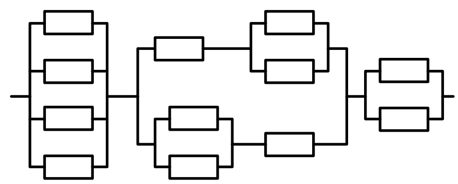
14.



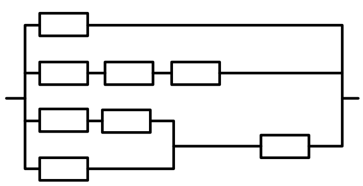
15.



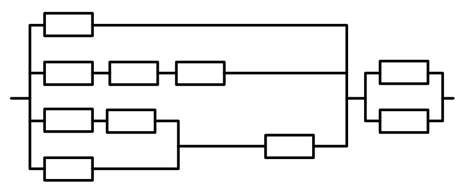
16.



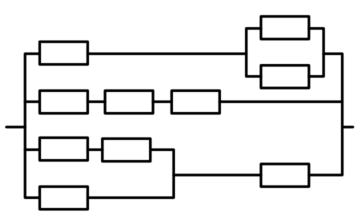
17.



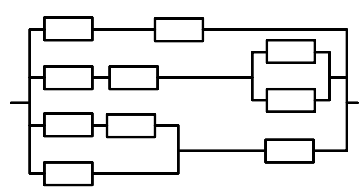
18.



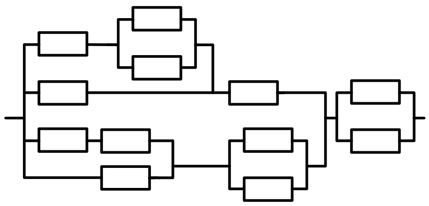
19.



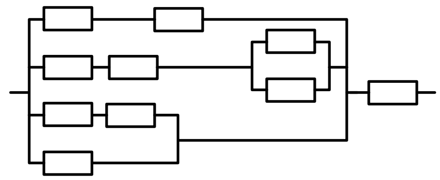
20.



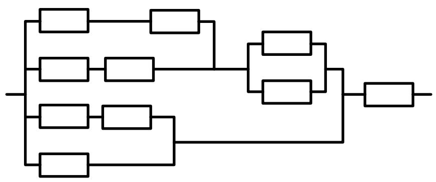
21.



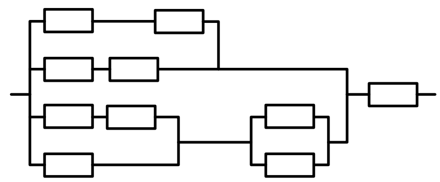
22.



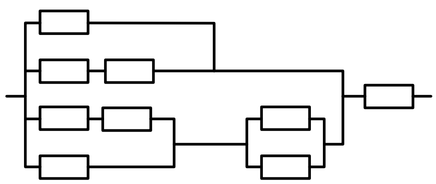
23.



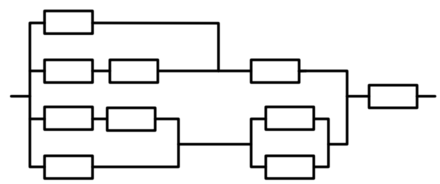
24.



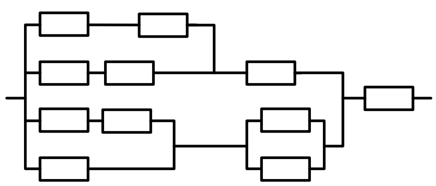
25.



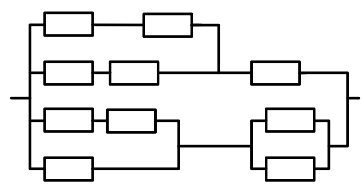
26.



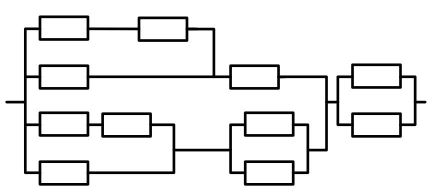
27.



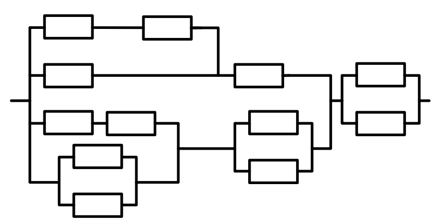
28.



29.



30.



2.6 Формула полной вероятности

Допустим событие **A** может наступить только при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$, образующих полную группу, т.е.

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + ... + P(H_n) = 1.$$

Тогда вероятность появления события **A** вычисляется по формуле:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Формула полной вероятности	$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i),$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$

Пример 8. В экспериментальной лаборатории имеется 6 цифровых индикаторов и 4 аналоговых. Вероятность того, что цифровой индикатор не выйдет из строя, равна 0.95; для аналогового индикатора эта вероятность равна 0.8. Курсант произвел эксперимент с наудачу выбранным индикатором. Найти вероятность того, что он не выйдет из строя.

Решение. Обозначим вероятность искомого события через $P(A)$. Появление этого события связано с двумя гипотезами:

H_1 – выбор цифрового индикатора, $P(H_1) = 6/10$;

H_2 – выбор аналогового индикатора, $P(H_2) = 4/10$. Проверка: $6/10 + 4/10 = 1$.

Условные вероятности появления событий даны по условию:

для H_1: $P(A/H_1) = 0.95$;

для H_1: $P(A/H_2) = 0.8$.

Подставляя исходные данные в формулу полной вероятности, получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{6}{10} \cdot 0.95 + \frac{4}{10} \cdot 0.8 = 0.89. \blacktriangle$$

Задача 7.

1. В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых с оптическим прицелом. Вероятность того, что курсант поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если курсант произведет выстрел из наудачу взятой винтовки.

2. В ящике 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей - на заводе №2 и 18 деталей - на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0.9; для завода №2 - 0.6; для завода №3 - 0.9.Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

3. Вероятность того, что во время работы программы произойдет сбой в процессоре, оперативной памяти и видеоконтроллере, соотносятся как 3:2:5.Вероятнсть обнаружения сбоя в процессоре, оперативной памяти и видеоконтроллере равны 0.8; 0.9; 0.9. Найти вероятность того, что возникший сбой в программе будет обнаружен.

4. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета (80% времени полета) и в условиях перегрузки при взлете и посадке (20% времени полета). Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0.1; в условиях перегрузки - 0.4. Вычислить надежность прибора за время полета.

5. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго - 10% и третьего - 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 50% телевизоров с первого завода, 20% - со второго и 30% - с третьего?

6. В каждой из 3 урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

7. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

8. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему 4 группу крови, можно переливать кровь любой группы; человеку со 2 или 3 группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с 1 группой крови можно перелить кровь только 1 группы. Среди населения 33.7% имеют первую, 37.5% - вторую, 20.9% - третью и 7.9% - четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

9. Три курсанта, с вероятностями попадания в мишень из ПМ $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.7$, $p_3 = 0.6$, делают по одному выстрелу по мишени. Вычислить вероятность того, что в мишени окажется ровно две пробоины.

10. В ящике лежат 20 мячей, из них - 15 новых. Для игры наудачу выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

11. Программа экзамена содержит 30 вопросов, из которых курсант знает только 15. Для успешной сдачи экзамена достаточно ответить на 2 вопроса или на один из них и на дополнительный вопрос. Какова вероятность того, что курсант сдаст экзамен?

12. В урне находятся 7 белых и 3 черных шара. Три игрока по очереди извлекают по одному шару, отмечают цвет и возвращают шар обратно. Выигрывает тот, кто первым достанет черный шар. Найти вероятность выигрыша для каждого из игроков, если игра может продолжатся неограниченно.**1.** В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых с оптическим прицелом. Вероятность того, что курсант поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если курсант произведет выстрел из наудачу взятой винтовки.

13. В ящике 15 гранат, изготовленных на заводе №1, 10 гранат - на заводе №2 и 5 гранат - на заводе №3. Вероятность того, что граната, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0.9; для завода №2 - 0.6; для завода №3 - 0.9.Найти вероятность того, что извлеченная наудачу дграната окажется отличного качества.

14. Вероятность того, что во время работы программы произойдет сбой в процессоре, оперативной памяти и видеоконтроллере, соотносятся как 8:2:5.Вероятнсть обнаружения сбоя в процессоре, оперативной памяти и видеоконтроллере равны 0.8; 0.9; 0.5. Найти вероятность того, что возникший сбой в программе будет обнаружен.

15. Прибор, установленный на борту вертолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета (90% времени полета) и в условиях перегрузки при взлете и посадке (10% времени полета). Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0.1; в условиях перегрузки - 0.3. Вычислить надежность прибора за время полета.

16. На склад поступили радиостанции трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% радиостанций со скрытым дефектом, второго - 10% и третьего - 5%. Какова вероятность взять исправную радиостанцию, если на склад поступило 50% радиостанций с первого завода, 20% - со второго и 30% - с третьего?

17. В каждой из 3 урн содержится 7 черных и 3 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

18. В первой урне содержится 10 шаров, из них 7 белых; во второй урне 20 шаров, из них 5 белых. Из каждой урны извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

19. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему 4 группу крови, можно переливать кровь любой группы; человеку со 2 или 3 группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с 1 группой крови можно перелить кровь только 1 группы. Среди населения 33% имеют первую, 37% - вторую, 20% - третью и 10% - четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

20. Три курсанта, с вероятностями попадания в мишень из ПМ $p_1 = 0.7$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = 0.5$, делают по одному выстрелу по мишени. Вычислить вероятность того, что в мишени окажется ровно две пробоины.

21. В ящике лежат 20 мячей, из них - 10 новых. Для игры наудачу выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

22. Программа экзамена содержит 30 вопросов, из которых курсант знает только 10. Для успешной сдачи экзамена достаточно ответить на 2 вопроса или на один из них и на дополнительный вопрос. Какова вероятность того, что курсант сдаст экзамен?

23. В урне находятся 8 белых и 2 черных шара. Три игрока по очереди извлекают по одному шару, отмечают цвет и возвращают шар обратно. Выигрывает тот, кто первым достанет черный шар. Найти вероятность выигрыша для каждого из игроков, если игра может продолжатся неограниченно.

24. В пирамиде 15 винтовок, 8 из которых с оптическим прицелом. Вероятность того, что курсант поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.8; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если курсант произведет выстрел из наудачу взятой винтовки.

25. В ящике 10 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей - на заводе №2 и 5 деталей - на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0.4; для завода №2 - 0.6; для завода №3 - 0.7. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

26. Вероятность того, что во время работы программы произойдет сбой в процессоре, оперативной памяти и видеоконтроллере, соотносятся как 3:7:5.Вероятнсть обнаружения сбоя в процессоре, оперативной памяти и видеоконтроллере равны 0.8; 0.9; 0.4. Найти вероятность того, что возникший сбой в программе будет обнаружен.

27. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета (95% времени полета) и в условиях перегрузки при взлете и посадке (5% времени полета). Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0.1; в условиях перегрузки - 0.2. Вычислить надежность прибора за время полета.

28. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров со скрытым дефектом, второго - 40% и третьего - 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 50% телевизоров с первого завода, 40% - со второго и 10% - с третьего?

29. В каждой из 3 урн содержится 16 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

30. В первой урне содержится 15 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 6 белых. Из каждой урны извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

2.7 Формула Байеса

Пусть событие **A** может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$, образующих полную группу, т.е.

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + ... + P(H_n) = 1.$$

Если событие **A** уже произошло, то априорные вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса

Формула Байеса	$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}.$$

Пример 9. В пирамиде 10 винтовок, 4 из которых с оптическим прицелом. Вероятность того, что боевик поразит цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.8. Боевик поразил цель из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: боевик стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Решение. Допустим, событие A - есть поражение боевиком цели. Соответствующую вероятность обозначим через $P(A)$. Появление этого события связано с двумя гипотезами:

H_1 – выбор оптического прицела, с априорной вероятностью $P(H_1) = 4/10$;

H_2 – выбор обычного прицела, с априорной вероятностью $P(H_2) = 6/10$.

Проверка: $4/10 + 6/10 = 1$.

Условные вероятности появления событий даны:
для H_1: $P(A/H_1) = 0.95$;
для H_1: $P(A/H_2) = 0.8$.

Подставляя исходные данные в формулу полной вероятности, получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{6}{10} \cdot 0.95 + \frac{4}{10} \cdot 0.8 = 0.89.$$

Для вычисления апостериорной вероятности 1 гипотезы воспользуемся формулой

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} = \frac{\frac{6}{10} \cdot 0.95}{\frac{6}{10} \cdot 0.95 + \frac{4}{10} \cdot 0.8} = 0.64.$$

Соответствующие вычисления для 2 гипотезы дают

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot 0.8}{\frac{6}{10} \cdot 0.95 + \frac{4}{10} \cdot 0.8} = 0.36$$

Таким образом, вероятнее, что боевик попал в цель из винтовки с оптическим прицелом.

Апостериорные вероятности гипотез должны давать в сумме тоже 1, поскольку они так же образуют полную группу событий. ▲

Задача 8.

1. Расследуются причины неудачного запуска космической ракеты «Протон», о котором можно высказать четыре гипотезы: H_1 - утечка топлива; H_2 - отказ двигателя; H_3 - сбой в системе наведения; H_4 - разрушение головного обтекателя попаданием в него стороннего предмета. По данным статистики $P(H_1) = 0.2$, $P(H_2) = 0.4$, $P(H_3) = 0.3$, $P(H_4) = 0.1$. Условные вероятности события по той же статистике равны: $P(A/H_1) = 0.9$, $P(A/H_2) = 0.5$, $P(A/H_3) = 0.2$, $P(A/H_4) = 0.3$. Какова вероятность того, что авария произошла из за утечки топлива?

2. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовик, равна 0.1; для легковой автомашины эта вероятность равна 0.2. К бензоколонке подъехала машина найти вероятность того, что она грузовая.

3. Два шифровальщика ФАПСИ кодируют одинаковое сообщение. Вероятность того, что первый шифровальщик допустит ошибку, равна 0.05; для второго шифровальщика эта вероятность равна 0.1. При сверке сообщений была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошибся первый шифровальщик.

4. В госпиталь поступают в среднем 50% больных с заболеванием **A**, 30% с заболеванием **B**, и 20% с заболеванием **C**. Вероятность полного излечения болезни **A** равна 0.7; болезни **B** - 0.8; болезни **C** - 0.9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что он страдал заболеванием **A**.

5. Имеется три партии изделий по 20 деталей в каждой. Число стандартных изделий в 1, 2 и 3 партиях соответственно равно 20, 15 и 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Найти вероятность того, что деталь была извлечена из 3 партии.

6. Батарея из 3 орудий произвела залп, причем 2 снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель 1, 2 и 3 орудиями соответственно равны $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.5$.

7. Три боевика произвели залп, причем две пули попали в цель. Найти вероятность того, что третий боевик поразил цель, если вероятность попадания в мишень 1, 2 и 3 боевиком соответственно равны 0.2; 0.4 и 0.3.

8. Две из четырех независимо работающих ламп отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и вторая лампы, если вероятности отказа 1, 2, 3 и 4 лампы соответственно равны $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.4$.

9. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном соотношении $n_1 : n_2 : n_3$, причем с вероятностью брака p_1, p_2 и p_3 соответственно. Случайно приобретенный прибор оказался бракованным. Какова вероятность того, что данный прибор произведен первым заводом?

10. Число бракованных микросхем на 1000 априори считается равновозможным от 0 до 3. Наудачу опробовано 100 микросхем, оказавшиеся исправными. Какова вероятность, что все схемы исправны?

11. В группе из 25 курсантов, пришедших сдавать экзамен по ТВиМС, имеется 3 отличника (знают 25 вопросов из 30), 7 хорошистов (знают 20 вопросов), 5 троечников (знают 10 вопросов) и 10 двоечников (знают 5 вопросов). Вызванный наудачу курсант ответил на два поставленных вопроса. Какова вероятность, что это был двоечник?

12. Астрономический объект, за которым ведется наблюдение, может находиться в одном из двух состояний с априорными вероятностями $P(H_1) = 0.6$, $P(H_2) = 0.4$. Наблюдение ведется независимо двумя обсерваториями. Первая обсерватория обычно дает правильные сведения в 90% случаев, вторая - в 80%. Первая обсерватория сообщила, что объект находится в состоянии H_1, вторая - H_2. Найти апостериорную вероятность величины H_2.

13. Расследуются причины неудачного запуска космической ракеты «Протон», о котором можно высказать четыре гипотезы: H_1 - утечка топлива; H_2 - отказ двигателя; H_3 - сбой в системе наведения; H_4 - разрушение головного обтекателя попаданием в него стороннего предмета. По данным статистики $P(H_1) = 0.2$, $P(H_2) = 0.4$, $P(H_3) = 0.3$, $P(H_4) = 0.1$. Условные вероятности события по той же статистике равны: $P(A/H_1) = 0.9$, $P(A/H_2) = 0.5$, $P(A/H_3) = 0.2$, $P(A/H_4) = 0.3$. Какова вероятность того, что авария произошла в результате отказа двигателя?

14. Расследуются причины неудачного запуска космической ракеты «Протон», о котором можно высказать четыре гипотезы: H_1 - утечка топлива; H_2 - отказ двигателя; H_3 - сбой в системе наведения; H_4 - разрушение головного обтекателя попаданием в него стороннего предмета. По данным статистики $P(H_1) = 0.2$, $P(H_2) = 0.4$, $P(H_3) = 0.3$, $P(H_4) = 0.1$. Условные вероятности события по той же статистике равны: $P(A/H_1) = 0.9$, $P(A/H_2) = 0.5$, $P(A/H_3) = 0.2$, $P(A/H_4) = 0.3$. Какова вероятность того, что авария произошла в результате сбоя в системе наведения?

15. Имеется 107 монет, причем у одной из них герб с обеих сторон, а остальные монеты обычные. Наугад выбранную монету, не разглядывая, бросают 10 раз, причем при всех бросаниях она падает гербом кверху. Найдите вероятность того, что была выбрана монета с 2 гербами.

16. Расследуются причины неудачного запуска космической ракеты «Протон», о котором можно высказать четыре гипотезы: H_1 - утечка топлива; H_2 - отказ двигателя; H_3 - сбой в системе наведения; H_4 - разрушение головного обтекателя попаданием в него стороннего предмета. По данным статистики $P(H_1) = 0.2$, $P(H_2) = 0.4$, $P(H_3) = 0.3$, $P(H_4) = 0.1$. Условные вероятности события по той же статистике равны: $P(A/H_1) = 0.9$, $P(A/H_2) = 0.5$, $P(A/H_3) = 0.2$, $P(A/H_4) = 0.3$. Какова вероятность того, что авария произошла в результате разрушения головного обтекателя?

17. Предположим, что надежность определения туберкулеза при флюорографическом обследовании составляет 90%. Вероятность того, что у здорового человека будет ошибочно определен туберкулез составляет 1%. Просвечиванию была подвергнута группа людей со среднем числом больных, равным 0.1%. Какова вероятность того, что человек, признанный больным, действительно является носителем туберкулеза?

кулеза?

18. Противотанковая батарея состоит из 10 орудий, причем для первой группы из 6 орудий вероятности того, что при одном выстреле произойдет недолет, попадание или перелет, равны соответственно 0.1; 0.7; 0.2. Для каждого из остальных 4 орудий вероятности тех же самых событий равны соответственно 0.2; 0.6; 0.2. Наудачу выбранное орудие произвело 3 выстрела по цели, в результате чего было зафиксировано одно попадание, один недолет и один перелет. Какова вероятность того, что стрелявшее орудие принадлежит первой группе?

19. Из двух орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0.8, для второго - 0.9. Цель поражена. Найти вероятность того, что она поражена двумя попаданиями.

20. Два боевика производят залп по цели из гранатометов. Вероятность попадания в цель для первого боевика равна 0.7, для второго - 0.9. Цель поражена. Найти вероятность того, что она поражена только первым боевиком.

21. Два боевика производят залп по цели из гранатометов. Вероятность попадания в цель для первого боевика равна 0.7, для второго - 0.8. Цель поражена. Найти вероятность того, что она поражена только вторым боевиком.

22. Три боевика производят залп по цели из гранатометов. Вероятность попадания в цель для первого боевика равна 0.8, для второго - 0.85, для третьего - 0.9. Цель поражена. Найти вероятность того, что она поражена тремя попаданиями.

23. Три боевика производят залп по цели из гранатометов. Вероятность попадания в цель для первого боевика равна 0.8, для второго - 0.85, для третьего - 0.9. Цель поражена. Найти вероятность того, что она поражена двумя попаданиями.

24. Три боевика производят залп по цели из гранатометов. Вероятность попадания в цель для первого боевика равна 0.8, для второго - 0.85, для третьего - 0.9. Цель поражена. Найти вероятность того, что она поражена одним попаданием.

25. Две батареи по 3 орудия каждая производят залп по цели. Цель будет поражена, если каждая из батарей даст не менее двух попаданий. Вероятности попадания в цель орудиями первой батареи равны: 0.4; 0.5; 0.6, второй - 0.5; 0.6; 0.7. Найти вероятности поражения цели при одном залпе из двух батарей.

26.Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: класс H_1 (мало рискует), класс H_2(рискует средне), класс H_3 (рискует сильно). Агентство предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 30% принадлежат к классу H_1, 50% - к классу H_2 и 20 % - к классу H_3. Вероятность того, что в течение года водитель класса H_1 попадет хотя бы в одну аварию, равна 0,01, для водителей класса H_2 эта вероятность равна 0,02, а для водителя класса H_3 - 0,08. Водитель страхует свою машину и в течение года попадет в аварию. Какова вероятность того, что он относится к классу H_1?

27. Подводная лодка торпедирует эсминец. Вероятность попадания торпеды в носовую часть эсминца равна 0.3, в середину - 0.5 и в кормовую часть - 0.2. При поражении носовой части эсминец затонет с вероятностью 0.3, в середину - 0.5 и в кормовую часть - 0.7. Эсминец затонул. Какова вероятность того, что он был поражен к носовуючасть.

28. * Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: класс H_1 (мало рискует), класс H_2(рискует средне), класс H_3 (рискует сильно). Агентство предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 10% принадлежат к классу H_1, 60% - к классу H_2 и 30 % - к классу H_3. Вероятность того, что в течение года водитель класса H_1 попадет хотя бы в одну аварию, равна 0,02, для водителей класса H_2 эта вероятность равна 0,04, а для водителя класса H_3 - 0,1. Водитель страхует свою машину и в течение года попадет в аварию. Какова вероятность того, что он относится к классу H_3?

29. Один властелин, которому наскучил его звездочет со своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи добрым повелителем, он решил дать звездочету последний шанс. Ему велено распределить по 2 урнам 4 шара: 2 черных и 2 белых. Палач выберет наугад одну из урн и из нее вытащит один шар. Если шар будет черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен разместить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность быть спасенным?

30. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета (95% времени полета) и в условиях перегрузки при взлете и посадке (5% времени полета). Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0.1; в условиях перегрузки - 0.2. Прибор вышел из строя. Найти вероятность того, что он сломался при взлете или посадке.

2.8 Повторение испытаний. Формула Бернулли

Рассмотрим последовательность испытаний, в каждом из которых вероятность появления события одинакова и равна p. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, событие наступит ровно k раз, равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

$q = 1 - p$ вероятность не появления события в результате очередного испытания.

Пример 10. Вероятность попадания курсантом в мишень при одном выстреле равна 0.7. Какова вероятность курсанту получить зачет по огневой подготовке, если для этого ему необходимо из 5 выстрелов как минимум 3 раза попасть в мишень?

Решение. Если вероятность попадания курсантом при одном выстреле считается постоянной и равна $p = 0.7$, то вероятность промаха при одном выстреле будет: $q = 1 - p = 0.3$. Вероятность из 5 выстрелов 3 раза попасть в мишень дается формулой Бернулли:

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2.$$

Однако курсант получит зачет, если он попадет 4 раза из 5:

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1,$$

а так же все 5 раз из 5 выстрелов:

$$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0.$$

Таким образом, вероятность получения курсантом зачета вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} P(A) &= P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 q^0 = \\ &= 10p^3 q^2 + 5p^4 q + p^5 = 10(0.7)^3 (0.3)^2 + 5(0.7)^4 0.3 + (0.7)^5 = 0.83692. \end{aligned}$$ ▲

Задача 9.

1. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего шара. Какова вероятность того, что из 4 вынутых шаров окажется 2 белых?

2. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей будет 3 девочки и 2 мальчика. Вероятность рождения девочки и мальчика считать одинаковой.

3. Какова вероятность того, что при 8 бросаниях монеты герб выпадет 5 раз?

4. По данным технического контроля 2% изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Найдите вероятность того, что из 6 изготовленных станков 4 нуждаются в дополнительной регулировке.

5. Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что она упадет гербом вверх не больше 3 раз?

6. Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет гербом вверх не больше 3 раз?

8. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть 2 партии из 4 или 3 партии из 6?

8. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть 3 партии из 6 или 4 партии из 8?

9. Отрезок AB разделен точкой C в соотношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что 2 из них окажутся левее, а две правее точки C.

10. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найдите вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не меньше 8 автомашин.

11. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 5 первых покупателей обувь этого размера понадобится одному.

12. Проведено 5 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании 2 монет. Найдите вероятность того, что ровно в 3 испытаниях появились по 2 герба.

13. При передаче сообщения вероятность искажения для каждого знака равна 0,1. Какова вероятность того, что сообщение из 5 знаков не будет искажено?

14. Испытание состоит в бросании 3 игральных костей. Найдите вероятность того, что в 5 независимых испытаниях ровно 2 раза выпадет по 3 единицы.

15. Вероятность наступления события в каждом из 18 независимых опытов равна 0,2. Определите вероятность появления этого события по крайней мере 3 раза.

16. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего шара. Какова вероятность того, что из 5 вынутых шаров окажется 2 белых?

17. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 6 детей будет 4 девочки и 2 мальчика. Вероятность рождения девочки и мальчика считать одинаковой.

18. Какова вероятность того, что при 9 бросаниях монеты герб выпадет 5 раз?

19. По данным технического контроля 2% изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Найдите вероятность того, что из 5 изготовленных станков 4 нуждаются в дополнительной регулировке.

20. Монету подбрасывают 5 раз. Какова вероятность того, что она упадет гербом вверх не больше 3 раз?

21. Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет гербом вверх не больше 2 раз?

22. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть 2 партии из 3 или 3 партии из 5?

23. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть 3 партии из 5 или 4 партии из 7?

24. Отрезок AB разделен точкой C в соотношении 3:1. На этот отрезок наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что 2 из них окажутся левее, а две правее точки C.

25. На автобазе имеется 10 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найдите вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не меньше 6 автомашин.

26. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,1. Найдите вероятность того, что из 5 первых покупателей обувь этого размера понадобится двум.

27. Проведено 7 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании 2 монет. Найдите вероятность того, что ровно в 4 испытаниях появились по 2 герба.

28. При передаче сообщения вероятность искажения для каждого знака равна 0,1. Какова вероятность того, что сообщение из 7 знаков не будет искажено?

29. Испытание состоит в бросании 3 игральных костей. Найдите вероятность того, что в 5 независимых испытаниях ровно 3 раза выпадет по 3 единицы.

30. Вероятность наступления события в каждом из 20 независимых опытов равна 0,2. Определите вероятность появления этого события по крайней мере 3 раза.

2.9 Полиномиальное распределение

В случае, когда результатом каждого испытания могут быть несколько исходов с вероятностями $(p_1, p_2, ..., p_n)$ образующих полную группу $\left(\sum_i p_i = 1\right)$, то необходимо пользоваться обобщенной формулой Бернулли:

$$P_n\left(k_1, k_2, ..., k_i\right) = \frac{n!}{k_i! k_2! ... k_i!} p^{k_1} p^{k_2} ... p^{k_i}.$$

Пример 11. В урне имеется: 3 черных шара, 4 красных и 2 белых. Из урны 5 раз извлекается 1 шар с возвращением. Определить вероятность того, что черный и белый шары извлекались по 2 раза.

Решение. Вероятность извлечения из урны черного шара $p_1 = \frac{3}{9}$, красного - $p_2 = \frac{4}{9}$ и белого $p_3 = \frac{2}{9}$. По формуле полиномиального распределения получим

$$P_5\left(2, 1, 2\right) = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} \left(\frac{3}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{160}{2187} = 0.073. \qquad \blacktriangle$$

Задача 10.

1. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0.1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0.3 - мелкий выигрыш и с вероятностью 0.6 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 6 билетов. Определить вероятность получения 2 крупных выигрышей и 3 мелких.

2. Отрезок разделен на 4 равные части. На отрезок наудачу брошено 8 точек. Найти вероятность того, что на каждую из 4 частей отрезка попадет по 2 точки.

3. Отрезок разделен на 4 равные части. На отрезок наудачу брошено 12 точек. Найти вероятность того, что на каждую из 4 частей отрезка попадет по 2 точки.

4. Отрезок разделен на 3 равные части. На отрезок наудачу брошено 6 точек. Найти вероятность того, что на каждую из 3 частей отрезка попадет по 2 точки.

5. Отрезок разделен на 3 равные части. На отрезок наудачу брошено 9 точек. Найти вероятность того, что на каждую из 3 частей отрезка попадет по 3 точки.

6. Бросается 6 игральных костей. Найти вероятность того, что выпадут выпадут 3 единицы, 2 тройки и 1 шестерка.

7. Бросается 6 игральных костей. Найти вероятность того, что выпадут выпадут 3 единицы, 1 тройка и 1 шестерка.

8. Рабочий производит с вероятностью 0.9 годное изделие, с вероятностью 0.09 - изделие с устранимым браком и с вероятностью 0.01 - с неустранимым браком. Проверено 3 изделия. Определить вероятность того, что среди них 1 годное и 1 с устранимым браком.

9. Каждый из 9 задержанных с одинаковой вероятностью может быть помещен в одну из 3 камер. Определить вероятность того, что в одну камеру попало 4 задержанных, а в другую - 3.

10. Каждый из 10 задержанных с одинаковой вероятностью может быть помещен в одну из 3 камер. Определить вероятность того, что в одну камеру попало 4 задержанных, а в другую - 3.

11. Каждый из 11 задержанных с одинаковой вероятностью может быть помещен в одну из 3 камер. Определить вероятность того, что в одну камеру попало 4 задержанных, а в другую - 3.

12. По мишени, состоящей из внутреннего круга и 2-х концентрических колец, производится 10 выстрелов. Вероятности попадания в указанные области равны соответственно 0.15; 0.22; и 0.13. Определить вероятность того, что при этом будет 6 попаданий в круг и 3 - в первое кольцо.

13. Прибор имеет 4 блока, в каждом из которых имеются микросхемы. Если известно, что микросхема вышла из строя, то вероятность того, что она принадлежит данному блоку равна соответственно 0.6111; 0.0664; 0.0664; 0.2561. Определить вероятность прекращения работы прибора при выходе из строя 2-х микросхем из 1 блока, и 1 - из второго.

14. Прибор имеет 4 блока, в каждом из которых имеются микросхемы. Если известно, что микросхема вышла из строя, то вероятность того, что она принадлежит данному блоку равна соответственно 0.6; 0.1; 0.1; 0.2. Определить вероятность прекращения работы прибора при выходе из строя 2-х микросхем из 1 блока, и 2 - из второго.

15. В электропоезд, состоящий из 6 вагонов, садится 12 человек. Определить вероятность того, что в 1-й вагон ни кто не вошел, во 2-й вошел 1 человек, в 3-й и 4-й вагон - по 2 человека, в оставшиеся два вагона - соответственно 3 и 4 человека.

16. В электропоезд, состоящий из 6 вагонов, садится 12 человек. Определить вероятность того, что в один вагон ни кто не вошел, в другой - вошел 1 человек, в два вагона - по 2 человека, в оставшиеся два вагона - соответственно 3 и 4 человека.

16. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0.2 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0.3 - мелкий выигрыш и с вероятностью 0.5 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 7 билетов. Определить вероятность получения 2 крупных выигрышей и 3 мелких.

17. Отрезок разделен на 5 равных частей. На отрезок наудачу брошено 10 точек. Найти вероятность того, что на каждую из 5 частей отрезка попадет по 2 точки.

18. Отрезок разделен на 5 равных частей. На отрезок наудачу брошено 15 точек. Найти вероятность того, что на каждую из 5 частей отрезка попадет по 3 точки.

19. Бросается 7 игральных костей. Найти вероятность того, что выпадут выпадут 3 единицы, 3 тройки и 1 шестерка.

20. Бросается 7 игральных костей. Найти вероятность того, что выпадут выпадут 2 единицы, 3 тройки и 2 шестерки.

21. Боевики одним выстрелом гранотомета с вероятностью 0.8 уничтожают БТР, с вероятностью 0.1 - вызывают его неустранимое повреждение и с вероятностью 0.1 - устранимое повреждение. Проведено 4 выстрела по колонне с БТР. Определить вероятность того, что потери от терракта составляют 1 уничтоженный и 3 неустранимо поврежденных БТР.

22. Каждый из 10 задержанных с одинаковой вероятностью может быть помещен в одну из 4 камер. Определить вероятность того, что в одну камеру попало 4 задержанных, а в остальные по 2.

23. По мишени, состоящей из внутреннего круга и 2-х концентрических колец, производится 10 выстрелов. Вероятности попадания в указанные области равны соответственно 0.1; 0.3; и 0.6. Определить вероятность того, что при этом будет 5 попаданий в круг и 5 - в первое кольцо.

24. Прибор имеет 4 блока, в каждом из которых имеются микросхемы. Если известно, что микросхема вышла из строя, то вероятность того, что она принадлежит данному блоку равна соответственно 0.5; 0.3; 0.1; 0.1. Определить вероятность прекращения работы прибора при выходе из строя 3-х микросхем из 1 блока, и 1 - из третьего.

25. Прибор имеет 4 блока, в каждом из которых имеются микросхемы. Если известно, что микросхема вышла из строя, то вероятность того, что она принадлежит данному блоку равна соответственно 0.6; 0.1; 0.1; 0.2. Определить вероятность прекращения работы прибора при выходе из строя 3-х микросхем из 1 блока, и 1 - из второго.

26. В электропоезд, состоящий из 3 вагонов, садится 7 человек. Определить вероятность того, что в 1-й вагон ни кто не вошел, во 2-й вошел 1 человек, в 3-й 6 человек.

27. В электропоезд, состоящий из 4 вагонов, садится 12 человек. Определить вероятность того, что в один вагон ни кто не вошел, в другой - вошел 6 человек, в два вагона - по 3 человека.

28. Боевики одним выстрелом гранотомета с вероятностью 0.8 уничтожают БТР, с вероятностью 0.1 - вызывают его неустранимое повреждение и с вероятностью 0.1 - устранимое повреждение. Проведено 4 выстрела по колонне с БТР. Определить вероятность того, что потери от терракта составляют 1 уничтоженный и 3 неустранимо поврежденных БТР.

29. Боевики одним выстрелом гранотомета с вероятностью 0.8 уничтожают БТР, с вероятностью 0.1 - вызывают его неустранимое повреждение и с вероятностью 0.1 - устранимое повреждение. Проведено 4 выстрела по колонне с БТР. Определить вероятность того, что потери от атаки составляют 2 уничтоженных и 2 неустранимо поврежденных БТР.

30. Боевики одним выстрелом гранотомета с вероятностью 0.8 уничтожают БТР, с вероятностью 0.1 - вызывают его неустранимое повреждение и с вероятностью 0.1 - устранимое повреждение. Проведено 4 выстрела по колонне с БТР. Определить вероятность того, что потери от терракта составляют 3 уничтоженных и 1 неустранимо поврежденный БТР.

2.10 Наивероятнейшее число появления события

Число m называется **наивероятнейшим** числом наступлений события A в n испытаниях, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях m раз, не меньше вероятности остальных возможных исходов.

Наивероятнейшее число определяется из двойного неравенства

$$np - q \leq m \leq np + p,$$

причем,
а) если $np - q$ дробное, то существует одно наивероятнейшее число m;
б) если $np - q$ целое, то наивероятнейших числа - два;
в) если np - целое, то наивероятнейшее число $m = np$.

Пример 12. ОТК проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0.75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

Решение. По условию $p = 0.75$, $q = 0.25$, $n = 10$. Подставляя в формулу двойного неравенства, получим:

$$np - q \leq m \leq np + p,$$

$$10 \cdot 0.75 - 0.25 \leq m \leq 10 \cdot 0.75 + 0.75$$

или $7.25 \leq m \leq 8.25$, т.е. $m = 8$. ▲

Задача 11.

1. Испытываются 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того что элемент выдержит испытание равна 0.9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

2. В урне 10 белых и 40 черных шаров. Вынимают подряд 14 шаров (с возвращением). Определить наивероятнейшее число появлений белого шара.

3. Вероятность попадания боевиком в цель равна 0.7. Сделано 25 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель.

4. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в г.Воронеже равна 1/7. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в г.Воронеже за 40 лет.

5. Имеется 20 ящиков однородных деталей. Вероятность того, что в одном взятом наудачу ящике детали окажутся стандартными, равна 0.75. Найти наивероятнейшее число ящиков, в которых все детали стандартные.

6. Два боевика стреляют по цели. Вероятность промаха для первого боевика равна 0.2, а для второго - 0.4. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если боевики произвели 25 залпов.

7. Два боевика стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого боевика равна 0.8, а для второго - 0.6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба боевика попадут в мишень, если боевики произвели 15 залпов.

8. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0.3. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений событий будет равно 30.

9. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0.7. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений событий будет равно 20.

10. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

11. Батарея произвела 6 выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0.3. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы 2 попаданий.

12. Комплекс автономной охранной сигнализации состоит из 5 независимо работающих объемных датчиков. Вероятность отказа датчика за время дежурства равна 0.2. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших датчиков; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших датчиков; в) вероятность того, что объект будет атакован за время дежурства, если это происходит когда отказывают хотя бы 4 элемента.

13. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании монеты сработает неправильно, равна 0,03. Найдите наиболее вероятное число случаев правильной работы автомата, если будет опущено 150 монет.

14. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0,97. Сколько нужно опустить монет, чтобы наиболее вероятное число случаев правильной работы автомата было равно 100?

15. Контрольное задание состоит из 5 вопросов, на каждый из которых дается 4 варианта ответа, причем один из них правильный, а остальные неправильные. Найдите вероятность того, что учащийся, не знающий ни одного вопроса, даст: а) 3 правильных ответа; б) не менее 3 правильных ответов (предполагается, что учащийся выбирает ответы наудачу).

16. Производится 10 независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,2. Найдите: а) наиболее вероятное число попаданий; б) вероятность того, что число попаданий равно наиболее вероятному числу попаданий.

17. Испытываются 20 элементов некоторого устройства. Вероятность того что элемент выдержит испытание равна 0.9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

18. В урне 10 белых и 30 черных шаров. Вынимают подряд 15 шаров (с возвращением). Определить наивероятнейшее число появлений белого шара.

19. Вероятность попадания боевиком в цель равна 0.8. Сделано 32 выстрела. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель.

20. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в г.Воронеже равна 1/8. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в г.Воронеже за 40 лет.

21. Имеется 40 ящиков однородных деталей. Вероятность того, что в одном взятом наудачу ящике детали окажутся стандартными, равна 0.75. Найти наивероятнейшее число ящиков, в которых все детали стандартные.

22. Два боевика стреляют по цели. Вероятность промаха для первого боевика равна 0.1, а для второго - 0.2. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если боевики произвели 35 залпов.

23. Два боевика стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого боевика равна 0.8, а для второго - 0.7. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба боевика попадут в мишень, если боевики произвели 10 залпов.

24. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0.3. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений событий будет равно 30.

25. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0.7. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений событий будет равно 20.

26. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 50 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

27. Батарея произвела 8 выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0.3. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы 2 попаданий.

28. Комплекс автономной охранной сигнализации состоит из 5 независимо работающих объемных датчиков. Вероятность отказа датчика за время дежурства равна 0.1. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших датчиков; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших датчиков; в) вероятность того, что объект будет атакован за время дежурства, если это происходит когда отказывают хотя бы 4 элемента.

29. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании монеты сработает неправильно, равна 0,01. Найдите наиболее вероятное число случаев правильной работы автомата, если будет опущено 120 монет.

30. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0,96. Сколько нужно опустить монет, чтобы наиболее вероятное число случаев правильной работы автомата было равно 100?

2.11 Предельные теоремы в теории вероятностей

При больших значениях n формула и малых p Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

становится очень сложной для практических расчетов. Поэтому часто используются ее приближенные варианты:
при $npq < 9$ - **формула Пуассона**:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \text{где} \qquad \lambda = np;$$

при $npq > 9$ - **локальная формула Муавра-Лапласа**:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi(x).$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функций $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 2 (функция $\varphi(x)$ - четная: $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Вероятность того, что событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз вычисляется по формулам:
при $npq < 9$:

$$P_n(k_1 < k < k_2) = \sum_{k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$$

при $npq > 9$:

$$P_n(k_1 < k < k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

- функция Лапласа,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функций Лапласа приведена в приложении 3. (функция $\Phi(x)$ - нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$).

Пример 13. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появление этого события в каждом испытании равна $p = 0.25$.

Решение. По условию, $n = 243$, $k = 70$, $p = 0.25$, $q = 1 - p = 0.75$. Так как $npq = 45.56 > 9$, то воспользуемся локальной формулой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad \text{где} \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0.25}{\sqrt{243 \cdot 0.25 \cdot 0.75}} = \frac{9.25}{6.75} = 1.37.$$

По таблице приложения 2 найдем $\varphi(1.37) = 0.1561$. ▲

Пример 14. Вероятность появления события в каждом из 100 испытаний равна 0.8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз не более 90 раз.

Решение. По условию, $n = 100$, $k_1 = 75$, $k_2 = 90$, $p = 0.8$, $q = 1 - p = 0.2$. Так как $npq = 16 > 9$, то воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$$P_n(k_1 < k < k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{-5}{\sqrt{16}} = -1.25, \\ x_2 &= \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{10}{4} = 2.5. \end{aligned}$$

Т.к. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, по таблице приложения 3, получим:

$P_n(75 < k < 90) = \Phi(2.5) - \Phi(-1.25) = \Phi(2.5) + \Phi(1.25) = 0.4938 + 0.3944 = 0.8882.$▲

Пример 15. Учебник издан тиражом 10 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник будет сброшюрован неправильно, равна 0.0005. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Решение. По условию, $n = 10000$, $k = 5$, $p = 0.0005$, $q = 1 - p = 0.9995$. Так как $npq = 4.9 < 9$, то воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad \text{где} \qquad \lambda = np.$$

Подставляя исходные данные, получим: $\lambda = 10000 \cdot 0.0005 = 5$,

$$P_{10000}(3) = \frac{5^3}{3!}e^{-5} = \frac{125}{6e^5} = 0.14. \qquad ▲$$

Задача 12.

1. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

2. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0.6.

3. Вероятность рождения мальчика равна 0.51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

4. Монета брошена 2N раз. Найти вероятность, что герб выпадет ровно N раз.

5. Монета брошена 2N раз. Найти вероятность того, что герб выпадет на 2m раз больше, чем надпись.

6. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0.7. Найти вероятность того, что событие появится от 1470 до 1500 раз.

7. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0.7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 раз.

8. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0.7. Найти вероятность того, что событие появится не более 1469 раз.

9. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0.7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

10. Какова вероятность, что при 100 бросаниях монеты герб появится от 40 до 60 раз?

11. Устройство состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа любого элемента равна 0.002. Найти вероятность того, что откажут ровно 3 элемента.

12. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0.01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

13. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено 3 изделия.

14. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность, что будет повреждено менее 3 изделий.

15. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность, что будет повреждено более 3 изделий.

16. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено хотя бы одно изделие.

17. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды «Боржоми». Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0.003. Найти вероятность того, что магазин получит 2 разбитых бутылки.

18. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды «Боржоми». Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0.003. Найти вероятность того, что магазин получит меньше 2 разбитых бутылок.

19. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды «Боржоми». Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0.003. Найти вероятность того, что магазин получит больше двух разбитых бутылок.

20. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды «Боржоми». Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0.003. Найти вероятность того, что магазин получит хотя бы одну разбитую бутылку.

21. Радиопеленгатор перехватывает шифрованное сообщение. В силу помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0.01. Найти вероятность того, что в тексте из 1100 цифр, будет меньше 20 ошибок.

22. Радиопеленгатор перехватывает шифрованное сообщение. В силу помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0.01. Найти вероятность, что в принятом из 1100 цифр будет сделано ровно 7 ошибок.

23. В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0.006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 руб. страховых и в случае аварии получает от компании 1000 руб. Найти вероятность разорения страховой компании за год.

24. Мимо инспектора ГИБДД за время дежурства по дороге проезжает 1000 автомобилей. С каждого проезжающего водителя инспектор берет штраф 100 рублей. Вероятность появления на дороге сотрудника ФСБ равна 0.01. Если инспектор останавливает машину сотрудника ФСБ, то ему приходится выплачивать откат в размере 10 000 руб. Найти вероятность разорения инспектора ГИБДД за время дежурства.

25. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 50 раз.

26. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 25 раз.

27. Мимо инспектора ГИБДД за время дежурства по дороге проезжает 1000 автомобилей. С каждого проезжающего водителя инспектор берет штраф 100 рублей. Вероятность появления на дороге сотрудника ФСБ равна 0.01. Если инспектор останавливает машину сотрудника ФСБ, то ему приходится выплачивать откат в размере 10 000 руб. Найти вероятность того, что инспектор ГИБДД за время дежурства наберет штрафов на сумму более 70 000.

28. Мимо инспектора ГИБДД за время дежурства по дороге проезжает 1000 автомобилей. С каждого проезжающего водителя инспектор берет штраф 100 рублей. Вероятность появления на дороге сотрудника ФСБ равна 0.005. Если инспектор останавливает машину сотрудника ФСБ, то ему приходится выплачивать откат в размере 10 000 руб. Найти вероятность того, что инспектор ГИБДД за время дежурства наберет штрафов на сумму менее 10 000.

29. Радиопеленгатор перехватывает цифрованное сообщение. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0.001. Найти вероятность тог, что в принятом тексте из 1000 цифр будет сделано ровно 7 ошибок.

30. Радиопеленгатор перехватывает цифрованное сообщение. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0.001. Найти вероятность тог, что в принятом тексте из 1000 цифр будет сделано более 2 ошибок.

2.12 Геометрические вероятности

При геометрическом подходе к определению вероятности в качестве пространства Ω элементарных событий рассматривается произвольное множество конечной лебеговой меры на прямой, плоскости или пространстве.

Событиями называются всевозможные измеримые подмножества множества Ω. Вероятность события A определяется формулой	$p\,(A) = \dfrac{\mu\,(A)}{\mu\,(\Omega)}$

где $\mu\,(A)$обозначает лебегову меру множества A. При таком определении событий и вероятностей все аксиомы А.Н.Колмогорова выполняются.

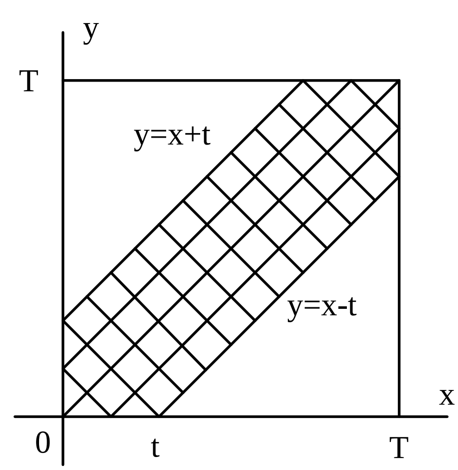
В конкретных задачах, которые сводятся к указанной выше вероятностной схеме, испытание интерпретируется как случайный выбор точки в некоторой области Ω, а событие A - как попадание выбранной точки в некоторую подобласть A области Ω. При этом требуется, чтобы все точки области Ω имели одинаковую возможность быть выбранными. Это требование обычно выражается словами «наудачу», «случайным образом» и т.д.

Пример 16. В круг радиуса **R** наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного правильного треугольника.

Решение. Искомая вероятность равна отношению площади треугольника к площади круга:

$$p = \frac{S_\Delta}{S_\text{O}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Пример 17. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, в любой момент времени интервала T. Сигнализатор сработает если разность между поступлениями сигналов меньше t. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает, если послано по одному сигналу от каждого сигнализатора.



Решение. Обозначим моменты поступления сигналов через x и y. По условию задачи сигнализатор сработает если

$y < x + t$ при $y > x$

$y > x - t$ при $y < x$

Изобразив полученную фигуру, вычислим отношение площадей

$$P = \frac{g}{S} = \frac{T\,(2T - t)}{T^2}. \qquad \blacktriangle$$

Задача 13.

1. Точка брошена в круг радиуса R. Найдите вероятность того, что она попадает внутрь данного вписанного квадрата.

2. В квадрат с вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) наудачу брошена точка (x,y). Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y < 2x$.

3. Расстояние от пункта **A** до **B** патрульная машина проходит за 2 мин, а пешеход - за 15 мин. Интервал движения патруля 25 мин. Хулиган подходит в случайный момент времени к пункту **A** и отправляется в **B** пешком. Найдите вероятность того, что в пути его догонит патрульная машина.

4. Расстояние от пункта **A** до **B** автобус проходит за 5 мин, а пешеход - за 20 мин. Интервал движения автобусов 45 мин. Вы подходите в случайный момент времени к пункту **A** и отправляетесь в **B** пешком. Найдите вероятность того, что в пути вас догонит очередной автобус.

5. На отрезок AB длиной 12 см наугад ставят точку M. Найдите вероятность того, что площадь квадрата, построенного на отрезке AM, будет между 36 см^2 и 81 см^2.

6. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 12. На плоскость наудачу брошена монета радиуса 4. Найдите вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

7. Точка (c, q) наудачу выбирается из квадрата с вершинами (0,0), (1,0), (1,1), (0,1). Найдите вероятность того, что корни уравнения $x^2 + cx + q = 0$ окажутся действительными и одного знака. ($c^2 \geq 4q, 4q \geq 0$)

8. Точка (c, q)наудачу выбирается из квадрата с вершинами (-1,-1),(1,-1), (1,1), (-1,1). Найдите вероятность, что корни уравнения $x^2+cx+q = 0$ будут действительные.

9. Точка (c, q)наудачу выбирается из квадрата с вершинами (-1,-1),(1,-1), (1,1), (-1,1). Найдите вероятность того, что корни уравнения $x^2 + cx + q = 0$ будут мнимые.

10. Точка (c, q)наудачу выбирается из квадрата с вершинами (-1,-1),(1,-1), (1,1), (-1,1). Найдите вероятность, что корни уравнения $x^2+cx+q = 0$ будут положительные.

11. Точка (c, q)наудачу выбирается из квадрата с вершинами (-1,-1),(1,-1), (1,1), (-1,1). Найдите вероятность того, что корни уравнения $x^2 + cx + q = 0$ будут разных знаков.

12. Точка (c, q)наудачу выбирается из квадрата с вершинами (-1,-1),(1,-1), (1,1), (-1,1). Найдите вероятность, что корни уравнения $x^2 + cx + q = 0$ будут одного знака.

13. Стержень длины a наудачу разломан на 3 части. Найдите вероятность того, что длина каждой части окажется больше /4.

14. Найдите вероятность того, что сумма двух наудачу взятых чисел из отрезка [-1,1] больше нуля, а их произведение отрицательно.

15. (Задача о встрече). Два лица договорились встретиться в определенном месте между 12 и 13 ч, причем каждый пришедший на свидание ждет другого в течение 20 мин, после чего уходит. Найдите вероятность встречи этих лиц, если каждый из них приходит на свидание в случайный момент времени, не согласованный с моментом прихода другого.

16. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов равновозможно в течение данных суток. Найдите вероятность того, что одному из пароходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 1 ч, а второго - 2 ч.

17. В квадрат со стороной 1 наудачу брошена точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до фиксированной стороны квадрата не превосходит x.

18. В квадрат со стороной 1 наудачу брошена точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата превосходит x.

19. В квадрат со стороной 1 наудачу брошена точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит x.

20. В квадрат со стороной 1 наудачу брошена точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата не превосходит x.

21. В прямоугольник со сторонами 1 и 2 брошена точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x.

22. В прямоугольник со сторонами 1 и 2 брошена точка A. Найдите вероятность, что расстояние от точки A до любой стороны прямоугольника не превосходит x.

23. В прямоугольник со сторонами 1 и 2 брошена точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей диагонали не превосходит x.

24. В квадрат со стороной a брошена точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали.

25. (Задача о встрече). Федералы знают, что лидер боевиков появляется на рынке между 14 и 15 ч, причем он там находится в течении 5 минут. Федералы подъезжают к рынку в случайное время (между 14 и 15 ч.), проводят спецоперацию в течение 20 минут, после чего уходят. Найдите вероятность поимки боевика, если каждый из них приходит на рынок в случайный момент времени, не согласованный с моментом прихода другого.

26. (Задача о встрече). Пограничники приходят на данный участок границы между 12 и 13 ч. Время обхода участка составляет 15 минут. В это же самое время границу пересекает бензовоз с контробандным спиртом. Бензовоз пересекает границу в течении 5 минут. Найдите вероятность задержания бензовоза пограничниками, если каждый из них подходит к границе в случайный момент времени, не согласованный с моментом прихода другого.

27. В интервале времени [0, T] в случайный момент времени u появляется сигнал длительности Δ. Приемник включается в случайный момент времени $\nu \in [0, \mathrm{T}]$ на время t. Найдите вероятность обнаружения сигнала приемником.

28. В круг вписан квадрат. Найдите вероятность того, что среди 4 точек, наудачу брошенных в круг, ровно одна попадет внутрь квадрата.

29. В круг вписан правильный треугольник. Найдите вероятность, что из 5 наудачу брошенных в круг точек ни одна не попадет внутрь указанного треугольника.

30. Мишень имеет форму квадрата, в который вписан круг. По мишени наудачу производится 4 независимых выстрела. Какова вероятность получения ровно 3 попаданий в круг?

Глава 3

Случайные величины

3.1 Дискретная случайная величина и плотность ее распределения

Определение. Совокупность случайных событий, образующих полную группу называется случайной величиной.

Случайная величина $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется случайной величиной дискретного типа, если множество ее значений конечно или счетно.

Каждому значению случайной величины $\mathbf{x}$ ставится в соответствие вероятность ее появления $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$, причем

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum p = 1.$$

Числа $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называются возможными значениями случайной величины $\mathbf{x}$, а числа $(p_1, p_2, ..., p_n)$ - вероятностями этих значений $(p_i = P(x = x_i))$. Таблица соответствия между возможными значениями случайной величины $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, и вероятностью ее появления $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$

$\mathbf{x}$	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$
$\mathbf{p}$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_k	$\cdots$

называется законом распределения дискретной случайной величины $\mathbf{x}$.

Аналитически закон распределения записывается в виде

$$f(x) = p_1\delta(x - x_1) + p_2\delta(x - x_2) + ... + p_n\delta(x - x_n),$$

или

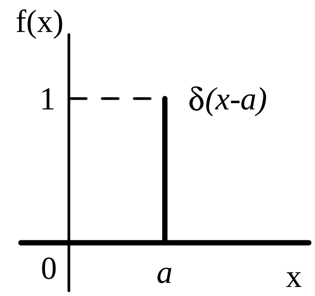
$$f(x) = \sum p_i\delta(x - x_i)$$

и носит названия плотности распределения (или дифференциальной функции распределения).
Здесь

$$\delta(x-a)=\begin{cases}1, & x=a;\\ 0, & x\neq a;\end{cases}$$

- дельта функция, которая имеет следующие свойства

$$\int \delta(x)dx=1, \qquad \int f(x)\delta(x-a)dx=f(a).$$



Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x,p) и соединяют последовательно отрезками прямых. Получающаяся при этом ломаная линия называется многоугольником распределения случайной величины **x**.

Пример 18. По мишени производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле $=0.8$. Требуется:
а) найти закон распределения дискретной случайной величины **x**, равной числу попаданий в мишень;
б) найти вероятности событий: $1\le x\le 3$; $x>3$;
в) построить многоугольник распределения.

Решение. а) Возможные значения случайной величины **x**: 0, 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$$p_0=p(x=0)=P_4(0)=C_4^0\cdot 0.8^0\cdot 0.2^4=0.0016.$$

$$p_1=p(x=1)=P_4(1)=C_4^1\cdot 0.8^1\cdot 0.2^3=0.0256.$$

$$p_2=p(x=2)=P_4(2)=C_4^2\cdot 0.8^2\cdot 0.2^2=0.1536.$$

$$p_3=p(x=3)=P_4(3)=C_4^3\cdot 0.8^3\cdot 0.2^1=0.4096.$$

$$p_4=p(x=4)=P_4(4)=C_4^4\cdot 0.8^4\cdot 0.2^0=0.4096.$$

Закон распределения **x** представится таблицей:

x	0	1	2	3	4
p	0.0016	0.0256	0.1536	0.4096	0.4096

Проверка:

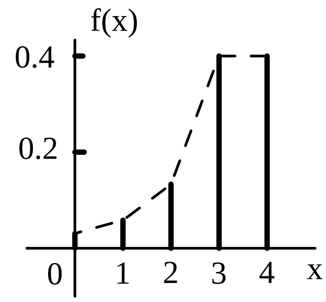
$$\sum p=0.0016+0.0256+0.1536+0.4096+0.4096=1.$$

Плотность распределения запишем в виде

$$f\left(x\right)=0.0016{\cdot}\delta\left(x\right)+0.0256{\cdot}\delta\left(x-1\right)+0.1536{\cdot}\delta\left(x-2\right)+0.4096{\cdot}\delta\left(x-3\right)+0.4096{\cdot}\delta\left(x-4\right)$$

б) Вероятность событий $1 \le x \le 3$ и $x > 3$ равны:

$$\begin{aligned} p(1 \le x \le 3) &= p(1,2,3) = p_1 + p_2 + p_3 \\ &= 0.0256 + 0.1536 + 0.4096 = 0.5888; \\ p(x > 3) &= p(4) = p_4 = 0,4096. \end{aligned}$$



в) Многоугольник распределения представлен на рисунке. ▲

Если возможными значениями дискретной случайной величины **x** являются

$$\left(0,1,2,...,n\right),$$

а соответствующие им вероятности вычисляются по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots n; \quad q = 1-p,$$

то говорят, что случайная величина **x** имеет **биномиальный** закон распределения:

x	0	1	2	$\cdots$	n
p	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	$\cdots$	$P_n(n)$

Рассмотренная выше в примере случайная величина **x** имеет биномиальный закон распределения, в котором $n = 4,\ p = 0,8$.

Пример 19. В урне 7 шаров, из которых 4 белых, а остальные черные. Из этой урны наудачу извлекаются 3 шара; **x** - число извлеченных белых шаров. Найти закон распределения дискретной случайной величины **x** и вероятность события $x \ge 2$.

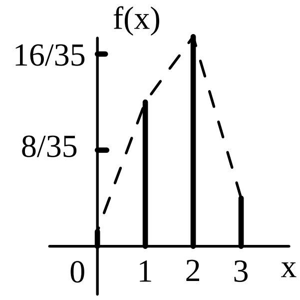
Решение. Возможные значения случайной величины **x**: 0, 1, 2, 3. Соответствующие им вероятности p_0, p_1, p_2, p_3 подсчитываем классическим способом по формуле гипергеометрической вероятности:

$$p_0 = p\,(\ \ = 0) = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35} \;\; ; \quad p_1 = p\,(\ \ = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35};$$

$$p_2 = p\,(\ \ = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}; \qquad p_3 = p\,(\ \ = 3) = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Закон распределения **x**:

x	0	1	2	3
p	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$



Проверка:

$$\sum p = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.$$

Плотность распределения запишем в виде.

$$f(x) = \frac{1}{35} \cdot \delta(x) + \frac{12}{35} \cdot \delta(x-1) + \frac{18}{35} \cdot \delta(x-2) + \frac{4}{35} \cdot \delta(x-3)$$

Вероятность события $x \geq 2$ равна:

$$p(x > 2) = \frac{12}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}. \qquad \blacktriangle$$

Пусть заданы натуральные числа m, n, s, причем $m \leq n \leq s$. Если возможными значениями дискретной случайной величины **x** являются $(0, 1, 2, \ldots, m)$, а соответствующие им вероятности выражаются по формуле

$$p_k = p(x = k) = \frac{C_m^k \cdot C_{n-m}^{s-k}}{C_n^s}, \qquad k = 0, 1, ..., m,$$

то случайная величина **x** имеет **гипергеометрический** закон распределения. Случайная величина **x** из предыдущего примера распределена по гипергеометрическому закону с $n = 7,\ s = 3,\ m = 4$.

Другими часто встречающимися примерами законов распределения дискретной случайной величины являются: **геометрический:**

$$P_k = p \cdot q^{k-1}$$

Закон распределения **Пуассона**:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

где λ - положительное постоянное.

Задача 14.

1. Дискретная случайная величина **x** - число мальчиков в семьях с 5 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки: а) найдите закон распределения **x**; б) Найдите плотность и постройте многоугольник распределения; в) найдите вероятности событий: A - в семье не менее 2, но не более 3 мальчиков; B - не более 3 мальчиков; C - более одного мальчика.

2. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина **x** - число промахов. а) Найдите закон распределения **x**. б) Найдите плотность и постройте многоугольник распределения. в) Найдите вероятности событий: $x < 2$; $x \leq 3$; $1 < x \leq 3$.

3. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле - 0,5, для второго - 0,4. Дискретная случайная величина **x** -число попаданий в мишень. а) Найдите закон распределения **x**. б) Найдите плотность и постройте многоугольник распределения. в) Найдите вероятность события $x \geq 1$.

4. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. а) Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу красных карандашей в выборке. б) Найдите плотность и постройте многоугольник распределения. в) Найдите вероятность события $0 < x \leq 2$.

5. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично», наугад извлекают 3 работы. Найдите закон распределения дискретной случайной величины **x**, равной числу оцененных на «отлично» работ среди извлеченных. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения. Чему равна вероятность события $x > 0$?

6. Имеются 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

7. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу стандартных деталей в выборке. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

8. Дважды брошена игральная кость. Случайная величина **x** равна разности между числом очков при первом бросании и числом очков при втором бросании. Найдите закон распределения **x** и вероятность события $2 \leq x \leq 4$. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

9. Бросается игральная кость до первого появления шестерки. Случайная величина **x** равна количеству бросаний кости. Найдите закон распределения случайной величины **x** и вероятность события $x \leq 5$. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

10. Производится 10 независимых опытов Бернулли, причем вероятность успеха в каждом опыте равна 0.4. Случайная величина **x** - число успехов в 10 опытах. Составьте закон распределения **x** (биномиальный закон). Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

11. Монета подбрасывается 7 раз. Случайная величина **x** - число выпаданий герба. Найдите закон распределения **x**. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

12. Производится 6 независимых опытов Бернулли, в каждом из которых успех появляется с вероятностью 0.4. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу неудач в 6 опытах. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

13. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной частоте появления успеха в серии 7 независимых опытов Бернулли, если вероятность успеха в каждом опыте равна 0.6. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

14. 2 стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0.6, для второго - 0.2. Пусть случайная величина **x** равна разности между числом попаданий в мишень первым стрелком и числом попаданий в мишень вторым стрелком. Найдите закон распределения **x**. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

15. 2 стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по 2 выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.5, для второго - 0.6. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной общему числу попаданий в мишень. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

16. Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго - 0,75, для третьего - 0,8, для четвертого - 0,9. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу станков, которые не потребуют внимания рабочего. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

17. Монету подбрасывают 6 раз. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной отношению числа появлений герба к числу появлений цифры. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

18. На пути движения автомобиля 6 светофоров, каждый из них или разрешает, или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

19. Вероятность изготовления нестандартной детали 0,1. Из партии контролер берет деталь и проверяет ее на стандартность. Если деталь оказывается нестандартной, то дальнейшие испытания прекращаются, а партия вся задерживается. Если же деталь окажется стандартной, то контролер берет следующую и т.д., но всего он проверяет не более 5 деталей. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу стандартных деталей среди проверенных. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

20. В ящике лежат 7 изделий, из которых одно бракованное. Из ящика извлекают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное изделие. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу вынутых изделий.

21. Вероятность попадания в мишень стрелком при каждом выстреле равна 0.4. Имея в запасе 8 патронов, он ведет стрельбу до первого попадания а мишень или до израсходования всех патронов. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу израсходованных патронов. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

22. Автоматическая телефонная станция обслуживает 1000 телефонных точек. Вероятность того, что в течение 5 мин на АТС поступит вызов из телефонной точки, равна 0,005. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу вызовов, поступивших на АТС в течение 5 мин. Найдите плотность и многоугольник распределения. Чему равна вероятность того, что в течение 5 мин. а) на АТС поступит хотя бы один вызов; б) более 4 вызовов?

23. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,98. Для контроля наудачу взято 100 деталей. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу нестандартных деталей в выборке. Найдите вероятность того, что в выборке менее 2 нестандартных деталей.

24. Вероятность попадания в самолет при каждом выстреле из винтовки равна 0,001. Производится 3000 выстрелов. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу попаданий в самолет, и вероятность того, что произойдет хотя бы одно попадание. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

25. Мишень состоит из круга № 1 и двух концентрических колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг № 1 дает 10 очков, в кольцо № 2 - 5 очков, в кольцо № 3 - (-1) очко. Вероятности попадания в круг № 1 и кольца № 2 и № 3 соответственно равны 0,5; 0,3; 0,2. Найдите закон распределения суммы очков в результате 3 попаданий в мишень. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

26. Имеется 6 заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна 0.7. Найдите: а) закон распределения числа заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали; б) закон распределения для числа использованных заготовок; в) плотность и постройте многоугольник распределения.

27. На пути движения автомобиля с террористами 7 постов ГИБДД, каждый из них или разрешает, или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,7. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу постов, пройденных автомобилем с террористами до первой остановки. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

28. В ящике лежат 6 гранат, из которых одна с взрывателем. Из ящика извлекают гранаты одну за другой до тех пор, пока не будет вынута граната со взрывателем. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу вынутых гранат.

29. 2 боевика стреляют по одной цели, делая независимо друг от друга по 2 выстрела. Вероятность попадания в цель для первого боевика равна 0,7, для второго - 0,8. Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной общему числу попаданий в цель. Найдите плотность и постройте многоугольник распределения.

30. В ящике лежат 7 гранат, из которых 4 с взрывателем. Из этого ящика наудачу извлекаются 3 гранаты. а) Найдите закон распределения случайной величины **x**, равной числу вынутых гранат со взрывателем. б) Найдите плотность и постройте многоугольник распределения. в) Найдите вероятность события $0 < x \le 2$.

3.2 Функция распределения случайной величины

Определение. Функция накопления вероятности:

$$F(x) = P(x < x) = \sum_{x_i < x} P(x = x_i)$$

называется функцией распределения случайной величины.

Функция распределения обладает следующими **свойствами**:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$;
3. $F(x)$ - неубывающая функция на всей оси;

Вероятность попадания случайной величины **x** в интервал $x_1 \le x < x_2$ определяется формулой

$$P(x_1 \le x < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Функцию распределения можно получить интегрированием плотности распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx,$$

поэтому ее часто называют интегральной функцией распределения. Пользуясь определением δ-функции,

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$$

получим

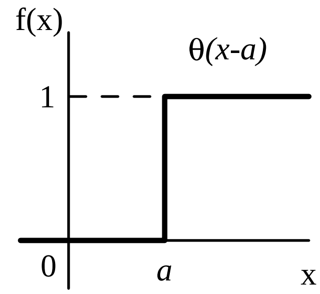
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \sum p_i \delta(x - x_i) dx = \sum p_i \theta(x - x_i).$$

Здесь

$$\theta(x-a) = \begin{cases} 1, & x \ge a; \\ 0, & x < a; \end{cases}$$

- единичная ступенька Хэвисайда, которая имеет следующие свойства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta(x-a)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$$



Следовательно, плотность распределения может быть получена дифференцированием интегральной функции распределения

$$f\left(x\right) = \frac{dF\left(x\right)}{dx},$$

отсюда и ее название - дифференциальная функция распределения.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $f\left(x\right) \geq 0, \left(-\infty < x < \infty\right);$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = 1$ (условие нормировки);

Интегрирование плотности вероятности дает возможность определить вероятность попадания случайной величины x в интервал $(a \leq x < b)$:

$$P\left(a \leq x < b\right) = \int\limits_{a}^{b} f\left(x\right) dx = F\left(a\right) - F\left(b\right).$$

График функции $F\left(x\right)$ представляет собой ступенчатую линию. Скачки функции $F\left(x\right)$ в точках $x = x_1, x_2, ...$ равны соответствующим вероятностям $p_1, p_2, ...$

Важно: Высота самой последней ступеньки должна равняться единице.

Пример 20. По мишени производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле $p = 0.2$. Требуется: а) найти функцию распределения дискретной случайной величины x, равной числу попаданий в мишень; б) найти вероятности событий: $x < 3$, $1 \leq x < 4$, $1 < x \leq 4$; в) построить многоугольник распределения.

Решение. а) Возможные значения случайной величины **x**: $(0, 1, 2, 3, 4)$. Соответствующие вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$$p_i = p(x = i) = P_4(i) = C_4^i \cdot 0.2^i \cdot 0.8^{4-i}$$

Закон распределения **x** представится таблицей:

x	0	1	2	3	4
p	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

Проверка:

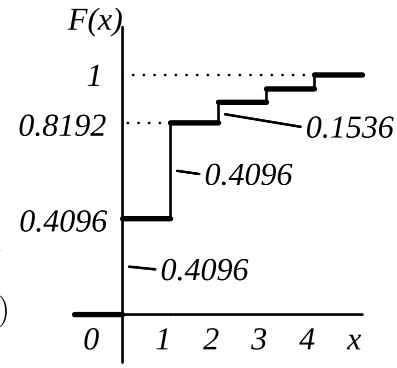
$$\sum p = 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 + 0.0256 + 0.0016 = 1.$$

Плотность распределения запишем в виде

$$f(x) = 0.4096 \cdot \delta(x) + 0.4096 \cdot \delta(x-1) + 0.1536 \cdot \delta(x-2) + 0.0256 \cdot \delta(x-3) + 0.0016 \cdot \delta(x-4)$$

Интегрируя плотность распределения, получим функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 0.4096 \cdot \theta(x) + 0.4096 \cdot \theta(x-1) + +0.1536 \cdot \theta(x-2) + 0.0256 \cdot \theta(x-3) + 0.0016 \cdot \theta(x-4)$$



Используя функцию распределения, вычислим вероятности событий:

$$x < 3, \qquad 1 \le x < 4, \quad 1 < x \le 4.$$

$$\begin{aligned} P(x<3) &= F(3-0) \\ &= \int_{-\infty}^{3-0} f(x)\,dx = 0.4096 \cdot \theta(x) + 0.4096 \cdot \theta(x-1) + 0.1536 \cdot \theta(x-2) \\ &= 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 = 0.9728 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 \le x < 4) &= F(4-0) - F(1) \\ &= \int_{1}^{4-0} f(x)\,dx = 0.4096 \cdot \theta(x-1) + 0.1536 \cdot \theta(x-2) + 0.0256 \cdot \theta(x-3) \\ &= 0.4096 + 0.1536 + 0.0256 = 0.5888 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 < x \le 4) &= F(4) - F(1+0) \\ &= \int_{1+0}^{4} f(x)\,dx = 0.1536 \cdot \theta(x-2) + 0.0256 \cdot \theta(x-3) + 0.0016 \cdot \theta(x-4) \\ &= 0.1536 + 0.0256 + 0.0016 = 0.1808. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Если случайная величина **x** имеет плотность вероятности $f(x)$, то имеет место формула

$$P(a \le x < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b).$$

В общем случае функция распределения записывается в виде суммы непрерывного $\overline{F}(x)$ и дискретного слагаемого:

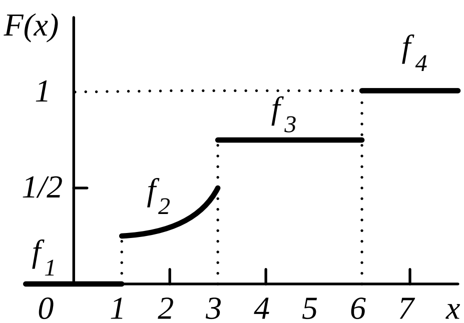
$$F(x) = \overline{F}(x) + \sum p_i \theta(x - x_i).$$

Плотность распределения вероятностей такой смешанной (дискретно-непрерывной) случайной величины есть

$$f(x) = \overline{f}(x) + \sum p_i \delta(x - x_i).$$

Пример 21. Найти плотность распределения для случайная величины **x** с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1, \\ \dfrac{(x-1)^2}{8}, \ 1 < x \le 3, \\ \dfrac{3}{4}, \ 3 < x \le 6, \\ 1, \ x > 6. \end{cases}$$



Решение. Разбивая кусочно-гладкую функцию $F(x)$ на части, получим:
интервал $x \le 1$: $f_1 = 0$;
интервал $1 < x \le 3$: $f_2 = \frac{(x-1)^2}{8}$;
интервал $3 < x \le 6$: $f_3 = \frac{3}{4}$;
интервал $x > 6$: $f_4 = 1$.

Аналитическое выражение для функции распределения $F(x)$ получим, используя свойства θ-функции.

$$\begin{aligned} F(x) &= f_1\theta(x) + f_2[\theta(x-1) - \theta(x-3)] + f_3[\theta(x-3) - \theta(x-6)] + f_4\theta(x-6) \\ &= 0 + \frac{(x-1)^2}{8} \cdot [\theta(x-1) - \theta(x-3)] + \frac{3}{4} \cdot [\theta(x-3) - \theta(x-6)] + 1 \cdot \theta(x-6) \end{aligned}$$

По определению плотности вероятности $f(x) = F'(x)$, с использованием свойства θ-функции $\theta'(x) = \delta(x)$ получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{(x-1)^2}{8} \cdot [\theta(x-1) - \theta(x-3)] + \frac{3}{4} \cdot \theta(x-3) + \frac{1}{4} \cdot \theta(x-6)\right] \\ &= \frac{2(x-1)}{8} \cdot [\theta(x-1) - \theta(x-3)] + \frac{(x-1)^2}{8} \cdot [\delta(x-1) - \delta(x-3)] \\ &+ \frac{3}{4} \cdot \delta(x-3) + \frac{1}{4} \cdot \delta(x-6) \end{aligned}$$

Поскольку практически плотность вероятности используется только при вычислениях под знаком интеграла,

$$\int f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

выражения содержащие δ- функции можно переписать в виде

$$f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)\,.$$

Тогда для второго слагаемого плотности вероятности получим:

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)^2}{8}\cdot[\delta(x-1)-\delta(x-3)] &= \frac{(1-1)^2}{8}\cdot\delta(x-1)-\frac{(3-1)^2}{8}\cdot\delta(x-3)\\ &= 0\cdot\delta(x-1)-\frac{1}{2}\cdot\delta(x-3) = -\frac{1}{2}\cdot\delta(x-3)\end{aligned}$$

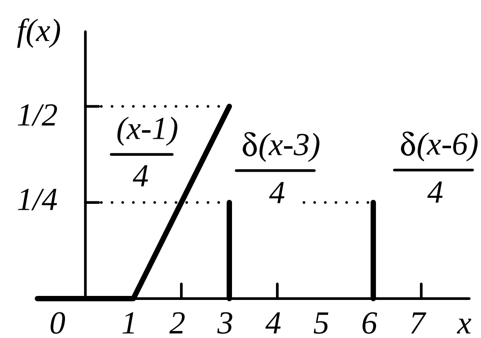
Окончательно, для плотности распределения, получим

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2(x-1)}{8}\cdot[\theta(x-1)-\theta(x-3)]-\frac{1}{2}\cdot\delta(x-3)+\frac{3}{4}\cdot\delta(x-3)+\frac{1}{4}\cdot\delta(x-6)\\ &= \frac{(x-1)}{4}\cdot[\theta(x-1)-\theta(x-3)]+\frac{1}{4}\cdot\delta(x-3)+\frac{1}{4}\cdot\delta(x-6)\end{aligned}$$

График функции плотности распределения вероятностей $f(x)$ показан на рисунке. Проверим нормировку:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)}{4}\cdot[\theta(x-1)-\theta(x-3)]\,dx\\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{4}\cdot\delta(x-3)+\frac{1}{4}\cdot\delta(x-6)\right]dx\\ &= \int_{1}^{3}\frac{(x-1)}{4}dx+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ &= \left.\frac{(x-1)^2}{8}\right|_1^3+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

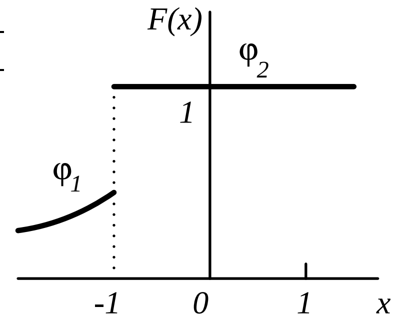
▲



Пример 22. Найти плотность распределения для случайная величины x с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} e, & x \le -1, \\ 1, & x > -1. \end{cases}$$

Решение. Разбивая кусочно-гладкую функцию $F(x)$ на части, получим:
интервал $x \le -1$: $\varphi_1 = e^x$;
интервал $x > -1$: $\varphi_2 = 1$.
График функции распределения показан на рисунке. Перепишем функцию распределения в аналитическом виде



$$F(x) = e^x \theta\left[-(x+1)\right] + \theta(x+1).$$

По определению плотности вероятности

$$f(x) = F'(x),$$

с использованием свойства θ-функции $\theta'(x) = \delta(x)$, получим

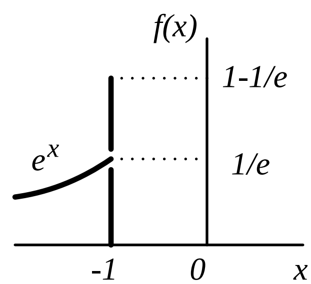
$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left[e^x \theta(-1-x) + \theta(x+1)\right] = e^x \theta(-1-x) - e^x \delta(-1-x) + \delta(x+1).$$

Используя свойства δ-функции

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$$

перепишем второе слагаемое в виде

$$e^x \delta(-1-x) = e^{-1}\delta(-1-x) = \frac{\delta(x+1)}{e}.$$



Окончательно, для плотности распределения получим

$$f(x) = e^x \cdot \theta\left[-(x+1)\right] + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \delta(x+1).$$

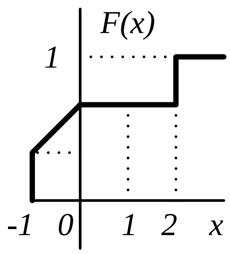
График функции плотности распределения вероятностей $f(x)$ показан на рисунке. Проверим нормировку:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^x \cdot \theta\left[-(x+1)\right] + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \delta(x+1)\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1} e^x dx + \left(1 - \frac{1}{e}\right) = e^x\Big|_{-\infty}^{-1} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) = e^{-1} + 1 - \frac{1}{e} = 1. \end{aligned}$$ ▲

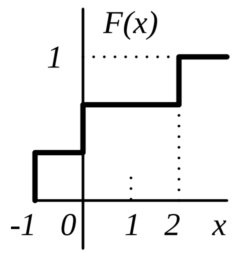
Задача 15.

Найти аналитическое выражение $F(x)$ для функции распределения смешанной случайной величины $\mathbf{x}$ заданной графиком. Напишите выражение для плотности распределения вероятности $f(x)$, проверте ее нормировку и постройте ее график.

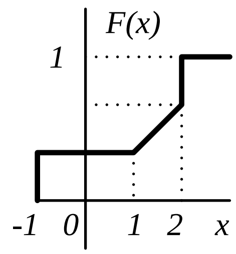
1.



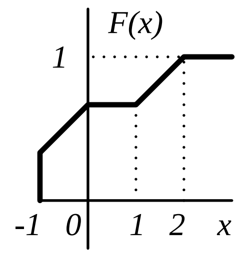
2.



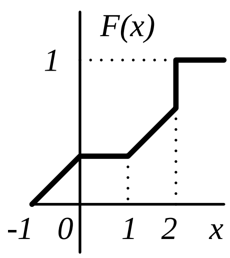
3.



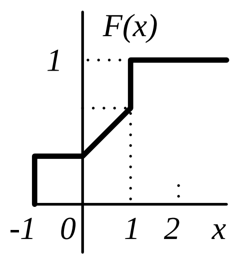
4.



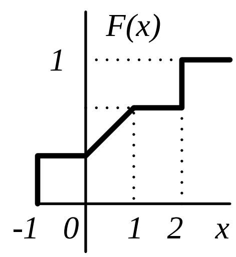
5.



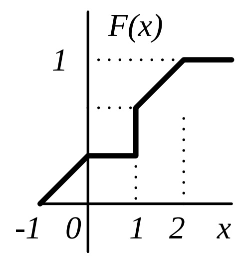
6.



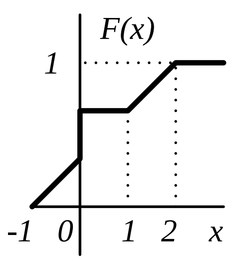
7.



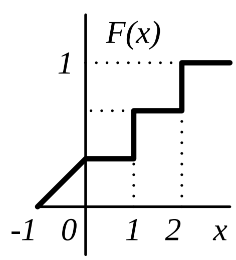
8.



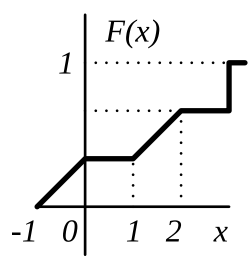
9.



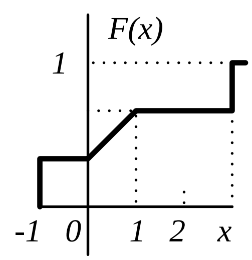
10.



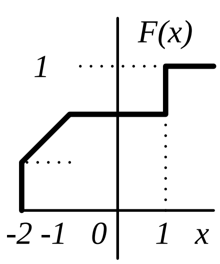
11.



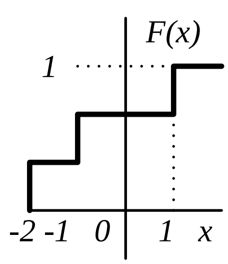
12.



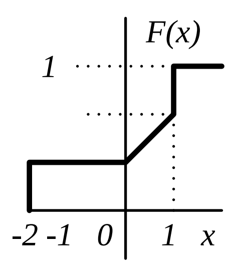
13.



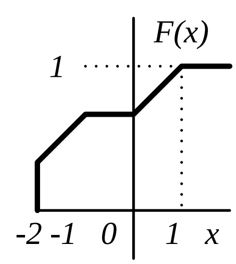
14.



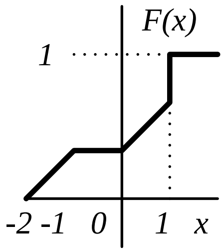
15.



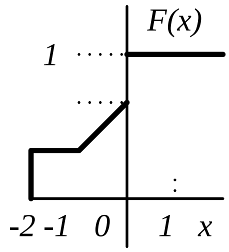
16.



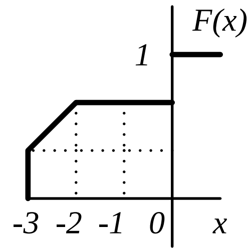
17.



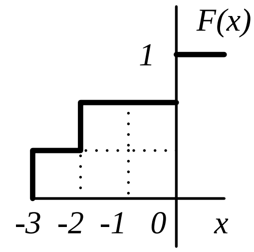
18.



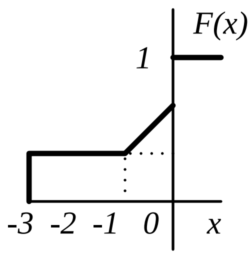
19.



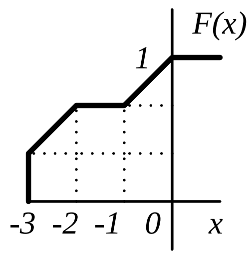
20.



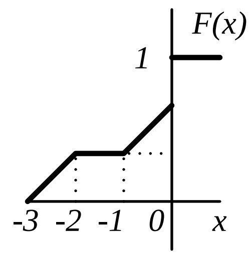
21.



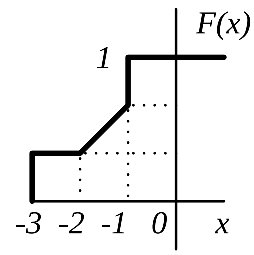
22.



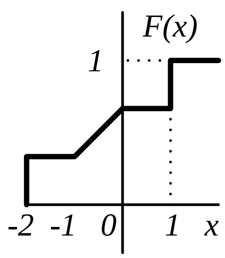
23.



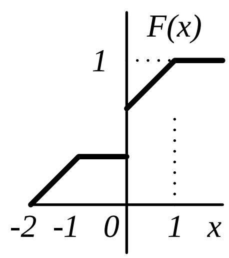
24.



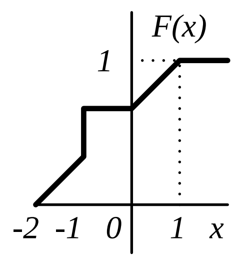
25.



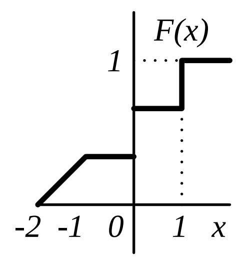
26.



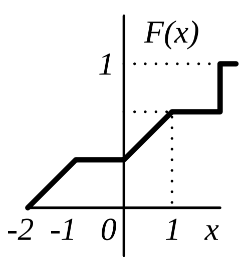
27.



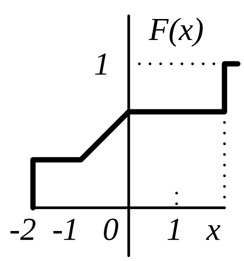
28.



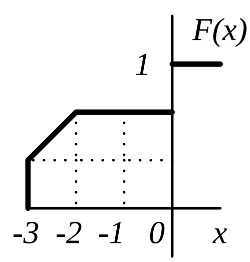
29.



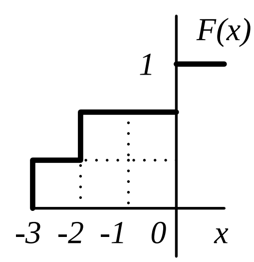
30.



31.



32.



3.3 Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины **x** законом распределения:

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

называется число

$$M(x) = \overline{x} = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

при условии абсолютной сходимости полученного ряда. Если **x** - непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $f(x)$, то

$$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf\left(x\right)\, dx.$$

Очевидно, что для дискретной плотности вероятности:

$$f(x) = \sum p_i\delta\left(x - x_i\right)$$

математическое ожидание есть

$$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf\left(x\right)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum xp_i\delta\left(x - x_i\right) dx = \sum x_ip_i.$$

Если **x** имеет дискретный закон распределения и $y = \varphi(x)$ - функция от случайной величины **x**, то

$$M(y) = M\left[\varphi\left(x\right)\right] = \sum \varphi\left(x_i\right) p_i;$$

справедлив также интегральный аналог этой формулы:

$$M(y) = M\left[\varphi\left(x\right)\right] = \int \varphi\left(x\right) f\left(x\right) dx.$$

Свойства математического ожидания:

- $M\left[c\right] = c,$
- $M\left[c \cdot x\right] = c \cdot M\left[x\right]$
- $M\left[x_1 + x_2 + ... + x_n\right] = M\left[x_1\right] + M\left[x_2\right] + ... + M\left[x_n\right]$
- Если $x_1, x_2, ...x_n$ независимы, то $M\left[x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n\right] = M\left[x_1\right] \cdot M\left[x_2\right] \cdot ... \cdot M\left[x_n\right]$.

Дисперсией случайной величины **x** называется число

$$D\left[x\right] = M\left[\left(x - M\left[x\right]\right)^2\right].$$

Раскрывая квадрат, получим

$$\begin{aligned} D\left[x\right] &= M\left[x^2 - 2x \cdot M\left[x\right] + M\left[x\right]^2\right] \\ &= M\left[x^2\right] - M\left[2x \cdot M\left[x\right]\right] + M\left[M\left[x\right]^2\right] \\ &= M\left[x^2\right] - 2 \cdot M\left[x\right] \cdot M\left[x\right] + M\left[x\right]^2 \\ &= M\left[x^2\right] - M\left[x\right]^2 \end{aligned}$$

Поэтому на практике используется короткая формула для вычисления дисперсии:

$$D\left[x\right] = M\left[x^2\right] - M\left[x\right]^2.$$

Число

$$\sigma_x = \sqrt{D\left[x\right]}$$

называется среднеквадратическим отклонением **x**. Из определения вытекает справедливость следующих формул для дисперсии:

$$D\left[x\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - M\left[x\right]\right)^2 f\left(x\right)\ dx, \quad D\left[x\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f\left(x\right)\ dx - M\left[x\right]^2,$$

если **x** - непрерывная величина с плотностью $f\left(x\right)$;

$$D\left[x\right] = \sum \left(x_i - M\left[x\right]\right)^2 p_i, \quad D\left[x\right] = \sum x_i^2 p_i - M\left[x\right]^2,$$

если **x** - дискретная случайная величина.

Свойства дисперсии:

- $D\left[c\right] = 0$
- $D\left[c \cdot x\right] = c^2 \cdot D\left[x\right]$

Если случайные величины **x**и **y** независимы, то дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий:

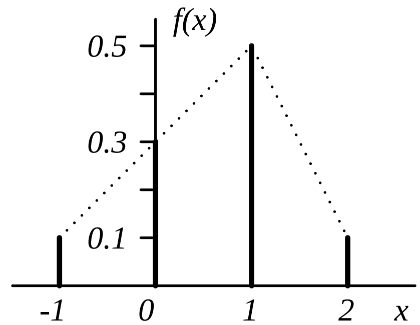
- $D\left[x + y\right] = D\left[x\right] + D\left[y\right]$.

Пример 23. Дискретная случайная величина **x** задана законом распределения:

x	-1	0	1	2
p	0.1	0.3	0.5	0.1

Найдите математические ожидания и среднеквадратические отклонения величин x и $y = 2x^2 + 1$.

Решение.
График плотности распределения показан на рисунке. Для математического ожидания имеем:



$$M\left[x\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = (-1)\cdot 0.1 + 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.5 + 2\cdot 0.1 = 0.6;$$

$$\begin{aligned} M\left[y\right] &= M\left[2x^2+1\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+1\right)p_i \\ &= \left(2\cdot(-1)^2+1\right)\cdot 0.1 + \left(2\cdot 0^2+1\right)\cdot 0.3 \\ &+ \left(2\cdot 1^2+1\right)\cdot 0.5 + \left(2\cdot 2^2+1\right)\cdot 0.1 = 2.2 \end{aligned}$$

Для определения среднеквадратического отклонения вычислим дисперсию случайной величины **x**:

$$D\left[x\right] = \sum x_i^2 p_i - M\left[x\right]^2,$$

Подставляя

$$\sum x_i^2 p_i = (-1)^2\cdot 0.1 + 0^2\cdot 0.3 + 1^2\cdot 0.5 + 2^2\cdot 0.1 = 1.0; \qquad M\left[x\right]^2 = 0.6^2 = 0.36$$

получим

$$D\left[x\right] = \sum x_i^2 p_i - M\left[x\right]^2 = 1.0 - 0.36 = 0.64.$$

Тогда среднеквадратическое отклонение случайной величины **x** есть:

$$\sigma_x = \sqrt{D\left[x\right]} = \sqrt{0.64} = 0.8.$$

Для определения среднеквадратического отклонения вычислим дисперсию случайной величины $y = 2x^2+1$ воспользуемся свойствами дисперсии:

$$D\left[y\right] = D\left[2x^2+1\right] = D\left[2x^2\right] + D\left[1\right] = 4\cdot D\left[x^2\right] + 0 = 4\cdot D\left[x^2\right],$$

Подставляя

$$\sum x_i^4 p_i = (-1)^4\cdot 0.1 + 0^4\cdot 0.3 + 1^4\cdot 0.5 + 2^4\cdot 0.1 = 2.2;$$

$$M\left[x^2\right] = \sum x_i^2 p_i = (-1)^2\cdot 0.1 + 0^2\cdot 0.3 + 1^2\cdot 0.5 + 2^2\cdot 0.1 = 1.0; \qquad M\left[x^2\right]^2 = 1^2 = 1$$

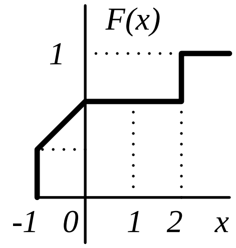
получим

$$D\left[y\right] = 4\cdot D\left[x^2\right] = 4\cdot\left(\sum x_i^4 p_i - M\left[x^2\right]^2\right) = 4\cdot(2.2-1) = 4\cdot 1.2 = 4.8.$$

Тогда среднеквадратическое отклонение случайной величины $y = 2x^2+1$ есть:

$$\sigma_y = \sqrt{D\left[y\right]} = \sqrt{4.8} \approx 2.2. \qquad \blacktriangle$$

Пример 24. Случайная величина **x** имеет функцию распределения показанную на рисунке. Найдите математические ожидания и среднеквадратические отклонения величин x и $y = 2x^2 + 3$.



Решение. Выпишем аналитическое выражение для функции распределения

$$F(x) = \frac{x+2}{3} \cdot (\theta(x+1) - \theta(x)) + \frac{2}{3} \cdot (\theta(x) - \theta(x-2)) + \theta(x-2)$$

По определению плотности вероятности $f(x) = F'(x)$, с использованием свойства θ-функции: $\theta'(x) = \delta(x)$ получим

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x+2}{3} \cdot (\theta(x+1) - \theta(x)) + \frac{2}{3} \cdot (\theta(x) - \theta(x-2)) + \theta(x-2)\right],$$

или

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (\theta(x+1) - \theta(x)) + \frac{x+2}{3} \cdot (\delta(x+1) - \delta(x)) + \frac{2}{3} \cdot \delta(x) + \frac{1}{3} \cdot \delta(x-2).$$

Используя свойства δ-функции

$$f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$$

перепишем второе слагаемое в виде

$$\frac{x+2}{3} \cdot (\delta(x+1) - \delta(x)) = \frac{-1+2}{3} \cdot \delta(x+1) - \frac{0+2}{3} \cdot \delta(x) = \frac{1}{3} \cdot \delta(x+1) - \frac{2}{3} \cdot \delta(x).$$

Окончательно, для плотности распределения получим

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (\theta(x+1) - \theta(x)) + \frac{1}{3} \cdot \delta(x+1) + \frac{1}{3} \cdot \delta(x-2).$$

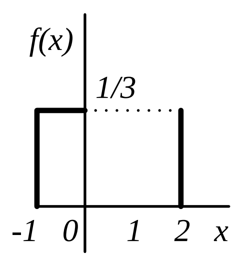


График плотности распределения показан на рисунке.

Для математического ожидания имеем:

$$\begin{aligned}
M[x] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{1}{3} \cdot (\theta(x+1) - \theta(x)) + \frac{1}{3} \cdot \delta(x+1) + \frac{1}{3} \cdot \delta(x-2)\right) dx \\
&= \int_{-1}^{0} \frac{1}{3} x dx + \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{1}{3} \cdot \delta(x+1) + \frac{1}{3} \cdot \delta(x-2)\right) dx \\
&= \frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Для определения математического ожидания величины $y = 2x^2+3$ воспользуемся ее свойствами:

$$M[y] = M[2x^2+3] = 2M[x^2] + M[3] = 2M[x^2] + 3,$$

т.е.

$$\begin{aligned}
M[x^2] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\ dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\frac{1}{3}\cdot(\theta(x+1)-\theta(x)) + \frac{1}{3}\cdot\delta(x+1) + \frac{1}{3}\cdot\delta(x-2)\right) dx \\
&= \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{3}x^2 dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\frac{1}{3}\cdot\delta(x+1) + \frac{1}{3}\cdot\delta(x-2)\right) dx \\
&= \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

Тогда

$$M[y] = 2M\left[x^2\right] + 3 = 2\cdot\frac{16}{9} + 3 = \frac{59}{9}.$$

Для определения среднеквадратического отклонения вычислим дисперсию случайной величины $\mathbf{x}$:

$$D[x] = M\left[x^2\right] - M[x]^2 = \frac{59}{9} - \frac{1}{6^2} = \frac{235}{36},$$

Тогда среднеквадратическое отклонение случайной величины $\mathbf{x}$ есть:

$$\sigma_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{\frac{235}{36}} = \frac{\sqrt{235}}{6}.$$

Для определения среднеквадратического отклонения величины $y = 2x^2+3$ воспользуемся свойствами дисперсии:

$$D[y] = D\left[2x^2+3\right] = D\left[2x^2\right] + D[3] = 4\cdot D\left[x^2\right] + 0 = 4\cdot D\left[x^2\right],$$

где

$$D\left[x^2\right] = M\left[x^4\right] - M\left[x^2\right]^2.$$

Подставляя

$$\begin{aligned}
M\left[x^4\right] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\ dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \left(\frac{1}{3}\cdot\left(\theta(x+1)-\theta(x)\right)+\frac{1}{3}\cdot\delta(x+1)+\frac{1}{3}\cdot\delta(x-2)\right)dx \\
&= \int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{3}x^4dx+\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \left(\frac{1}{3}\cdot\delta(x+1)+\frac{1}{3}\cdot\delta(x-2)\right)dx \\
&= \frac{1}{3}\frac{x^5}{5}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{3}+\frac{16}{3}=\frac{1}{15}+\frac{1}{3}+\frac{16}{3}=\frac{86}{15}; \\
M\left[x^2\right]^2 &= \left(\frac{16}{9}\right)^2=\frac{256}{81}
\end{aligned}$$

получим

$$D[y]=4\cdot D\left[x^2\right]=4\cdot\left(M\left[x^4\right]-M\left[x^2\right]^2\right)=4\cdot\left(\frac{86}{15}-\frac{256}{81}\right)=\frac{4168}{405}.$$

Тогда среднеквадратическое отклонение случайной величины $y=2x^2+3$ есть:

$$\sigma_y=\sqrt{D[y]}=\sqrt{\frac{4168}{405}}\approx 3.208. \qquad \blacktriangle$$

Пример 25. Известно, что $M[x]=2$, $M[y]=1.5$. Найдите математическое ожидание величины $z=3x-y+2.5$.

Решение. Используя свойства математического ожидания, имеем:

$$M[z]=M[3x-y+2.5]=M[3x]-M[y]+M[2.5]=3\cdot 2-1.5+2.5=7. \qquad \blacktriangle$$

Пример 26. Случайные величины x и y связаны соотношением $y=2-3x$, причем $M[x]=2$ и $D[x]=4$. Найдите $M[y]$, $D[y]$ и σ_y.

Решение. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получим:

$$M[y]=M[2-3x]=M[2]-3\cdot M[x]=2-3\cdot 2=-4;$$

$$D[y]=D[2-3x]=D[2]+(-3)^2\cdot D[x]=0+9\cdot 4=36;$$

$$\sigma_y=\sqrt{D[y]}=\sqrt{36}=6. \qquad \blacktriangle$$

Задача 16. Случайная величина $\mathbf{x}$ имеет функцию распределения из предыдущей **задачи 15**. Найдите математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение величины $\mathbf{x}$.

3.4 Дискретные законы распределения

3.4.1 Биномиальный закон распределения

Найдем $M\left[x\right]$, $D\left[x\right]$ и σ_x случайной величины x распределенной по биномиальному закону

$$P\left(x=k\right)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

По определению

$$M\left[x\right]=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k=\sum_{i=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}.$$

Введем дополнительную производящую функцию e^{kt}:

$$\lim_{t\to 0} e^{kt}=1.$$

Тогда

$$\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}e^{kt}=k\cdot\lim_{t\to 0}e^{kt}=k.$$

Эта функция позволяет произвести число k. Занесем производящую функцию под знак суммы:

$$\begin{aligned}M\left[x\right] &= \sum_{i=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}=\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} C_n^k e^{kt}p^k q^{n-k}=\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} C_n^k\left(e^t p\right)^k q^{n-k}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\left(e^t p+q\right)^n=np\ \lim_{t\to 0}e^t\left(e^t p+q\right)^{n-1}=np\left(p+q\right)^{n-1}=np\cdot 1^{n-1}=np.\end{aligned}$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся короткой формулой:

$$D\left[x\right]=M\left[x^2\right]-M\left[x\right]^2.$$

Вычисляя

$$\begin{aligned}M\left[x^2\right] &= \sum_{i=1}^{n} k^2C_n^k p^k q^{n-k}=\lim_{t\to 0}\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{n} C_n^k e^{kt}p^k q^{n-k}=\lim_{t\to 0}\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{n} C_n^k\left(e^t p\right)^k q^{n-k}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{d^2}{dt^2}\left(e^t p+q\right)^n=np\ \lim_{t\to 0}\left(e^t p+q\right)^{n-1}=n^2p^2+npq\end{aligned}$$

получим

$$D\left[x\right]=M\left[x^2\right]-M\left[x\right]^2=n^2p^2+npq-n^2p^2=npq.$$

Таким образом, числовые характеристики биномиального закона есть

$$M\left[x\right]=np,\quad D\left[x\right]=npq,\quad \sigma_x=\sqrt{D\left[x\right]}=\sqrt{npq}.$$

Пример 27. Найти $M[x]$, $D[x]$ и σ_x дискретной случайной величины x - числа появлений события в 5 независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна $p = 0.2$.

Решение. Случайная величина **x** распределена по биномиальному закону

$$P(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $n = 5$, $p = 0.2$, $q = 1 - p = 0.8$.

Отсюда $M[x] = np = 5 \cdot 0.2 = 1$, $D[x] = npq = 5 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.8$, $\sigma_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{0.8} = 0.894$. ▲

3.4.2 Геометрическое распределение

Найдем $M[x]$ и $D[x]$ случайной величины **x** распределенной по закону геометрической прогрессии $G(p)$:

$$P(x = k) = q^{k-1}p.$$

Данное распределение возникает в случаях, когда производится последовательность независимых опытов, в каждом из которых событие **A** наступает с вероятностью p. Опыты проводятся до первого наступления события **A**, а потом прекращаются.

По определению

$$M[x] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = p \sum k q^{k-1}.$$

Уберем множитель k дифференцированием

$$kq^{k-1} = \frac{d}{dq}\left(q^k\right),$$

$$M[x] = p \sum k q^{k-1} = p \frac{d}{dq} \sum q^k = p \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = p \frac{1}{(1-q)^2} = p\ \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой:

$$D[x] = M\left[x^2\right] - M[x]^2.$$

Уберем множитель k^2 последовательным дифференцированием

$$k^2 q^{k-1} = \frac{d}{dq}\left(q \cdot \frac{d}{dq}\left(q^k\right)\right).$$

Вычисляя

$$\begin{aligned} M\left[x^2\right] &= p \sum k^2 q^{k-1} = p \frac{d}{dq}\left(q \cdot \frac{d}{dq}\left(\sum q^k\right)\right) \\ &= p \frac{d}{dq}\left(q \cdot \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right)\right) = p \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = p \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2} \end{aligned}$$

получим

$$D\left[x\right] = M\left[x^2\right] - M\left[x\right]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Таким образом, числовые характеристики геометрического закона есть

$$M\left[x\right] = \frac{1}{p}, \quad D\left[x\right] = \frac{q}{p^2}.$$

Более сложная задача возникает в случае, если количество проводимых опытов ограничено числом n. Теперь, для выполнения условия нормировки, таблицу распределения дополняют значением $k = 0$ с вероятностью $p_0 = q^k$.

Действительно, в этом случае

$$\sum p_k = q^n + p\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = q^n + p\sum_{k=0}^{n-1} q^k = q^n + p\frac{1-q^n}{1-q} = q^n + 1 - q^n = 1.$$

Числовые характеристики данного распределения $G\left(p, n\right)$ даются выражениями:

$$M\left[x\right] = \frac{1-q^n}{p}, \quad D\left[x\right] = \frac{q - (2n-1)\,q^n + (2n-1)\,q^{n+1} - q^{2n}}{\left(1-q\right)^2}.$$

Пример 28. Автоматическая линия при нормальной настройке выпускает бракованное изделие с вероятностью $p = 0.001$. Переналадка линии производится после выпуска каждого бракованного изделия. Чему равно среднее число изделий, выпускаемых между двумя последовательными переналадками линии?

Решение. Число изделий, выпускаемых между последовательными переналадками линии, представляет собой случайную величину x, распределенную по геометрическому закону $G\left(p\right)$ при $p = 0.001$. Поэтому

$$M\left[x\right] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.001} = 1000. \qquad \blacktriangle$$

Задача 17. При одном выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью p. Ему разрешается стрелять до n промахов. Найти среднее число израсходованных стрелком патронов. Определить вероятность того, что стрелок израсходует ровно k патронов.

№	0.1	n	k	N	p	n	k	N	p	n	k	N	p	n	k	N	p	n	k
1	0.1	3	9	**7**	0.1	4	8	**13**	0.4	5	9	**19**	0.4	6	8	**25**	0.2	5	7
2	0.2	4	8	**8**	0.2	3	7	**14**	0.5	4	8	**20**	0.5	5	9	**26**	0.4	3	8
3	0.3	3	7	**9**	0.3	4	6	**15**	0.6	5	7	**21**	0.6	6	6	**27**	0.6	5	9
4	0.4	4	8	**10**	0.4	3	7	**16**	0.7	4	6	**22**	0.7	5	7	**28**	0.8	3	8
5	0.5	3	9	**11**	0.5	4	8	**17**	0.8	5	7	**23**	0.8	6	8	**29**	0.9	4	8
6	0.6	4	8	**12**	0.6	3	9	**18**	0.9	4	8	**24**	0.9	5	9	**30**	0.7	6	9

3.4.3 Гипергеометрическое распределение

Случайная величина имеет гипергеометрическое распределение с параметрами (N, M, n), если

$$P\left(x=k\right)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

3.4.4 Равномерное распределение

Равномерным называется распределение, при котором каждому значению случайной величины **x** ставится в соответствие одинаковая вероятность ее появления:

x	1	2	3	$\cdots$	n
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

Найдем математическое ожидание дискретной равномерно распределенной на интервале $[1, n]$ случайной величины x:

$$M\left[x\right]=\frac{1}{n}\cdot\sum_1^n k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Вычисляя второй начальный момент

$$M\left[x^2\right]=\frac{1}{n}\cdot\sum_1^n k^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}=\frac{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

найдем дисперсию

$$D(x)=M\left[x^2\right]-M\left[x\right]^2,$$

$$D(x)=\frac{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n^2-1}{12}.$$

3.4.5 Распределение Пуассона

Для случайной величины **x**, распределенной по закону Пуассона

$$p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

по определению математического ожидания

$$M\left[x\right]=\sum_{i=1}^n x_i p_i$$

получим

$$\begin{aligned} M\left[x\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lim_{t \to 0} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \lim_{t \to 0} \frac{d}{dt} e^{\lambda e^t} = e^{-\lambda} \lim_{t \to 0} \lambda e^t \cdot e^{\lambda e^t} = e^{-\lambda} \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой:

$$D\left[x\right] = M\left[x^2\right] - M\left[x\right]^2.$$

Вычисляя

$$\begin{aligned} M\left[x^2\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \lim_{t \to 0} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} \lim_{t \to 0} \frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda e^t} = \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

получим

$$D\left[x\right] = M\left[x^2\right] - M\left[x\right]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Таким образом, числовые характеристики распределения Пуассона определяются его параметром λ:

$$M\left[x\right] = \lambda = np, \quad D\left[x\right] = \lambda = np.$$

Задача 18.

(биномиалньное распределение)

1. Найти $M\left[x\right]$, $D\left[x\right]$ и σ_x дискретной случайной величины **x** - числа отказов элемента некоторого устройства в 10 независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна $p = 0.9$.

2. Произведено 7 независимых бросаний монеты. Случайная величина **x** - число выпаданий герба при этих 7 бросаниях. Найдите $M\left[x\right]$, $D\left[x\right]$ и σ_x.

3. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна $p = 0.8$, **x** - число попаданий в мишень в 100 независимых выстрелах. Найдите $M\left[x\right]$, $D\left[x\right]$ и σ_x.

4. 2 стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна p_1, а для второго - p_2. Найдите $M\left[x\right]$, $D\left[x\right]$ и σ_x, если **x** - общее число попаданий в мишень.

5. 2 стрелка независимо друг от друга сделали по 2 выстрела в мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле для первого стрелка p_1, а для второго эта вероятность равна p_2. Найдите $M\left[x\right]$, $D\left[x\right]$ и σ_x случайной величины **x**, равной общему числу попаданий в мишень.

6. Найти дисперсию дискретной случайной величины **x** - числа появления события в 2 независимых испытаниях, если, $M\left[x\right] = 1.2$.

7. Найти дисперсию дискретной случайной величины x - числа появления события в 2 независимых испытаниях, если, $M\left[x\right]=0.9$.

8. Найти вероятность появления события, если дисперсия числа появления события **x** в 3 независимых испытаниях равна $D\left[x\right]=0.63$.

(геометрическое распределение)

9. Вероятность обнаружения малоразмерного объекта в заданном районе в отдельном полете равна $p=1/3$. Сколько в среднем полетов придется совершить, прежде чем объект будет обнаружен?

10. За какое в среднем минимальное число подбрасываний игральной кости шестерка выпадет ровно 5 раз? Какова вероятность того, что указанное минимальное число подбрасываний окажется равным 7?

11. На пути движения автомобиля - пять светофоров. Каждый из них, независимо от других, с вероятностью $p=0.5$ запрещает движение. Пусть **x** - число светофоров, пройденных автомобилем до полной остановки. Найдите закон распределения случайной величины **x** и ее математическое ожидание.

12. Имеется три заготовки для одной детали. Вероятность изготовления годной детали из одной заготовки равна $p=0.8$. Заготовки используются до тех пор, пока не будет изготовлена годная деталь. Пусть **x** - число неиспользованных заготовок. Найти закон распределения случайной величины **x** и ее математическое ожидание.

13. Стрелок, имея 6 патронов в запасе, начинает стрельбу по цели, вероятность попадания в которую при каждом выстреле равна $1/3$. Стрельба прекращается после первого попадания в цель или после израсходования всех патронов. Найдите числовые характеристики числа израсходованных патронов.

(гипергеометрическое распределение)

14. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, по схеме выбора без возвращения извлекается 5 шаров. Пусть **x** - число белых шаров в выборке. Найти $M[x]$, $D[x]$ и σ_x.

15. Из урны, содержащей 5 белых и 7 черных шаров, по схеме выбора без возвращения извлекается 6 шаров. Пусть **x** - число белых шаров в выборке. Найти $M[x]$, $D[x]$ и σ_x.

16. Из урны, содержащей 6 белых и 8 черных шаров, по схеме выбора без возвращения извлекается 6 шаров. Пусть **x** - число белых шаров в выборке. Найти $M[x]$, $D[x]$ и σ_x.

17. Из урны, содержащей 7 белых и 9 черных шаров, по схеме выбора без возвращения извлекается 6 шаров. Пусть **x** - число белых шаров в выборке. Найти $M[x]$, $D[x]$ и σ_x.

18. Мишень состоит из круга № 1 и двух концентрических колец № 2 и № 3. Попадание в круг № 1 дает 10 очков, в кольцо № 2 - 5 очков, в кольцо № 3 - одно очко. Вероятности попадания в круг № 1 и кольца № 2 и № 3 соответственно равны 0,5; 0,2; 0,3. Пусть x - сумма очков, полученных в результате 3 попаданий в мишень. Найдите числовые характеристики величины **x**.

(равномерное распределение)

19. Сколько в среднем очков выпадает при подбрасывании игральной кости?

20. В системе, состоящей из 8 приборов - отказал один. Для обнаружения неисправности проверяются по порядку все приборы системы. Чему равно среднее число проверенных приборов до обнаружения неисправного?

21. На новогодней елке погасла гирлянда, состоящая из 15 лампочек. Для отыскания перегоревшей лампочки проверяются по очереди все лампочки гирлянды. Сколько в среднем лампочек необходимо проверить, чтобы обнаружить перегоревшую?

22. Из колоды карт (52 листа) наугад без возвращения достают по одной карте до тех пор, пока не попадется дама пик. Сколько в среднем карт прийдется извлечь из колоды?

23. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите числовые характеристики случайной величины, равной числу проб при открывании замка, если: а) испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует; б) испробованный ключ участвует в последующих опробованиях.

24. В ящике лежит n изделий, из которых одно бракованное. Из ящика извлекают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное изделие. Найдите среднее значение числа вынутых изделий.

(распределение Пуассона)

25. Вероятность изготовления стандартной детали равна $p = 0.98$. Для контроля наудачу взято 100 деталей. Пусть x - число нестандартных деталей в выборке. Найдите числовые характеристики случайной величины $\mathbf{x}$.

26. Математическое ожидание числа отказов радиоаппаратуры за 10000 ч работы равно 10. Определите вероятность отказа радиоаппаратуры за 100 ч.

27. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что за время 30 с, в течение которых телефонистка отлучалась, не будет ни одного вызова?

28. За рассматриваемый период времени среднее число ошибочных соединений, приходящихся на одного телефонного абонента, равно 8. Какова вероятность, что для данного абонента число ошибочных соединений будет больше 4?

29. Какова вероятность того, что среди 200 изделий окажется более 3 бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%?

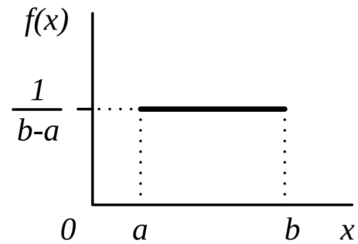
30. Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Найдите среднее значение числа элементов, отказывающих в течение года. Какова вероятность того, что в течение года откажут: а) 2 элемента; б) не менее 2 элементов?

3.5 Непрерывные законы распределения

3.5.1 Равномерное распределение

Случайная величина **x** имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

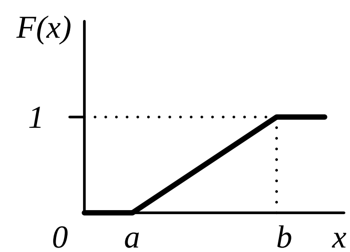


Аналитически выражение для плотности вероятности равномерного распределения можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\left(\theta(x-a) - \theta(x-b)\right)$$

Вероятность попадания равномерной случайной величины **x** в интервал $c \le x \le d$ есть

$$P(c \le x \le d) = \frac{1}{b-a}\int\limits_c^d dx = \frac{c-d}{b-a}.$$



Для функции распределения запишем

$$F(x) = \frac{x}{b-a}\left(\theta(x-a) - \theta(x-b)\right) + \theta(x-b)$$

Математическое ожидание дается выражением

$$\begin{aligned} M[x] &= \int x f(x)\,dx = \int x \frac{1}{b-a}\left(\theta(x-a) - \theta(x-b)\right)dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой:

$$D[x] = M\left[x^2\right] - M[x]^2.$$

Вычисляя

$$\begin{aligned} M\left[x^2\right] &= \int x^2 f(x)\,dx = \int x^2 \frac{1}{b-a}\left(\theta(x-a) - \theta(x-b)\right)dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} \end{aligned}$$

получим

$$D\left[x\right]=M\left[x^2\right]-M\left[x\right]^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{\left(b-a\right)^2}{12}.$$

Таким образом, числовые характеристики равномерного распределения есть

$$M\left[x\right]=\frac{b+a}{2},\quad D\left[x\right]=\frac{\left(b-a\right)^2}{12},\quad \sigma_x=\sqrt{D\left[x\right]}=\frac{\left(b-a\right)^2}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 29. Цена деления шкалы амперметра равна 0.1**A**. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0.02**A**.

Решение. Цена деления определяет параметры распределения $[a,b]=[0,\ 0.1]$. Тогда плотность распределения запишется в виде

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=\frac{1}{b-a}\left(\theta\left(x-a\right)-\theta\left(x-b\right)\right)\\&=\frac{1}{0.1-0}\left(\theta\left(x\right)-\theta\left(x-0.1\right)\right)=10\cdot\left(\theta\left(x\right)-\theta\left(x-0.1\right)\right).\end{aligned}$$

Вероятность ошибки, превышающей 0.02**A** дается выражением

$$P(0.02\le x\le 0.08)=\int\limits_{0.02}^{0.08}f(x)\,dx=10\cdot\int\limits_{0.02}^{0.08}dx=10\cdot 0.06=0.6.\qquad\blacktriangle$$

Пример 30. Диаметр круга x измерен приближенно. Рассматривая диаметр как случайную величину , распределенную равномерно в интервале $a\le x\le b$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

Решение. Площадь круга s выражается через его диаметр $d=x$ по формуле

$$s=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi x^2}{4}.$$

По свойству математического ожидания

$$M\left[s\right]=M\left[\frac{\pi x^2}{4}\right]=\frac{\pi}{4}M\left[x^2\right]$$

По определению математического ожидания

$$M\left[x^2\right]=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2dx=\frac{1}{\left(b-a\right)}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3\left(b-a\right)}=\frac{b^2+ba+a^2}{3}.$$

Таким образом, для площади круга получим

$$M\left[S\right] = M\left[\frac{\pi x^2}{4}\right] = \frac{\pi}{4} M\left[x^2\right] = \frac{\pi}{4}\frac{b^2 + ba + a^2}{3}.$$

По свойству дисперсии:

$$D\left[s\right] = D\left[\frac{\pi x^2}{4}\right] = \frac{\pi^2}{16} D\left[x^2\right]$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой:

$$D\left[x^2\right] = M\left[x^4\right] - M\left[x^2\right]^2.$$

Вычисляя

$$M\left[x^4\right] = \int x^4 f\left(x\right) dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^4 dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^5}{5}\right|_a^b = \frac{b^5 - a^5}{5\left(b-a\right)}$$

получим

$$D\left[x^2\right] = M\left[x^4\right] - M\left[x^2\right]^2 = \frac{b^5 - a^5}{5\left(b-a\right)} - \frac{\left(b^3 - a^3\right)^2}{3^2\left(b-a\right)^2} = \frac{4b^2 + 7ab + 4a^2}{45}\left(b-a\right)^2.$$

Таким образом, для дисперсии площади круга получим

$$D\left[s\right] = D\left[\frac{\pi x^2}{4}\right] = \frac{\pi^2}{16} D\left[x^2\right] = \frac{\pi^2}{16}\frac{4b^2 + 7ab + 4a^2}{45}\left(b-a\right)^2. \quad \blacktriangle$$

3.5.2 Нормальное распределение

Случайная величина **x** имеет нормальное распределение если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

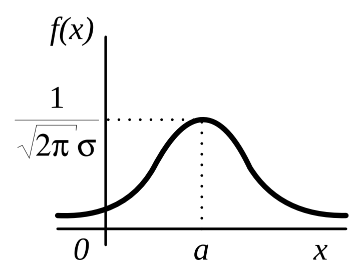


График плотности нормального распределения называют кривой Гаусса.

Проверим условие нормировки

$$\int f\left(x\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} d\left(x-a\right).$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся формулой Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} d\left(x-a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\sqrt{2\pi\sigma^2} = 1.$$

Математическое ожидание дается выражением

$$\begin{aligned} M\left[x\right] &= \int xf\left(x\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\left(x-a\right)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx + \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = 0 + a = a. \end{aligned}$$

Матожидание нормального распределения равно параметру a: $M\left[x\right] = a$.

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой: $D\left[x\right] = M\left[x^2\right] - M\left[x\right]^2$.

Вычисляя

$$\begin{aligned} M\left[x^2\right] &= \int x^2 f\left(x\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\left(x-a\right)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int 2\left(x-a\right)ae^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int a^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz + 0 + a^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz + a^2 \end{aligned}$$

интеграл в первом слагаемом возьмем по частям

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\int ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz^2 = \frac{-2\sigma^2}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\int zde^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(zde^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz\right) \\ &= \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(0 - \sqrt{\pi 2\sigma^2}\right) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Тогда

$$M\left[x^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz + a^2 = \sigma^2 + a^2,$$

получим

$$D\left[x\right] = M\left[x^2\right] - M\left[x\right]^2 = \sigma^2 + a^2 - a^2 = \sigma^2.$$

Дисперсия нормального распределения определяется параметром σ:

$$D\left[x\right] = \sigma^2.$$

Таким образом, числовые характеристики нормального распределения есть

$$M[x] = a, \quad D[x] = \sigma^2, \quad \sigma_x = \sqrt{D[x]} = \sigma.$$

Вероятность попадания нормальной случайной величины x в интервал $c \le x \le d$ есть

$$P(c \le x \le d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_c^d e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Для функции распределения запишем

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Интеграл

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

можно вычислить только численно, он протабулирован и называется функцией Лапласа. Вероятность попадания нормальной случайной величины x в интервал $c \le x \le d$ с помощью функции Лапласа вычисляется следующим образом:

$$P(\alpha \le x \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Пример 31. Вычислите вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины **x** меньше δ.

Решение. Требуется найти вероятность попадания случайной величины x в интервал $(a - \delta, a + \delta)$. С помощью функции Лапласа, получим

$$P(a - \delta \le x \le a + \delta) = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция Лапласа - нечетная:

$$\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad \blacktriangle$$

Пример 32. Найти вероятность того, что нормально распределенная случайная величина **x** попадет в интервал $(12 \le x \le 14)$, если $M[x] = 10$, $\sigma = 2$.

Решение. С помощью функции Лапласа, получим

$$P(12 \le x \le 14) = \Phi\left(\frac{14 - 10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12 - 10}{2}\right) = \Phi\left(\frac{4}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

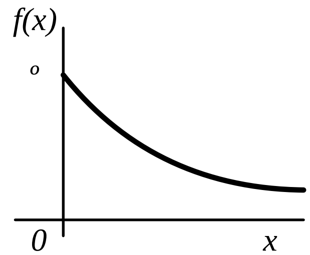
По таблице Приложения 2 находим: $\Phi(2) = 0.4772$; $\Phi(1) = 0.3413$. Таким образом

$$P(12 \le x \le 14) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359. \quad \blacktriangle$$

3.5.3 Показательное распределение и функция надежности

Случайная величина **x** имеет показательное (экспоненциальное) распределение если ее плотность вероятности имеет вид

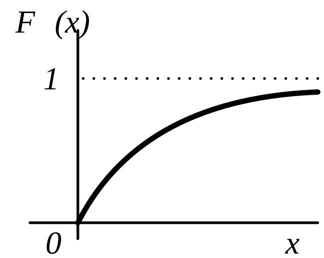
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$



Аналитически выражение для плотности вероятности показательного распределения можно записать в виде

$$f\left(x\right) = \lambda e^{-\lambda x} \theta\left(x\right)$$

Для функции распределения запишем



$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\theta(x)$$

Вероятность попадания экспоненциальное случайной величины **x** в интервал $a \leq x \leq b$ есть

$$P(a \leq x \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Проверим условие нормировки

$$\int f\left(x\right) dx = \int \lambda e^{-\lambda x} \theta\left(x\right) dx = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} dx = - \left. e^{-\lambda x}\right|_0^\infty = -\left(0 - 1\right) = 1.$$

Математическое ожидание дается выражением

$$\begin{aligned} M\left[x\right] &= \int x f\left(x\right) dx = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-\lambda x} \theta\left(x\right) dx = \lambda \int\limits_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \int\limits_0^\infty x d e^{-\lambda x} \\ &= -\left(\left. x e^{-\lambda x}\right|_0^\infty - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right) = -\left(0 + \frac{1}{\lambda} \left. e^{-\lambda x}\right|_0^\infty \right) = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Математическое ожидание экспоненциального распределения определяется параметром λ:

$$M\left[x\right] = \frac{1}{\lambda}.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой:

$$D\left[x\right] = M\left[x^2\right] - M\left[x\right]^2.$$

Вычисляя

$$\begin{aligned} M\left[x^2\right] &= \int x^2 f(x)\,dx = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\theta(x)\,dx = \lambda \int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx = \int\limits_{0}^{\infty} x^2 de^{-\lambda x} \\ &= -\left(x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx^2 \right) = 2\int\limits_0^\infty x e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

получим

$$D[x] = M\left[x^2\right] - M[x]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Дисперсия экспоненциального распределения определяется параметром λ:

$$D[x] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом, числовые характеристики показательного распределения есть

$$M[x] = \frac{1}{\lambda}, \quad D[x] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_x = \sqrt{D[x]} = \frac{1}{\lambda}.$$

Пусть некоторый элемент (или устройство) начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а в момент t происходит его отказ. Обозначим через λ - интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени). Длительность безотказной работы имеет показательное распределение с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\theta(t),$$

тогда вероятность отказа элемента за время t есть

$$F(t) = P(x \le t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)\theta(t).$$

Функция надежности $R(t)$ определяет вероятность безотказной работы за время t:

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

Пример 33. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение

$$F(t) = \left(1 - e^{-0.01t}\right)\theta(t)$$

Найти вероятность того, что за время $t = 50$ч. а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение. а) Вероятность отказа элемента за время $t = 50$ есть

$$F(50) = 1 - e^{-0.01\cdot 50} = 1 - e^{-0.5} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

б) Событие «элемент не откажет» противоположно предыдущему:

$$P = 1 - F(50) = \frac{1}{\sqrt{e}}. \quad \blacktriangle$$

Задача 19.

(равномерное распределение)

1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0.2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0.04; б) большая 0.05.

2. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 3 мин.

3. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновенье часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

3. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\mathbf{x}$, распределенной равномерно в интервале $(2, 8)$.

4. Найдите математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение дисперсию случайной величины $\mathbf{x}$, распределенной равномерно в интервале $(0, 1)$.

5. Случайная величина $\mathbf{x}$ равномерно распределена на отрезке $(a-h; a+h)$. Найти $M[x]$, $D[x]$ и σ_x.

6. Ребро куба x измерено приближенно. Рассматривая ребро куба как как случайную величину $\mathbf{x}$, распределенную равномерно в интервале $a \le x \le b$, найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

7. Маршрутка ходит через данную остановку с интервалом 10 мин. Вы подходите к остановке в случайный момент времени. Предполагая, что время ожидания автобуса на остановке имеет равномерный закон распределения, найдите среднюю продолжительность и среднеквадратическое отклонение времени ожидания.

(нормальное распределение)

8. Найти вероятность того, что нормально распределенная случайная величина $\mathbf{x}$ попадет в интервал $(15 \le x \le 25)$, если $M[x] = 20$, $\sigma = 5$.

9. Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины $\mathbf{x}$ соответственно равны 8 и 3. Найдите Вероятность того, что в результате испытания $\mathbf{x}$ примет значение, заключенное в промежутке [-1; 14].

10. Производится измерение вала без систематических ошибок (т.е. $M[x] = 0$). Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону с $\sigma = 10$мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

11. Производится взвешивание вещества без систематических ошибок (т.е. $M[x] = 0$). Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$г. Найдите вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величины 10 г.

12. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее фактического размера от проектного не превышает 10мм. Случайные отклонения фактического размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=5мм и математическим ожиданием a=0. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

13. При измерении детали ее длина **x** является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 22 мм и средним квадратическим отклонением 0,2 мм. Найдите интервал, в который с вероятностью 0,9544 попадает x.

14. Завод изготовляет шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков $d_0 = 5$мм. Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр есть случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением d_0 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,05$. При контроле бракуются шарики, диаметр которых отличается от номинального больше чем на $\varepsilon = 0,1$ мм. Определить, какой процент шариков в среднем будет отбраковываться.

15. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону с $\sigma = 20$ и $M\left[x\right] = 0$. Найти вероятность того, что из 3 независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4мм.

16. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если его отклонение x от проектного меньше 0.7мм. Считая что x - нормальная случайная величина с $\sigma = 0.4$ и $M\left[x\right] = 0$ найти процент годных шариков изготавливаемых автоматом.

17. Бомбардировщик сбросил бомбы на мост размером 30×8. Место падения бомбы есть нормальные случайные величины x и y с характеристиками $M[x] = 0$, $M[y] = 0$, $\sigma_x = 6$, $\sigma_y = 4$. Найти: а) вероятность попадания в мост 1 бомбы; б) вероятность попадания хотя бы одной бомбы из 2 сброшенных.

18. *Случайная величина **x** распределена нормально с $M[x] = 10$. Вероятность ее попадания в интервал $P(10 < x < 20) = 0.3$. Чему равна вероятность попадания x в интервал $[0, 10]$?

19. Случайная величина **x** распределена нормально с $a = 25$. Вероятность ее попадания в интервал $P\left(10 < x < 15\right) = 0.2$. Чему равна вероятность попадания x в интервал $[35,\ 40]$?

20. Случайная величина **x** распределена нормально с $M\left[x\right] = 10$ и $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0.9973 попадет величина **x**.

21. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если его отклонение x от проектного меньше 1мм. Считая что **x** - нормальная случайная величина с $\sigma = 0.5$ и $M\left[x\right] = 0$ найти процент годных шариков изготавливаемых автоматом.

22. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если его отклонение x от проектного меньше 2мм. Считая что **x** - нормальная случайная величина с $\sigma = 1$ и $M[x] = 0$ найти процент годных шариков изготавливаемых автоматом.

23. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если его отклонение x от проектного меньше 3мм. Считая что **x** - нормальная случайная величина с $\sigma = 1$ и $M[x] = 0$ найти процент годных шариков изготавливаемых автоматом.

24. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если его отклонение x от проектного меньше 4мм. Считая что **x** - нормальная случайная величина с $\sigma = 2$ и $M[x] = 0$ найти процент годных шариков изготавливаемых автоматом.

25. Случайная величина **x** распределена нормально с $M[x] = 0$ и $\sigma = 5$. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0.9973 попадет величина **x**.

26. Станок-автомат изготовляет валики с контролируемым диаметром x. Случайная величина **x** распределена нормально с $M[x] = 10$ и $\sigma = 0.1$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0.9973 попадут диаметры изготавливаемых валиков.

(функция надежности)

27. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение

$$F(t) = \left(1 - e^{-0.03t}\right)\theta(t)$$

Найти вероятность того, что за время $t = 100$ч. а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

28. Испытывают 2 независимо работающих элемента, длительность безотказной работы которых имеют показательное распределение:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \left(1 - e^{-0.02t}\right)\theta(t), \\ F_2(t) &= \left(1 - e^{-0.05t}\right)\theta(t). \end{aligned}$$

Найти вероятность того, что за время $t = 6$ч. а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

29. Испытывают 3 независимо работающих элемента, длительность безотказной работы которых имеют показательное распределение:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \left(1 - e^{-0.01t}\right)\theta(t), \\ F_2(t) &= \left(1 - e^{-0.02t}\right)\theta(t) \\ F_3(t) &= \left(1 - e^{-0.03t}\right)\theta(t). \end{aligned}$$

Найти вероятность того, что за время $t = 5$ч. а) только один элемент откажет; б) только 2 элемента откажут; в) откажут все 3 элемента.

30. Испытывают 3 независимо работающих элемента, длительность безотказной работы которых, распределены по показательному закону с плотностью:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-0.01t}\theta(t), \\ f_2(t) &= e^{-0.02t}\theta(t), \\ f_3(t) &= e^{-0.03t}\theta(t). \end{aligned}$$

Найти вероятность того, что за время $t = 10$ч. а) хотя бы один элемент откажет; б) не менее 2 элементов откажут; в) откажут все 3 элемента.

Глава 4

Случайные векторы

4.1 Функция случайного аргумента

Если каждому возможному значению случайной величины $\mathbf{x}$ соответствует значение случайной величины $\mathbf{y}$, то $\mathbf{y}$ называют функцией случайного аргумента $\mathbf{x}$ и записывают $\mathbf{y} = \mathbf{y(x)}$.

Утверждение. Для случайной величины $x = x\left(y\right)$ заданной плотностью распределения $f\left(x\right)$ соответствующая плотность $g\left(y\right)$ случайной величины y записывается в виде

$$g\left(y\right) = f\left[x\left(y\right)\right] \cdot x'\left(y\right).$$

Доказательство. По определению функции распределения:

$$dF = f\left(x\right)dx = f\left(x\right) \cdot dx\left(y\right) = f\left(x\right) \cdot x'\left(y\right)dy = g\left(y\right)dy. \quad \blacksquare$$

Для случайных величин дискретного типа плотность распределения выражается через δ-функции:

$$f\left(x\right) = \sum p_i \delta\left(x - x_i\right).$$

Тогда

$$g\left(y\right) = \sum p_i \delta\left(x\left(y\right) - x_i\right) \cdot x'\left(y\right).$$

Для вывода преобразования δ-функции вида $\delta\left(x\right) \to \delta\left(y\right)$ необходимо воспользоваться свойством ее разложения

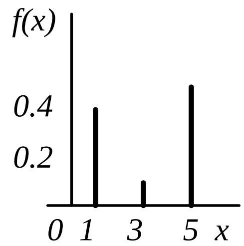
$$\delta\left(h\left(x\right)\right) = \frac{\sum \delta\left(x - x_i\right)}{\left|h'\left(x\right)\right|},$$

где x_i - корни функции $h\left(x\right)$. Например, для $\delta\left(2x^2 - 8\right)$ имеем $h\left(x\right) = 2x^2 - 3$, $h'\left(x\right) = 4x$ и корни $2x^2 - 8 = 0, \ \Rightarrow \ x_{1,2} = \pm 2$, тогда

$$\delta\left(2x^2 - 3\right) = \frac{1}{4x}\delta\left(x - 2\right) + \frac{1}{4x}\delta\left(x + 2\right).$$

Пример 34.
Дискретная случайная величина **x** задана законом распределения

x	1	3	5
p	0.4	0.1	0.5



Найти закон распределения случайной величины

$$y = 3x - 4.$$

Решение. Запишем аналитическое выражение для плотности распределения случайной величины x

$$f(x) = 0.4 \cdot \delta(x-1) + 0.1 \cdot \delta(x-3) + 0.5 \cdot \delta(x-5)$$

Из выражения $y = 3x - 4$ получим $x = (y+4)/3$, $x'(y) = 1/3$. Используя свойство разложения δ-функции:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\,\delta(x),$$

перепишем плотность

$$\begin{aligned} f(x(y)) &= 0.4 \cdot \delta\left(\frac{y+4}{3} - 1\right) + 0.1 \cdot \delta\left(\frac{y+4}{3} - 3\right) + 0.5 \cdot \delta\left(\frac{y+4}{3} - 5\right) \\ &= 0.4 \cdot \delta\left(\frac{1}{3}(y+1)\right) + 0.1 \cdot \delta\left(\frac{1}{3}(y-5)\right) + 0.5 \cdot \delta\left(\frac{1}{3}(y-11)\right) \\ &= 0.4 \cdot 3\delta(y+1) + 0.1 \cdot 3\delta(y-5) + 0.5 \cdot 3\delta(y-11) \end{aligned}$$

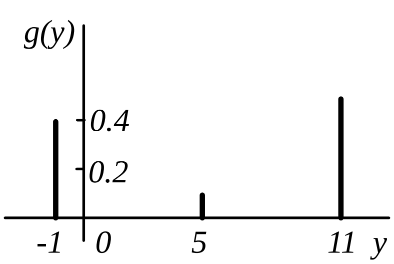
тогда

$$\begin{aligned} g(y) &= f[x(y)] \cdot x'(y) = \frac{0.4 \cdot 3\delta(y+1) + 0.1 \cdot 3\delta(y-5) + 0.5 \cdot 3\delta(y-11)}{3} \\ &= 0.4 \cdot \delta(y+1) + 0.1 \cdot \delta(y-5) + 0.5 \cdot \delta(y-11). \end{aligned}$$

График плотности распределения случайной величины $y = 3x - 4$ показан на рисунке. В табличном виде закон распределения y выглядит следующим образом

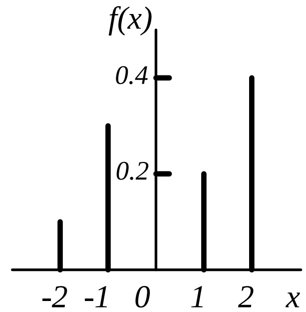
y	-1	5	11
p	0.4	0.1	0.5

▲



Пример 35. Дискретная случайная величина **x** задана законом распределения

x	-1	-2	1	2
p	0.3	0.1	0.2	0.4



Найти закон распределения случайной величины $y = x^2$.

Решение. Запишем аналитическое выражение для плотности распределения случайной величины x

$$f\left(x\right) = 0.3 \cdot \delta\left(x+1\right) + 0.1 \cdot \delta\left(x+2\right) + 0.2 \cdot \delta\left(x-1\right) + 0.4 \cdot \delta\left(x-2\right)$$

Используя выражение $y = x^2$ получим

$$f\left(x\left(y\right)\right) = 0.3 \cdot \delta\left(\sqrt{y}+1\right) + 0.1 \cdot \delta\left(\sqrt{y}+2\right) + 0.2 \cdot \delta\left(\sqrt{y}-1\right) + 0.4 \cdot \delta\left(\sqrt{y}-2\right).$$

Для примера рассмотрим первое слагаемое $0.3 \cdot \delta\left(\sqrt{y}+1\right)$. Используя свойство разложения δ-функции

$$\delta\left(h\left(x\right)\right) = \frac{\sum \delta\left(x - x_i\right)}{\left|h'\left(x\right)\right|},$$

имеем $h\left(y\right) = \sqrt{y}+1$, $h'\left(y\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ и корни $\sqrt{y}+1 = 0, \;\; \Rightarrow y = 1^2$, тогда

$$0.3 \cdot \delta\left(\sqrt{y}+1\right) = 0.3 \cdot 2\sqrt{y}\delta\left(y-1\right).$$

Аналогичные преобразования для остальных слагаемых дают

$$\begin{aligned}
0.1 \cdot \delta\left(\sqrt{y}+2\right) &= 0.1 \cdot 2\sqrt{y}\delta\left(y-2^2\right), \\
0.2 \cdot \delta\left(\sqrt{y}-1\right) &= 0.2 \cdot 2\sqrt{y}\delta\left(y-1\right), \\
0.4 \cdot \delta\left(\sqrt{y}-2\right) &= 0.4 \cdot 2\sqrt{y}\delta\left(y-4\right).
\end{aligned}$$

Собирая все слагаемые, имеем

$$\begin{aligned}
f\left(x\left(y\right)\right) &= 2\sqrt{y}\left(0.3 \cdot \delta\left(y-1\right) + 0.1 \cdot \delta\left(y-4\right) + 0.2 \cdot \delta\left(y-1\right) + 0.4 \cdot \delta\left(y-4\right)\right), \\
&= \sqrt{y}\left(\delta\left(y-1\right) + \delta\left(y-4\right)\right).
\end{aligned}$$

Подставляя теперь в выражение $g\left(y\right) = f\left(x\left(y\right)\right) \cdot x'\left(y\right)$ производную

$$y = x^2, \quad x = \sqrt{y}, \quad x'\left(y\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

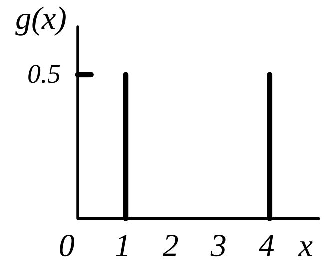
окончательно, получим:

$$g(y) = \sqrt{y}\left(\delta\left(y-1\right) + \delta\left(y-4\right)\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\,\delta(y-1) + \frac{1}{2}\,\delta(y-4).$$

График плотности распределения случайной величины $y = x^2$ показан на рисунке. В табличном виде закон распределения y выглядит следующим образом

y	1	4
p	0.5	0.5

▲



Задача 20. Зная $f(x)$ найти закон распределения случайной величины $y = g(x)$.

1	**x**	-2	-1	0	1	2	16	**x**	0	1	2	3	4
$y = 2x^2 + 3$	**p**	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1	$y = 5x^3 - 3$	**p**	0.1	0.2	0.3	0.4	0
2	**x**	-2	-1	0	1	3	17	**x**	-1	1	2	3	5
$y = 3x^3 - 2$	**p**	0.2	0.2	0.2	0.4	0	$y = 4x^2 - 4$	**p**	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1
3	**x**	-2	-1	0	1	4	18	**x**	-2	1	2	3	6
$y = -4x^2 + 1$	**p**	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1	$y = -2x^3 - 3$	**p**	0.1	0	0.3	0.4	0.2
4	**x**	-3	-1	0	2	5	19	**x**	-3	-1	2	3	7
$y = 3x^3 - 2$	**p**	0.4	0.2	0.2	0.2	0	$y = -5x^2 - 2$	**p**	0	0.1	0.2	0.4	0.3
5	**x**	-4	-1	0	3	6	20	**x**	-4	1	2	4	8
$y = 2x^2 + 3$	**p**	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	$y = 2x^3 - 3$	**p**	0.1	0	0.3	0.2	0.4
6	**x**	-3	-1	0	4	7	21	**x**	-5	-1	2	4	9
$y = -x^3 - 4$	**p**	0.2	0.2	0.4	0.2	0	$y = 3x^2 - 2$	**p**	0.1	0.2	0.3	0.1	0.3
7	**x**	-4	-1	0	5	8	22	**x**	-6	-2	2	5	8
$y = 2x^3 + 5$	**p**	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1	$y = -6x^3 - 3$	**p**	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
8	**x**	-3	-1	0	6	9	23	**x**	-7	-3	2	6	7
$y = 3x^3 - 6$	**p**	0.2	0.2	0.2	0.4	0	$y = 2x^2 - 6$	**p**	0.1	0.1	0.3	0.4	0.1
9	**x**	-3	-2	-1	0	1	24	**x**	-8	-4	2	7	6
$y = -4x^2 + 7$	**p**	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1	$y = -5x^3 - 5$	**p**	0.1	0.2	0.3	0.4	0
10	**x**	-2	-1	0	1	4	25	**x**	-9	-5	2	8	5
$y = 5x^2 - 8$	**p**	0.4	0.2	0.2	0.2	0	$y = x^2 - 4$	**p**	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1
11	**x**	-3	-1	0	1	3	26	**x**	-8	-4	2	3	4
$y = 4x^2 + 7$	**p**	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1	$y = -x^3 - 3$	**p**	0.1	0.2	0.1	0.4	0.2
12	**x**	-4	-1	0	1	4	27	**x**	-7	-3	2	3	5
$y = -3x^3 - 6$	**p**	0.2	0.4	0.2	0.2	0	$y = x^2 - 2$	**p**	0	0.2	0.3	0.2	0.3
13	**x**	-3	-1	0	1	3	28	**x**	-6	-1	2	4	6
$y = 2x^3 + 5$	**p**	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	$y = -2x^3 - 1$	**p**	0.1	0.2	0.3	0	0.4
14	**x**	-4	-1	0	1	4	29	**x**	-5	-1	2	3	7
$y = x^3 - 4$	**p**	0.2	0.2	0.4	0.2	0	$y = -2x^2 - 2$	**p**	0.1	0.2	0	0.4	0.3
15	**x**	-3	-1	0	1	3	30	**x**	-4	-2	2	4	8
$y = -2x^2 + 3$	**p**	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1	$y = x^3 - 3$	**p**	0.1	0	0.3	0.4	0.2

4.2 Системы двух случайных величин

Совокупность случайных величин $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется n - мерным случайным вектором, который характеризуется функцией распределения:

$$P(x_1 < x_1, x_2 < x_2, ..., x_n < x_n) = F(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Плотность распределения вероятности вычисляется по формуле

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}$$

и имеет условие нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) dx_1 dx_2 ... dx_n = 1.$$

Для непрерывной случайной величины функция распределения может выражаться в виде кратного интеграла:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2} ... \int\limits_{-\infty}^{x_n} f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

Далее, для простоты будем рассматривать двумерные случайные величины. Тогда

$$f\left(x, y\right) = \frac{\partial^2 F\left(x, y\right)}{\partial x \partial y} \qquad \text{и} \qquad F\left(x, y\right) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f\left(x, y\right) dx dy.$$

Редуцированные плотности вероятностей компонент есть

$$f\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right) dy, \quad f\left(y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right) dx.$$

Для систем дискретного типа

$$F\left(x, y\right) = \sum_{i<x}\sum_{j<y} P\left(x = i, y = j\right).$$

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F\left(-\infty, y\right) = F\left(x, -\infty\right) = 0,\ F\left(x, \infty\right) = F\left(x\right),$

$$F\left(\infty, y\right) = F\left(y\right), \quad F\left(\infty, \infty\right) = 1.$$

2. Функция $F\left(x, y\right)$ - монотонно неубывающая и непрерывная слева по каждому аргументу.

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник есть

$$P\left(x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\right) = F\left(x_1, y_1\right) + F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right) - F\left(x_2, y_1\right).$$

Дискретная случайная величина имеет плотность вероятности, записываемую через двумерную δ-функцию:

$$f\left(x, y\right) = \sum_{i,k} p_{ik} \delta\left(x - x_i, y - y_i\right),$$

и условие нормировки

$$\sum_i \sum_k p_{ik} = 1.$$

Случайные величины $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$. Для системы с плотностью вероятности $f(x, y)$ условием независимости $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ служит равенство

$$f(x, y) = f(x)f(y).$$

Пример 36. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

		x		
		3	10	12
y	4	0.17	0.13	0.25
	5	0.10	0.30	0.05

Найти законы распределения составляющих $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Являются ли величины $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ зависимыми?

Решение. Сложив вероятности по столбцам,

		x		
		3	10	12
y	4	0.17	0.13	0.25
	5	0.10	0.30	0.05
Σ_y		0.27	0.43	0.30

получим вероятности возможных значений $\mathbf{x}$:

x	3	10	12
p	0.27	0.43	0.30

В качестве контроля заметим, что

$$\sum p_i = 0.27 + 0.43 + 0.30 = 1.$$

Сложив вероятности по строкам,

		x			Σ_x
		3	10	12	
y	4	0.17	0.13	0.25	0.55
	5	0.10	0.30	0.05	0.45

получим вероятности возможных значений y:

y	4	5
p	0.55	0.45

В качестве контроля заметим, что

$$\sum p_i = 0.55 + 0.45 = 1.$$

Теперь, зная безусловные законы распределения **x** и **y** найдем безусловный закон распределения двумерной случайной величины $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$. Для этого необходимо найти произведения вероятностей **x** и **y** $p_{xy} = p_x p_y$:

		x			p_y
		3	10	12	
y	4	$p_3 p_4$	$p_{10} p_4$	$p_{12} p_4$	p_4
	5	$p_3 p_5$	$p_{10} p_5$	$p_{12} p_5$	p_5
p_x		p_3	p_{10}	p_{12}	

или

		x		
		3	10	12
y	4	0.1485	0.2365	0.165
	5	0.1215	0.1935	0.135

Проверим, что

$$\Sigma p_{xy} = 0.1485 + 0.2365 + 0.165 + 0.1215 + 0.1935 + 0.135 = 1.$$

Поскольку полученный (безусловный) закон распределения не совпадает с исходным (по заданию) условным законом распределением, то данные случайные величины **x** и **y** являются зависимыми. ▲

Пример 37. Закон распределения системы (x, y) задан таблицей:

		x			
		0	1	2	3
y	-1	0.02	0.06	0.08	0.04
	0	0.03	0.12	0.20	0.15
	1	0.05	0.02	0.22	0.01

Найти законы распределения составляющих **x** и **y**. Являются ли величины **x** и **y** зависимыми?

Решение. Сложив вероятности по столбцам и строкам получим редуцированные (безусловные) законы распределения составляющих **x** и **y**:

		x				p_y
		0	1	2	3	
y	-1	0.02	0.06	0.08	0.04	0.2
	0	0.03	0.12	0.20	0.15	0.5
	1	0.05	0.02	0.22	0.01	0.3
p_x		0.1	0.2	0.5	0.3	

Теперь, перемножая редуцированные законы получим безусловный совместный закон распределения двумерной случайной величины (**x** и **y**):

		x				p_y
		0	1	2	3	
y	-1	0.02	0.04	0.1	0.06	0.2
	0	0.05	0.1	0.25	0.15	0.5
	1	0.03	0.06	0.15	0.09	0.3
p_x		0.1	0.2	0.5	0.3	

Поскольку полученный (безусловный) закон распределения не совпадает с исходным (по заданию) условным законом распределением, то данные случайные величины **x** и **y** являются зависимыми. ▲

Пример 38.

Система случайных величин (x, y) равномерно распределена в круге радиусом **R** с центром в точке $(R, 0)$. Найдите:

1) плотность вероятности $f(x, y)$ системы (x, y);
2) плотности вероятности $f(x)$ и $f(y)$ случайных величин **x** и **y** в отдельности;
3) Являются ли **x** и **y** зависимыми?

Решение. Уравнение окружности радиуса **R** с центром в точке (**R,**0) имеет вид:

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2.$$

Переходя к полярным координатам

$$\left[\begin{array}{l} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{array}\right. , \quad \left[\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = tg\frac{y}{x} \end{array}\right.$$

получим уравнение данной окружности в виде:

$$\begin{array}{l} (r \cdot cos\varphi - R)^2 + r^2 \cdot sin^2\varphi = R^2, \\ r^2 \cdot cos^2\varphi - 2Rr \cdot cos\varphi + R^2 + r^2 \cdot sin^2\varphi = R^2, \\ r^2 = 2Rr \cdot cos\varphi, \\ r = 2R \cdot cos\varphi. \end{array}$$

Плотность вероятности равномерного в круге распределения задается формулой

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} A, & (x,y) \in G \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{array}\right.$$

где константа A находится из условия нормировки:

$$\int\int_G A dx dy = A\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2Rcos\varphi} r dr = A\int_0^{\pi} \frac{4R^2cos^2\varphi}{2} d\varphi = A\pi R^2 = 1,$$

или

$$A = \frac{1}{\pi R^2}.$$

Найдем редуцированную плотность вероятности составляющей **x**:

$$f(x) = \int_G f(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\sqrt{R^2-(x-R)^2}}^{\sqrt{R^2-(x-R)^2}} dy = \frac{2\sqrt{R^2-(x-R)^2}}{\pi R^2} = \frac{2\sqrt{2xR-x^2}}{\pi R^2}.$$

Найдем редуцированную плотность вероятности составляющей **y**:

$$f(y) = \int_G f(x,y)\,dx = \frac{1}{\pi R^2} \int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{R+\sqrt{R^2-y^2}} dx = 2\frac{R+\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}.$$

Случайные величины **x** и **y** независимы, если $f(x)\,f(y) = f(x,y)$. В данном случае

$$f(x)\,f(y) = \frac{2\sqrt{2xR-x^2}}{\pi R^2} \cdot 2\frac{R+\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2} \neq \frac{1}{\pi R^2} = f(x,y)\,,$$

т.е. случайные величины **x** и **y** зависимы. ▲

Задача 21.

Система (x, y) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $x = b,\ y = 0,\ y = ax$. Найдите:

1) плотность вероятности $f(x, y)$ системы (x, y);

2) функцию распределения $F(x, y)$;

3) плотности вероятности $f(x)$ и $f(y)$ величин $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в отдельности;

4) функции распределения $F(x)$ и $F(y)$ величин $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в отдельности;

5) вероятность того, что случайная точка (x, y) попадет в круг, вписанный в указанный треугольник.

6) Зависимы ли случайные величины $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$?

Вариант	a	b	Вариант	a	b	Вариант	a	b	Вариант	a	b	Вариант	a	b
1	6	1	7	6	2	13	3	1	19	4	6	25	6	6
2	5	1	8	7	2	14	2	1	20	3	6	26	6	5
3	4	1	9	8	2	15	3	2	21	4	5	27	6	4
4	3	1	10	9	2	16	2	2	22	3	5	28	6	3
5	2	1	11	8	2	17	3	3	23	4	4	29	6	2
6	1	1	12	7	2	18	2	3	24	3	4	30	6	1

4.3 Числовые характеристики системы случайных величин

Математическое ожидание составляющих $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ двумерной случайной величины (x, y) можно найти по формулам:

$$M[x] = \int x f(x)\,dx = \int\int x f(x, y)\,dxdy, \quad M[y] = \int y f(y)\,dx = \int\int y f(x, y)\,dxdy.$$

Дисперсии составляющих $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ двумерной случайной величины (x, y) можно найти по формулам:

$$D[x] = \int (x - M[x])^2 f(x)\,dx = \int\int (x - M[x])^2 f(x, y)\,dxdy,$$

$$D[y] = \int (y - M[y])^2 f(y)\,dx = \int\int (y - M[y])^2 f(x, y)\,dxdy.$$

Если выражения для дисперсии записывать в виде

$$D[x] = M\left[(x - M[x])^2\right] = \sigma_x^2, \quad D[y] = M\left[(x - M[y])^2\right] = \sigma_y^2,$$

тогда формулой

$$K_{xy} = M[(x - M[x])(y - M[y])] = \int\int (x - M[x])(y - M[y])\,f(x, y)\,dxdy$$

определяется корреляционный момент двух случайных величин **x** и **y**. Для практического применения чаще используется сокращенный вариант этой формулы:

$$K_{xy} = M[xy] - M[x]\,M[y]\,.$$

Коэффициентом корреляции называется отношение

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D[x]}\sqrt{D[y]}} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

т.е.

$$|r_{xy}| \leq 1.$$

Коэффициент корреляции - безразмерная величина, служит для оценки тесноты линейной связи между **x** и **y**: чем ближе коэффициент корреляции к единице - тем связь сильнее. Для несвязанных (независимых) между собой случайных величин коэффициент корреляции равен нулю. Действительно, при

$$f(x,y) = f(x)\,f(y)$$

получим

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \int\int (x - M[x])\,(y - M[y])\,f(x)\,f(y)\,dxdy \\ &= \int (x - M[x])\,f(x)\,dx \int (y - M[y])\,f(y)\,dy = 0 \end{aligned}$$

Для случайных величин с линейной связью

$$y = ax + b$$

имеем

$$\begin{aligned} K_{xy} &= M[(x - M[x])\,(y - M[y])] = M[(x - M[x])\,(ax + b - aM[x] - b)] \\ &= aM[(x - M[x])\,(x - M[x])] = aM\left[(x - M[x])^2\right] = aD[x] = a\sigma_x^2 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} D[y] &= M\left[(y - M[y])^2\right] = M\left[(ax + b - aM[x] - b)^2\right] \\ &= a^2 M\left[(x - M[x])^2\right] = a^2 D[x] = a^2\sigma_x^2, \end{aligned}$$

для коэффициента корреляции получим

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D[x]}\sqrt{D[y]}} = \frac{a\sigma_x^2}{a\sigma_x\sigma_x} = 1.$$

Коррелированными называют две случайные величины, если их коэффициент корреляции отличен от нуля.

Некоррелированными называют случайные величины с нулевым коэффициентом корреляции.

Коррелированные величины - зависимы. Однако из зависимости не следует коррелированность. Аналогично, две независимые величины - некоррелированы, но из некоррелированности не следует их независимость.

Пример 39.
Дана плотность распределения системы (x, y):

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sin(x+y)(\theta(x)-\theta(x-\pi/2))(\theta(y)-\theta(y-\pi/2))$$

найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

Решение. Найдем математическое ожидание

$$\begin{aligned}
M[x] &= \int\int xf\;dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\sin\left(x+y\right)dxdy\\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}x\left[\cos\left(x+\pi/2\right)-\cos\left(x\right)\right]dx=\frac{\pi}{4},\\
M[y] &= \int\int yf\;dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}y\cdot\sin\left(x+y\right)dxdy\\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}y\left[\cos\left(y+\pi/2\right)-\cos\left(y\right)\right]dy=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Найдем второй начальный момент

$$M\left[x^2\right]=\int\int x^2f\left(x,y\right)dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}x^2\cdot\sin\left(x+y\right)dxdy=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2,$$

$$M\left[y^2\right]=\int\int y^2f\left(x,y\right)dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}y^2\cdot\sin\left(x+y\right)dxdy=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2.$$

Найдем дисперсию

$$D\left[x\right]=M\left[x^2\right]-\left(M\left[x\right]\right)^2=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{16}-2$$

$$D\left[y\right]=M\left[y^2\right]-\left(M\left[y\right]\right)^2=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{16}-2.$$

Найдем корреляционную функцию $K_{xy} = M[xy] - M[x]\,M[y]$

$$M[xy] = \int\int xyf(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy \cdot sin(x+y)\,dxdy = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$K_{xy} = M[xy] - M[x]\,M[y] = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - 1,$$

и коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D[x]}\sqrt{D[y]}} = \frac{\frac{\pi}{4} - 1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16} - 2} = \frac{4(\pi - 4)}{(\pi^2 + 8\pi - 32)}. \quad \blacktriangle$$

Задача 22.

Случайный вектор распределен равномерно в треугольнике с вершинами в точках $(0,0), (0,a), (b,0)$. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

Вариант	a	b	Вариант	a	b	Вариант	a	b	Вариант	a	b	Вариант	a	b
1	6	1	7	6	2	13	3	1	19	4	6	25	6	6
2	5	1	8	7	2	14	2	1	20	3	6	26	6	5
3	4	1	9	8	2	15	3	2	21	4	5	27	6	4
4	3	1	10	9	2	16	2	2	22	3	5	28	6	3
5	2	1	11	8	2	17	3	3	23	4	4	29	6	2
6	1	1	12	7	2	18	2	3	24	3	4	30	6	1

Пример 40.

Дважды бросается игральная кость. Случайные величины **x** - появление шестерки, **y** - появление четной цифры. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

Решение. Закон распределения случайной величины (x, y) задан в таблице (**x** и **y**):

		x			p_y
		0	1	2	
y	0	1/4	0.04	0.1	1/4
	1	1/3	1/6	0.25	1/2
	2	1/9	1/9	1/36	1/4
p_x		25/36	10/36	1/36	

Редуцированные (безусловные) законы распределения составляющих **x** и **y** записаны в дополнительном столбце и строчке.

Найдем математическое ожидание

$$M[x] = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3},$$

$$M[y] = \sum y_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Найдем второй начальный момент

$$M\left[x^2\right] = \sum x_i^2 p_i = 0^2 \cdot \frac{25}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + 2^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18},$$

$$M\left[y^2\right] = \sum y_i^2 p_i = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Найдем дисперсию

$$D[x] = M\left[x^2\right] - (M[x])^2 = \frac{7}{18} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}$$

$$D[y] = M\left[y^2\right] - (M[y])^2 = \frac{3}{2} - (1)^2 = \frac{1}{2}.$$

Найдем корреляционную функцию

$$K_{xy} = M[xy] - M[x]\,M[y]$$

$$M[xy] = \sum_i \sum_k x_i p_{ik} y_k = \begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 & +0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 & +0 \cdot \frac{1}{9} \cdot 2 \\ +1 \cdot 0 \cdot 0 & +1 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 & +1 \cdot \frac{1}{9} \cdot 2 \\ +2 \cdot 0 \cdot 0 & +2 \cdot 0 \cdot 1 & +2 \cdot \frac{1}{36} \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2},$$

$$K_{xy} = M[xy] - M[x]\,M[y] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

и коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D[x]}\sqrt{D[y]}} = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{18}}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad \blacktriangle$$

Задача 23.

1. Дважды брошена игральная кость. Пусть **x** - количество выпавших очков при первом бросании, а **y** - сумма выпавших очков в обоих бросаниях. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

2. Один раз подбрасывается игральная кость. Случайные величины **x** - появление четной цифры, **y** - появление цифры кратной трем. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

3. Иван и Петр наудачу извлекают по одному шару из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара. Иван извлекает шар первым. Случайные величины: **x** - количество белых шаров у Ивана, **y** - количество белых шаров у Петра. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

4. Решить предыдущую задачу при условии, что шары извлекаются с возвращением. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

5. Из коробки, в которой 4 красных, 2 синих и 3 зеленых карандаша, наудачу извлекли 3 карандаша. Пусть **x** - число красных, а **y** - число синих карандашей среди извлеченных. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

6. 10 студентов написали контрольную работу по математике, причем 4 из них получили оценку «отлично», 3 - «хорошо», а остальные «удовлетворительно». Для разбора в группе случайным образом отобрано 4 работы. Пусть **x** - число отличных, а **y** - число хороших работ среди отобранных. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

7. 2 стрелка независимо друг от друга сделали по 2 выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,8, а для второго - 0,6. Пусть **x** - число попаданий первого стрелка, а **y** -число попаданий второго. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

8. В условиях предыдущей задачи пусть **y** - общее число попаданий в мишень. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

9. Случайная величина **x** принимает значения $(0, 1, 2)$ с вероятностями $(0.3, 0.7, 0.1)$, а независящая от нее случайная величина **y** - значения $(-1, 0, 1)$ с вероятностями $(0.3, 0.5, 0.2)$. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

10. По цели производится два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0.4, при втором 0.6. Случайные величины: **x** - число попаданий при первом выстреле, **y** - число попаданий при втором выстреле. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

11. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара наудачу извлекают 2 шара без возвращения. Случайные величины: **x** - число извлеченных белых шаров, **y** - число черных шаров в выборке. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

12. Число **x** выбирается случайным образом из множества целых чисел $(1, 2, 3)$. Затем из того же множества выбирается наудачу число **y**, большее первого или равное ему. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

13. Дважды брошена игральная кость. Пусть **x** - количество выпавших очков при первом бросании, а **y** - разность выпавших очков в обоих бросаниях. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

14. Иван и Петр наудачу извлекают по одному шару из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шара. Иван извлекает шар первым. Случайные величины: **x** - количество белых шаров у Ивана, **y** - количество белых шаров у Петра. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

15. Решить предыдущую задачу при условии, что шары извлекаются с возвращением. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

16. Из коробки, в которой 4 красных, 2 синих и 3 зеленых карандаша, наудачу извлекли 4 карандаша. Пусть **x** - число красных, а **y** - число синих карандашей среди извлеченных. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

17. 10 студентов написали контрольную работу по математике, причем 4 из них получили оценку «отлично», 3 - «хорошо», а остальные «удовлетворительно». Для разбора в группе случайным образом отобрано 3 работы. Пусть **x** - число отличных, а **y** - число хороших работ среди отобранных. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

18. 2 стрелка независимо друг от друга сделали по 2 выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,7, а для второго - 0,5. Пусть **x** - число попаданий первого стрелка, а **y** - число попаданий второго. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

19. В условиях предыдущей задачи пусть **y** - общее число попаданий в мишень. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

20. Случайная величина **x** принимает значения $(0, 1, 2)$ с вероятностями $(0.3, 0.7, 0.1)$, а независящая от нее случайная величина **y** - значения $(-1, 0, 1)$ с вероятностями $(0.3, 0.5, 0.2)$. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

21. По цели производится два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0.5, при втором 0.7. Случайные величины: **x** - число попаданий при первом выстреле, **y** - число попаданий при втором выстреле. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

22. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара наудачу извлекают 3 шара без возвращения. Случайные величины: **x** - число извлеченных белых шаров, **y** - число черных шаров в выборке. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

23. Число **x** выбирается случайным образом из множества целых чисел $(1, 2, 3)$. Затем из того же множества выбирается наудачу число **y**, большее первого или равное ему. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

24. Число **x** выбирается случайным образом из множества целых чисел $(1, 2, 3)$. Затем из того же множества выбирается наудачу число **y**, большее первого или равное ему. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

25. Дважды брошена игральная кость. Пусть **x** - количество выпавших очков при первом бросании, а **y** - произведение выпавших очков в обоих бросаниях. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

26. Иван и Петр наудачу извлекают по одному шару из урны, содержащей 8 белых и 3 черных шара. Иван извлекает шар первым. Случайные величины: **x** - количество белых шаров у Ивана, **y** - количество белых шаров у Петра. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

27. Решить предыдущую задачу при условии, что шары извлекаются с возвращением. Найти коэффициент корреляции составляющих **x** и **y**.

28. Бросается два раз игральная кость. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений единицы и шестерки.

29. Два раза бросается монета. Найти коэффициент корреляции между числом выпадения орла и решки.

30. Три раза бросается монета. Найти коэффициент корреляции между числом выпадения орла и решки.

Пример 41.

На вход шифрующего устройства подается сообщение $x = (1234567890)$. На выходе, шифрограмма имеет вид $y = (8460144261)$. Определить коэффициент корреляции входного $\mathbf{x}$ и выходного $\mathbf{y}$ сигналов шифрующего устройства.

Решение. Поскольку длина сообщения $n = 10$, то математическое ожидание находим по формулам

$$\begin{aligned} M[x] &= \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{1}{10}(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0) = \frac{45}{10} = 4.5, \\ M[y] &= \frac{1}{n}\sum y_i n_i = \frac{1}{10}(8\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1) = \frac{36}{10} = 3.6. \end{aligned}$$

Найдем второй начальный момент

$$\begin{aligned} M\left[x^2\right] &= \frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i = \frac{1}{10}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+0^2\right) \\ &= \frac{285}{10} = 28.5, \\ M\left[y^2\right] &= \frac{1}{n}\sum y_i^2 n_i = \frac{1}{10}\left(8^2\cdot 1+4^2\cdot 3+6^2\cdot 2+0^2\cdot 1+1^2\cdot 2+2^2\cdot 1\right) = \frac{190}{10} = 19. \end{aligned}$$

Найдем дисперсию

$$D[x] = M\left[x^2\right] - (M[x])^2 = 28.5 - (4.5)^2 = 8.25$$

$$D[y] = M\left[y^2\right] - (M[y])^2 = 18.6 - (3.4)^2 = 6.04.$$

Найдем корреляционную функцию

$$K_{xy} = M[xy] - M[x]\,M[y],$$

где $M[xy] = \sum\limits_i \sum\limits_k x_i p_{ik} y_k$. Поскольку $n_{ik} = \delta_{ik}$, то

$$\begin{aligned} M[xy] &= \frac{1}{n}\sum_i \sum_k x_i \delta_{ik} y_k = \frac{1}{n}\sum_i x_i y_i = \frac{1}{n}(x\cdot y) \\ &= \frac{1}{10}(1\cdot 8+2\cdot 4+3\cdot 6+4\cdot 0+5\cdot 1+6\cdot 4+7\cdot 4+8\cdot 2+9\cdot 6+0\cdot 1) \\ &= \frac{161}{10} = 16.1; \end{aligned}$$

корреляционная функция

$$K_{xy} = M[xy] - M[x]\,M[y] = 16.1 - 4.5\cdot 3.6 = -0.1,$$

а коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D\,[x]}\sqrt{D\,[y]}} = \frac{-0.1}{\sqrt{8.25}\sqrt{6.04}} = -0.0142. \qquad \blacktriangle$$

Задача 24.

1. На вход шифрующего устройства подается сообщение **x**. На выходе, шифрограмма имеет вид **y**. Определить коэффициент корреляции входного **x** и выходного **y** сигналов шифрующего устройства.

1	**x**	1234567890	11	**x**	1234567890	21	**x**	1234567890
	y	1123432123		**y**	1135672123		**y**	1663332123
2	**x**	1234567890	12	**x**	1234567890	22	**x**	1234567890
	y	1234532123		**y**	1123433567		**y**	1124327766
3	**x**	1234567890	13	**x**	1234567890	23	**x**	1234567890
	y	1123423453		**y**	1123437567		**y**	1333332123
4	**x**	1234567890	14	**x**	1234567890	24	**x**	1234567890
	y	1123445673		**y**	1356332123		**y**	1177772123
5	**x**	1234567890	15	**x**	1234567890	25	**x**	1234567890
	y	1145672123		**y**	1176532123		**y**	1125555123
6	**x**	1234567890	16	**x**	1234567890	26	**x**	1234567890
	y	1876532123		**y**	1176532123		**y**	1122222123
7	**x**	1234567890	17	**x**	1234566660	27	**x**	1234567890
	y	1156782123		**y**	1123437653		**y**	1123488883
8	**x**	1234567890	18	**x**	1234567890	28	**x**	1234567890
	y	1123678923		**y**	1123765323		**y**	1123437777
9	**x**	1234567890	19	**x**	1234567890	29	**x**	1255557890
	y	1167892123		**y**	1136752123		**y**	1123439999
10	**x**	1234567890	20	**x**	1234567890	30	**x**	1244557890
	y	1167892123		**y**	1127636123		**y**	1123432123

4.4 Функционально зависимые случайные величины

Рассмотрим случайный вектор (x, y). Если значения случайных величин **x** и **y** функционально связаны $y = \varphi(x)$, то условная плотность величины **y** при $\mathbf{x} = x$ выражается через δ-функцию:

$$f(y/x) = \delta(y - \varphi(x)).$$

Тогда совместная плотность вероятности

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

имеет вид

$$f(x,y) = f(y/x) \cdot f(x) = f(x) \cdot \delta(y - \varphi(x)).$$

Отсюда найдем редуцированную плотность случайной величины **y**:

$$f(y) = \int f(x,y)dx = \int f(x) \cdot \delta(y - \varphi(x))dx.$$

Для вывода преобразования δ-функции вида $\delta(x) \to \delta(y)$ необходимо воспользоваться свойством разложения

$$\delta(h(x)) = \frac{\sum \delta(x - x_i)}{|h'(x)|},$$

где x_i - корни функции $h(x)$.

Пример 42. Найти плотность распределения случайной величины $y = ax + b$ по известной плотности распределения $f\,(x)$ случайной величины **x**.

Решение.

1) Найдем редуцированную плотность случайной величины **y**:

$$f(y) = \int f\,(x,y)\,dx = \int f\,(x) \cdot \delta\,(y - ax - b)\,dx.$$

Для преобразования δ-функции воспользуемся формулой:

$$\delta(a\; h(x)) = \frac{1}{a}\;\delta(h(x)),$$

тогда

$$\delta\,(y - ax - b) = \delta\left(a \cdot \left(x - \frac{y-b}{a}\right)\right) = \frac{1}{a}\;\delta\left(x - \frac{y-b}{a}\right).$$

и для плотности вероятности случайной величины **y** получим:

$$\begin{aligned} f(y) &= \int f\,(x,y)\,dx = \int f\,(x) \cdot \delta\,(y - ax - b)\,dx \\ &= \int f(x) \cdot \frac{1}{a}\;\delta\left(x - \frac{y-b}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\;f\left(\frac{y-b}{a}\right). \end{aligned}$$

2) Конечно, для решения данной задачи легче было воспользоваться формулой

$$f_y(y) = f[x(y)] \cdot x'(y).$$

Тогда

$$y - ax - b = 0, \qquad \Rightarrow \qquad x(y) = \frac{y-b}{a}, \qquad x'(y) = \frac{1}{a}$$

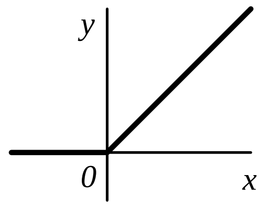
и

$$f_y(y) = f[x(y)] \cdot x'(y) = f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}. \quad \blacktriangle$$

Однако, формализм обобщенных функций нам необходим для решения более сложных практических задач.

Пример 43. На вход диода поступает сигнал **x** с нормальной плотностью вероятности
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$
Найти плотность вероятности выходного сигнала **y**.

Решение. По графику работы диода найдем аналитический вид функции
$$\varphi(x) = x \cdot \theta(x).$$



Найдем редуцированную плотность случайной величины **y**:
$$f(y) = \int f(x) \cdot \delta(y - \varphi(x))dx = \int f(x) \cdot \delta(y - x \cdot \theta(x))dx.$$
По определению
$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$
поэтому интервал интегрирования $(-\infty, \infty)$ разбиваем на две части
$$\begin{aligned} f(y) &= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x) \cdot \delta(y - x \cdot \theta(x))dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \cdot \delta(y - x \cdot \theta(x))dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x) \cdot \delta(y - x \cdot 0)dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \cdot \delta(y - x \cdot 1)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x) \cdot \delta(y)dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \cdot \delta(y - x)dx \\ &= \delta(y) \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + f(y) \cdot \theta(y) \end{aligned}$$
Подставляя сюда плотность $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ и учитывая, что
$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2},$$
окончательно, для выходного сиграла **y**, получим
$$f(y) = \frac{1}{2}\,\delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \cdot \theta(y).$$

Математическое ожидание

$$M[y] = \int y f(y)\,dy \;=\; \frac{1}{2}\int y\delta(y)dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\cdot\theta(y)dy$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_0^\infty y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\cdot dy = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

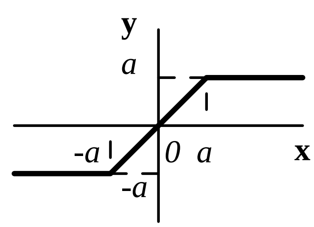
Для определения дисперсии найдем второй начальный момент

$$M[y^2] = \int y^2 f(y)\,dy \;=\; \frac{1}{2}\int y^2\delta(y)dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\cdot\theta(y)dy$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_0^\infty y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\cdot dy = \frac{\sigma^2}{2},$$

тогда

$$D[y] = M[y^2] - M[y]^2 = \frac{\sigma^2}{2} - \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right). \qquad \blacktriangle$$

Пример 44.
Текущее значение входного сигнала **x** задано плотностью распределения $f(x)$. Завсимость выходного сигнала **y** от значения входного сигнала показана на графике. Найти распределение выходного сигнала.



Решение. Для кусочно-гладкой функции $y = \varphi(x)$

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} -a, & \text{при} \quad x < -a, \\ x, & \text{при} \quad |x| \le a, \\ a, & \text{при} \quad x > a. \end{cases}$$

напишем аналитическое выражение

$$\varphi(x) = -a\cdot\theta(-x-a) + x\cdot(\theta(x+a) - \theta(x-a)) + a\cdot\theta(x-a)$$

Найдем редуцированную плотность распределения случайной величины **y**, разбивая интервал интегрирования $(-\infty, \infty)$ на три части:

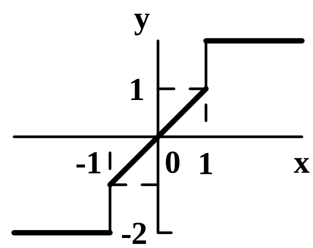
$$\begin{aligned} f(y) &= \int f(x) \cdot \delta(y - \varphi(x)) dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{-a} f(x) \cdot \delta(y + a) dx + \int\limits_{-a}^{a} f(x) \cdot \delta(y - x) dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x) \cdot \delta(y - a) dx \\ &= \delta(y + a) \cdot \int\limits_{-\infty}^{-a} f(x) dx + f(y) \cdot \theta(y^2 - a^2) + \delta(y - a) \cdot \int\limits_{a}^{\infty} f(x) dx \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 45.

По заданной плотности распределения $f(x)$ случайной величины $\mathbf{x}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{при} \quad |x| \le 2, \\ 0, & \text{при} \quad |x| > 2 \end{cases}$$

определить плотность распределения случайной величины $y = \varphi(x)$ заданной графически.



Решение. Аналитически зависимость $y = \varphi(x)$ выражается следующим образом:

$$y = \varphi(x) = -2 \cdot \theta(x + 1) + x \cdot \theta(1^2 - x^2) + 2 \cdot \theta(x - 1).$$

Для плотности распределения $f(x)$ аналитическое выражение имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{4}\, \theta(2^2 - x^2).$$

Найдем редуцированную плотность распределения случайной величины $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} f(y) &= \int f(x) \cdot \delta(y - \varphi(x)) dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{-1} f(x) \cdot \delta(y + 2) dx + \int\limits_{-1}^{1} f(x) \cdot \delta(y - x) dx + \int\limits_{1}^{\infty} f(x) \cdot \delta(y - 2) dx \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение плотность $f(x)$, получим

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{4}\, \delta(y + 2) \cdot \int\limits_{-2}^{-1} dx + \frac{1}{4} \int\limits_{-1}^{1} \theta(2^2 - x^2) \cdot \delta(y - x) dx + \frac{1}{4}\, \delta(y - 2) \cdot \int\limits_{1}^{2} dx \\ &= \frac{1}{4}\, \delta(y + 2) + \frac{1}{4}\, \theta(1 - y^2) + \frac{1}{4}\, \delta(y - 2) \end{aligned}$$

В качестве проверки полезно вычислить нормировку

$$\int f(y)dy = \int \left(\frac{1}{4}\,\delta(y+2) + \frac{1}{4}\,\theta(1-y^2) + \frac{1}{4}\,\delta(y-2)\right) dy$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} dy + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

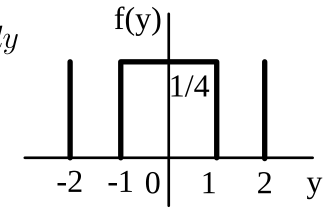


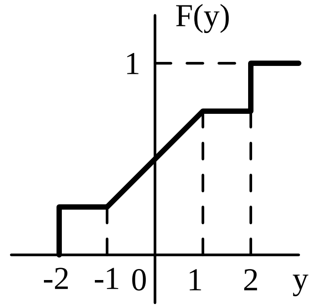
График распределения $f(y)$ показан на рисунке.

Функция распределения $F(y)$ вычисляется интегрированием плотности вероятности $F(y) = \int f(y)\,dy$ и с учетом свойств обобщенных функций

$$\int \delta(y)\,dy = \theta(y), \qquad \int \theta(y-a)dy = (y-a)\,\theta(y-a)$$

имеет вид

$$F(y) = \frac{1}{4}\,\theta(y+2) + \frac{y+1}{4}\,\theta(y+1) + \frac{y-1}{4}\,\theta(y-1) + \frac{1}{4}\,\theta(y-2)$$



Математическое ожидание

$$M[y] = \int y f(y)\,dy = \frac{1}{4}\int y\delta(y+2)dy + \frac{1}{4}\int y\theta(1-y^2)dy + \frac{1}{4}\int y\delta(y-2)dy$$
$$= \frac{1}{4}\cdot(-2) + \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} y dy + \frac{1}{4}\cdot 2$$
$$= -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 0.$$

Для определения дисперсии найдем второй начальный момент

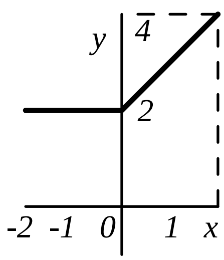
$$M[y^2] = \int y^2 f(y)\,dy = \frac{1}{4}\int y^2\delta(y+2)dy + \frac{1}{4}\int y^2\theta(1-y^2)dy + \frac{1}{4}\int y^2\delta(y-2)dy$$
$$= \frac{1}{4}\cdot(-2)^2 + \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} y^2 dy + \frac{1}{4}\cdot 2^2$$
$$= 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + 1 = \frac{13}{6}.$$

тогда

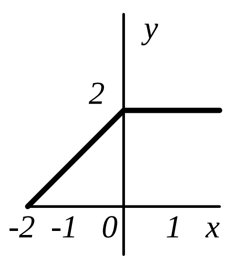
$$D[y] = M[y^2] - M[y]^2 = \frac{13}{6} - 0^2 = \frac{13}{6}, \qquad \sigma = \sqrt{D[y]} = \sqrt{\frac{13}{6}}. \qquad \blacktriangle$$

Задача 25. По заданной функции распределения $F(x)$ случайной величины $\mathbf{x}$ из **задачи 18.** определить функцию распределения случайной величины $y = \varphi(x)$ заданной графически. Построить график распределения и, используя δ-функцию, найти выражение для плотности распределения $f(y)$ случайной величины $\mathbf{y}$, ее математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

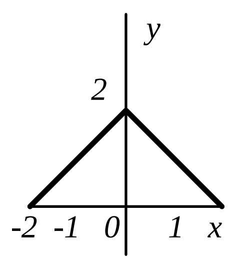
1.



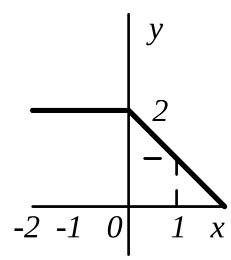
2.



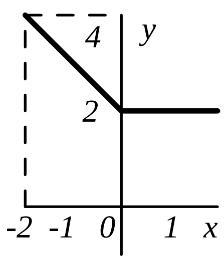
3.



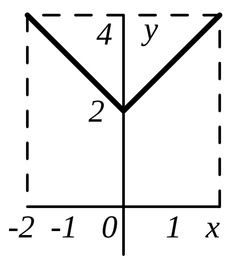
4.



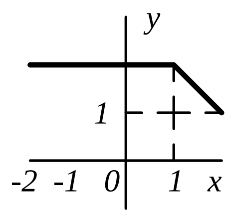
5.



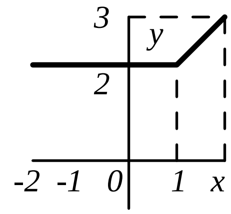
6.



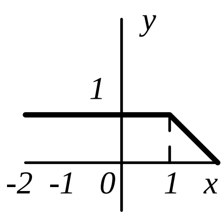
7.



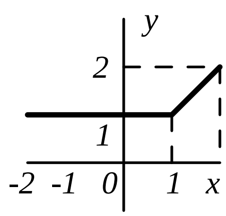
8.



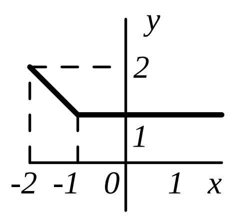
9.



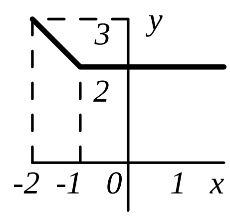
10.



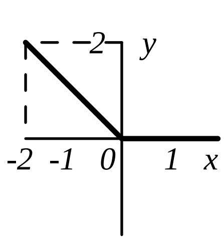
11.



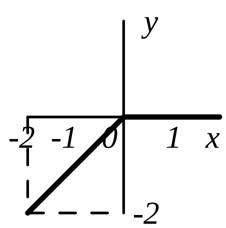
12.



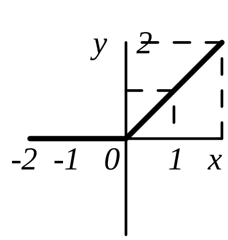
13.



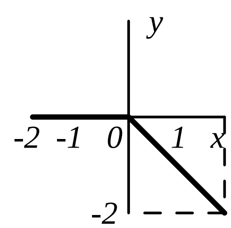
14.



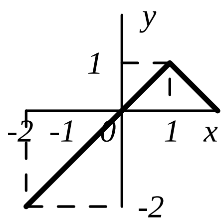
15.



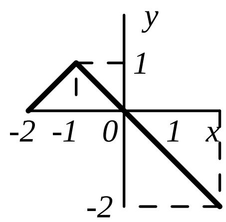
16.



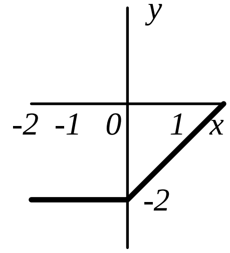
17.



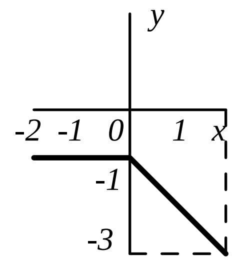
18.



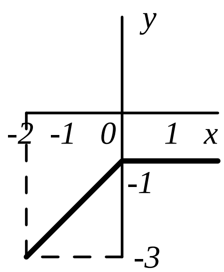
19.



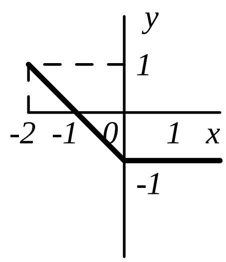
20.



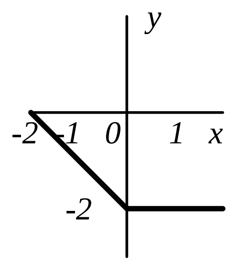
21.



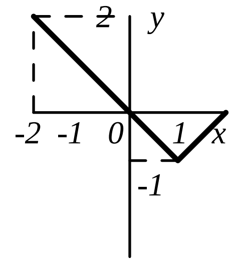
22.



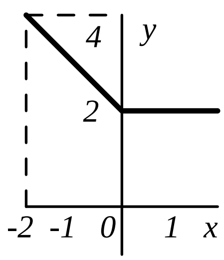
23.



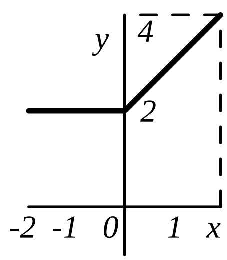
24.



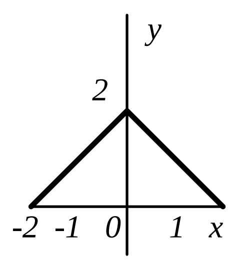
25.



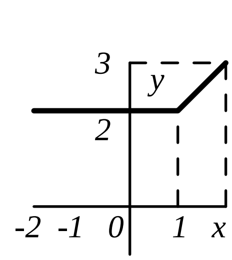
26.



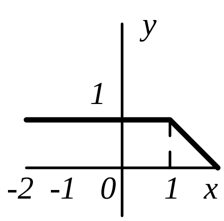
27.



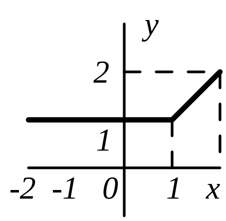
28.



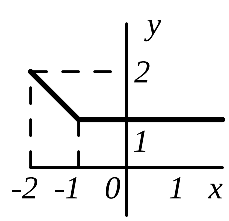
29.



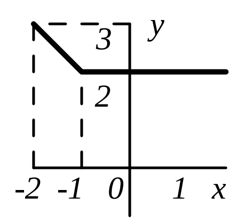
30.



31.



32.



4.5 Закон больших чисел

4.5.1 Неравенство Чебышева

Первое неравенство Чебышева Если случайная величина $\mathbf{x} \geq 0$ имеет конечный первый начальный момент $M[\mathbf{x}]$, то

$$P(x \geq \varepsilon) \leq \frac{m_x}{\varepsilon}$$

Для второго неравенства Чебышева существует две формы.

Второе неравенство Чебышева (в нецентрированной форме) Если случайная величина $\mathbf{x} \geq 0$ имеет конечный второй начальный момент $M[\mathbf{x}^2]$, то

$$P(x \geq \varepsilon) \leq \frac{M[x^2]}{\varepsilon^2}$$

Второе неравенство Чебышева (в центрированной форме) Если случайная величина $\mathbf{x} \geq 0$ имеет конечный первый начальный момент $M[\mathbf{x}]$, то

$$P(|\mathbf{x} - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[x]}{\varepsilon^2}$$

Иногда второе неравенство Чебышева записывают в следующей эквивалентной форме

$$P\{|\mathbf{x} - m_x| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}.$$

Пример 46. Оценить вероятность того, что случайная величина $\mathbf{x}$ отклонится от своего математического ожидания менее чем на три среднеквадратических отклонения.

Решение. Используя второе неравенство Чебышева запишем

$$P\{|x - m_x| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2},$$

$$P\{|x - m_x| \leq 3\sigma_x\} \geq 1 - \frac{D_x}{(3\sigma_x)^2} = 1 - \frac{D_x}{9D_x} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}. \quad \blacktriangle$$

Пример 47. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна $p = 0.05$. Оценить вероятность того, что разность между числом отказавших элементов и средним числом отказов окажется меньше двух.

Решение. Для случайной величины $\mathbf{x}$ мы имеем бернулиевское распределение. Тогда

$$n = 10; \quad M\left[x\right] = np = 10 \cdot 0.05 = 0.5;$$

$$D\,[x] = npq = 10 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 0.475.$$

Из второго неравенства Чебышева следует

$$P\{|x - m_x| \le \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}; \quad P\{|x - 0.5| \le 2\} \ge 1 - \frac{0.475}{2^2} = 0.88. \quad \blacktriangle$$

4.5.2 Теорема Чебышева

Последовательность случайных величин $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n, ...)$ называется сходящейся по вероятности при $n \to \infty$ к случайной величине x (т.е. $\mathbf{x}_n \xrightarrow{p} \mathbf{x}$), если $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| \ge \varepsilon\right) = 0.$$

Теорема Чебышева (закон больших чисел) Если случайные величины в последовательности $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n, ...)$ попарно независимы, а их дисперсии удовлетворяют условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D\,[\mathbf{x}_k] = 0,$$

то $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[\mathbf{x}_k]\right| \ge \varepsilon\right\} = 0,$$

При выполнении сформулированных условий последовательность средних арифметических n случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий. В частности, если дисперсии попарно независимых случайных величин $\mathbf{x}_k$ равномерно ограничены, (т.е. $D\,[\mathbf{x}_k] < \sigma^2$), то условия теоремы Чебышева выполняются. Существует еще более общая формулировка закона больших чисел.

Теорема Маркова (закон больших чисел) Если дисперсии случайных величин в последовательности $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n, ...)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D\,[\mathbf{x}_k] = 0,$$

то $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[\mathbf{x}_k]\right| \ge \varepsilon\right\} = 0,$$

Пример 48. Последовательность независимых случайных величин $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ задана законом распределения.

$\mathbf{x}_k$	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
$\mathbf{p}$	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Применим ли к заданной последовательности закон больших чисел?

Решение. Найдем математическое ожидание распределения:

$$M[x] = \sum x_i p_i = -n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} = 0.$$

Найдем второй начальный момент

$$M\left[x^2\right] = \sum x_i^2 p_i = n^2\alpha^2 \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2\alpha^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = \alpha^2$$

Тогда для дисперсии, имеем

$$D[x] = M\left[x^2\right] - M[x]^2 = \alpha^2.$$

Подставляя полученное выражение в теорему Чебышева, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D[x_k] = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \alpha^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} n\alpha^2 = \alpha^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{\alpha^2}{\infty} = 0.$$

Поэтому к данной последовательности закон больших чисел применим. ▲

Задача 26.

1. Оценить вероятность того, что случайная величина **x** отклонится от своего математического ожидания **не** менее чем на два среднеквадратических отклонения.

2. Оценить вероятность того, что $|x - m_x| < 0.2$, если $D_x = 0.004$.

3. Дано: $P\{|x - m_x| \leq \varepsilon\} \geq 0.9$ и $D_x = 0.009$. Оценить ε.

3. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время **T** лампа будет выключена, равна $p = 0.8$. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и математическим ожиданием включенных ламп за время **T** окажется меньше трех.

4. Вероятность появления события в каждом испытании равна $p = 0.5$. Оценить вероятность того, что число появлений события заключено между 40 и 60, если проведено 100 испытаний.

5. Вероятность появления события в каждом испытании равна $p = 1/4$. Оценить вероятность того, что число появлений события заключено между 150 и 250, если проведено 800 испытаний.

6. Изменяется скорость ветра x в данном пункте Земли. Оценить вероятность того, что $x \geq 80$ км/ч, если многолетние измерения дают $M[x] = 16$ км/ч.

7. Оценить вероятность предыдущей задачи после проведения дополнительных измерений с результатом: $\sigma_x = 4$ км/ч.

8. Число x солнечных дней в году для данной местности является случайной величиной со средним значением 100 и среднеквадратическим отклонением 20 дней. Оценить вероятность того, что в данном году будет больше 150 солнечных дней.

9. Дискретная случайная величина **x** задана законом распределения.

x	0.3	0.6
p	0.2	0.8

Оценить вероятность того, что $|x - m_x| < 0.2$.

10. Дискретная случайная величина **x** задана законом распределения.

x	0.1	0.4	0.6
p	0.2	0.3	0.5

Оценить вероятность того, что $|x - m_x| < \sqrt{0.4}$.

11. Для Воронежского автопарка среднее число автобусов, отправляемых в ремонт после месяца эксплуатации на городских линиях, равно 5. Оценить вероятность того, что в ремонт отправятся не более 15 автобусов.

12. Решить предыдущую задачу, при дополнительной информации: $D_x = 4$.

13. После каждой антитеррористической спецоперации в ингушетии количество вакхабитов в среднем увеличивается на 4 человека. Оценить вероятность того, что после очередной спецоперации в горы уйдет 10 человек.

14. В осветительную сеть параллельно включено 10 ламп. Вероятность того, что за время **T** лампа будет выключена, равна $p = 0.8$. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и математическим ожиданием включенных ламп за время **T** окажется меньше трех.

15. Вероятность появления события в каждом испытании равна $p = 0.5$. Оценить вероятность того, что число появлений события заключено между 30 и 70, если проведено 100 испытаний.

16. Вероятность появления события в каждом испытании равна $p = 0.5$. Оценить вероятность того, что число появлений события заключено между 20 и 80, если проведено 100 испытаний.

17. Вероятность появления события в каждом испытании равна $p = 0.5$. Оценить вероятность того, что число появлений события заключено между 45 и 55, если проведено 100 испытаний.

18. Вероятность появления события в каждом испытании равна $p = 1/4$. Оценить вероятность того, что число появлений события заключено между 150 и 250, если проведено 800 испытаний.

19. Вероятность появления события в каждом испытании равна $p = 1/4$. Оценить вероятность того, что число появлений события заключено между 100 и 300, если проведено 800 испытаний.

20. Изменяется скорость ветра x в данном пункте Земли. Оценить вероятность того, что $x \geq 80$ км/ч, если многолетние измерения дают $M[x] = 10$ км/ч.

21. Оценить вероятность предыдущей задачи после проведения дополнительных измерений с результатом: $\sigma_x = 5$ км/ч.

22. Число x солнечных дней является случайной величиной с $m_x = 100$ и $\sigma = 20$ дней. Оценить вероятность, что в данном году будет больше 200 солнечных дней.

23. Для Воронежского автопарка среднее число автобусов, отправляемых в ремонт после месяца эксплуатации на городских линиях, равно 5. Оценить вероятность того, что в ремонт отправятся не более 20 автобусов.

24. *В каждой из двух урн имеется по 10 шаров с номеами от 1 до 10. Испытание заключается в вынимании (с возвращением) из каждой урны по шару. Случайная величина x - сумма номеров шаров, вынутых из двух урн. Произведено 100 испытаний. Оценить вероятность попадания суммы в интервал $(800 > \sum x >$1400)

25. Последовательность независимых случайных величин $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ задана законом распределения.

$\mathbf{x}_k$	α	α
p	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Применим ли к заданной последовательности закон больших чисел?

26. Последовательность независимых случайных величин $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$задана законом распределения.

$\mathbf{x}_k$	$n+1$	$-n$
p	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Применим ли к заданной последовательности закон больших чисел?

27. Последовательность независимых случайных величин $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$задана законом распределения.

$\mathbf{x}_k$	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$\frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Применим ли к заданной последовательности закон больших чисел? +

28. Последовательность независимых случайных величин $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$задана законом распределения.

$\mathbf{x}_k$	$-\sqrt{3}\alpha$	0	$\sqrt{3}\alpha$
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Применим ли к заданной последовательности закон больших чисел?

29. Последовательность независимых случайных величин $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$задана законом распределения.

$\mathbf{x}_k$	$-\sqrt{n}\alpha$	0	$\sqrt{n}\alpha$
p	$\frac{1}{n}$	$1 - \frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

Применим ли к заданной последовательности закон больших чисел?

30. Последовательность независимых случайных величин $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$задана законом распределения.

$\mathbf{x}_k$	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Применим ли к заданной последовательности закон больших чисел?

Глава 5

Математическая статистика

5.1 Статистическое распределение выборки

Выборочной совокупностью X называется совокупность случайно отобранных однородных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, из которых производится выборка.

Математическая статистика опирается на идеи и методы теории вероятностей, но имеет обратную задачу. В теории вероятностей рассматривались случайные величины с заданным распределением и изучались свойства и взаимодействия этих величин или распределений.

Задачей математической статистики является нахождение вида распределения всей генеральной совокупности на основе анализа выборки.

Если элементы произвольной выборки $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ упорядочить по возрастанию, то полученный новый набор случайных величин называется **вариационным рядом**:

$$X = (x_1 < x_2 < ... < x_n)$$

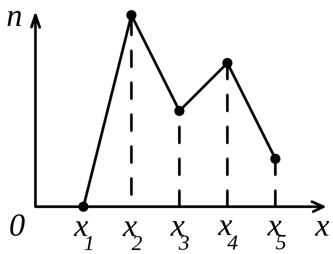
Объемом совокупности называется число объектов этой совокупности

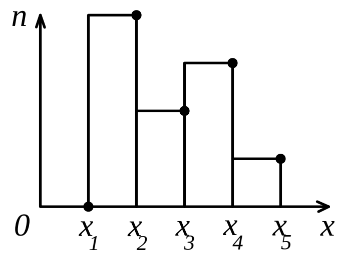
$$n = n_1 + n_2 + ... + n_n = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i (или относительных частот $p_i = \frac{n_i}{n}$):

x	x_1	x_2	...	x_k
n	n_1	n_2	...	n_k
p	p_1	p_2	...	p_k

Для наглядности статистическое распределение дискретной случайной величины иллюстрируется полигоном распределения. **Полигоном** частот называют ломаную, соединяющую точки распределения.





Таблицу распределения выборки можно аналитически представить в виде эмпирической функции распределения

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum \theta (x - x_i)$$

Гистограммой - называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основанием $h = x_i - x_{i-1}$ и высотой n_i.

Средним значением случайной величины x, заданной статистическим распределением, называется выражение

$$\langle x \rangle = M[x] = m_x = \bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

Дисперсией случайной величины x, заданной статистическим распределением, называется выражение

$$D_x = p_1 (x_1 - \bar{x})^2 + p_2 (x_2 - \bar{x})^2 + ... + p_k (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - \bar{x})^2.$$

Раскрывая квадрат

$$\begin{aligned} D_x &= \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{k} p_i x_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{k} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

получим другую формулу для вычисления дисперсии

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2.$$

Полученные характеристики выборки могут считаться приближениями для соответствующих характеристик всей генеральной совокупности.

Пример 49. В результате 100 испытаний была получена следующая выборка:
(0,2,6,4,8,2,7,3,1,1,10,1,0,5,6,2,5,1,8,5,9,10,5,5,9,8,10,6,3,8,4,
7,0,3,6,8,5,7,5,7,6,7,6,2,4,5,8,2,5,7,1,1,7,4,10,2,8,2,8,2,7,3,7,7,
1,8,5,4,9,5,5,8,5,10,7,2,8,5,0,6,5,8,1,3,3,1,8,6,3,0,8,2,6,1,8,5,4,7)
Требуется:
- составить таблицу статистического распределения;
- построить гистограмму и полигон относительных частот;
- найти выборочное среднее значение данного распределения;
- найти выборочную дисперсию.

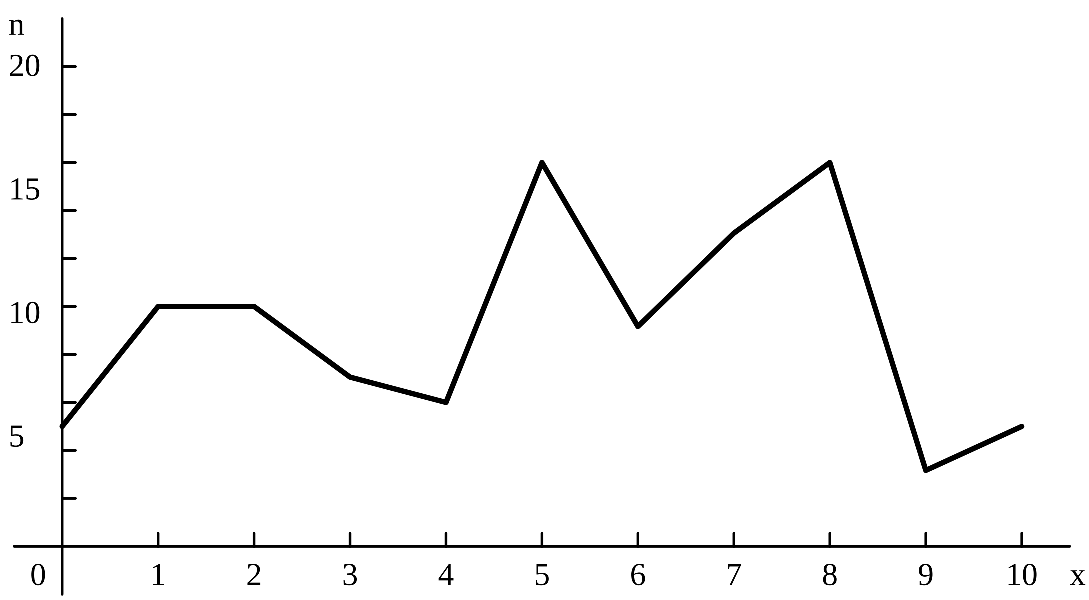
Решение.
1. Упорядочивая элементы выборки по возрастанию, получим вариационный ряд

$$\left(\begin{array}{l} 0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3, \\ 4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5, \\ 6,6,6,6,6,6,6,6,6,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7, \\ 8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,9,9,9,10,10,10,10,10 \end{array}\right)$$

Подсчитаем частоты n_i, с которыми появляются значения случайной величины x и составим таблицу статистического распределения выборки.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_x	5	10	10	7	6	16	9	13	16	3	5

Гистограмма частот, построенная по данной таблице, выглядит следующим образом



3. Выборочное среднее вычислим по формуле

$$
\begin{aligned}
m_x &= \frac{0\cdot 5+1\cdot 10+2\cdot 10+3\cdot 7+4\cdot 6+5\cdot 16+6\cdot 9+7\cdot 13+8\cdot 16+9\cdot 3+10\cdot 5}{5+10+10+7+6+16+9+13+16+3+5} \\
&= \frac{505}{100} = 5.05
\end{aligned}
$$

4. Для нахождения выборочной дисперсии вычислим предварительно второй начальный момент

$$
\begin{aligned}
m_{x^2} &= \frac{0^2 5+1^2 10+2^2 10+3^2 7+4^2 6+5^2 16+6^2 9+7^2 13+8^2 16+9^2 3+10^2 5}{5+10+10+7+6+16+9+13+16+3+5} \\
&= \frac{3337}{100} = 33.37
\end{aligned}
$$

Теперь, для дисперсии получим

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = 33.37 - (5.05)^2 = 33.37 - 25.502 = 7.867.$$

Квадратный корень из дисперсии дает среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{7.867} = 2.8. \quad \blacktriangle$$

В настоящем примере вариационный ряд равномерно принимал только целочисленные значения. В противном случае необходимо делить весь вариационный ряд на отрезки. Возникает вопрос: на сколько частей необходимо разбить вариационный ряд. В курсе «Эконометрика» для решения этой задачи используется следующая формула.

Формула Стерджесса | Наилучшим числом интервалов группировки является

$$k(n) = \log_2(2\cdot n)$$

Таким образом, при увеличении выборки вдвое число интервалов группировки увеличивается на 1.

Задача 27.

По данной таблице статистического распределения построить гистограмму и полигон относительных частот; найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

N п/п		**x**										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		3	14	13	6	7	11	16	12	6	10	2
2		8	13	13	8	12	5	13	10	3	14	1
3		11	7	10	8	11	5	12	13	10	11	2
4		5	7	6	8	9	9	15	15	10	9	7
5		8	6	9	10	12	10	10	6	9	16	4
6		1	11	12	10	10	10	12	6	12	12	4
7		8	11	10	12	16	7	8	6	6	10	6
8		5	10	12	13	9	9	8	6	8	13	7
9		2	10	10	8	9	9	11	18	7	10	6
10		3	10	7	9	9	10	10	10	10	13	9
11		4	10	10	11	13	3	15	9	11	7	7
12		7	13	8	9	8	8	12	5	11	11	8
13		10	6	13	9	13	12	9	8	8	10	2
14		7	8	10	11	14	9	7	6	16	8	4
15	**n**	5	8	13	11	13	9	9	8	11	7	6
16		5	8	10	12	7	8	10	10	9	14	7
17		11	4	11	13	20	4	11	9	9	5	3
18		7	8	11	13	11	10	11	5	7	14	3
19		4	10	13	9	8	14	12	11	4	6	9
20		7	6	11	8	8	6	14	9	13	14	4
21		5	6	9	8	11	10	20	12	7	6	6
22		3	8	16	15	2	15	6	13	13	3	6
23		3	6	6	10	8	13	12	12	11	10	9
24		5	20	9	4	3	8	14	8	11	11	7
25		4	6	15	8	11	12	12	6	8	13	5
26		2	7	17	5	12	9	10	13	10	9	6
27		4	11	10	5	8	7	10	10	11	17	7
28		4	12	10	8	11	14	5	9	13	8	6
29		6	11	9	7	10	14	6	7	13	14	3
30		4	5	9	12	14	9	8	13	5	11	10

5.2 Статистическое точечное оценивание

Если закон распределения генеральной совокупности известен, то возникает задача определения параметров этого распределения по анализу выборки. Поскольку точного значения параметров распределения θ генеральной совокупности по данным выборки $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$ определить невозможно, то в математической статистике производят их оценивание. Очевидно, что оцениваемый параметр должен выражаться через данные выборки. Т.е. он должен быть функцией данных выборки, или, другими словами - статистикой.

Статистикой называется произвольная функция

$$\theta^* = \theta^* (x_1, x_2, ..., x_n) = \theta^* (X)$$

от элементов выборки X. Априори предполагается, что параметр θ принимает значения из некоторого множества Θ: $\theta \in \Theta$.

В таблице приведены основные законы распределения и параметры, необходимые для их восстановления

Распределения		Моменты	Параметры
Пуассона	$p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\bar{x} = \lambda$	$\theta = \lambda,$ $\theta = (0, \infty)$
Бернулли	$P(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	$\bar{x} = np$	$\theta = p,$ $\theta = (0, 1)$
равномерное	$f(x) = \dfrac{1}{b - a}$	$\begin{cases} \bar{x} = \frac{a+b}{2} \\ \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \end{cases}$	$\theta = (a, b)$ $\theta = \{(a, b): \ a < b\}$
нормальное	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$\bar{x} = a$ $D(x) = \sigma^2$	$\theta = (a, \sigma^2)$ $\theta = R \times (0, \infty)$

Поскольку все характеристики случайных величин x зависят от параметра θ, то изучаемые моменты распределений будут также параметризованы. Например, для распределения Пуассона

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad M\,[x] = \lambda,$$

имеем:

$$\text{при } \lambda = 1: \qquad M\,[x] = 1;$$

$$\text{при } \lambda = 5: \qquad M\,[x] = 5.$$

Так как при известном законе распределения значения моментов зависит от параметра, поэтому данную параметризацию мы будем обозначать индексом θ у знака математического ожидания: $M_\theta\,[x]$. Элемент $x_k \in X$ называется k-й **статистикой.** Поскольку все элементы выборочной совокупности $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ одинаково распределены, при вычислениях используется первый попавшийся элемент x_1. Например

$M\,[x_1] = a$, тогда $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ - выборочное среднее.

$D\,[x_1] = \sigma^2$, тогда $S^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^2$ - выборочная дисперсия.

$M\left[x_1^k\right] = \mu_k$, тогда $\bar{X}^k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k$ - выборочный k-й момент.

Статистика есть функция от эмпирических данных x, но не от параметра θ. Поскольку статистика $\theta^*(x)$ предназначена для оценивания неизвестного параметра θ, то мы ее часто будем называть просто **оценкой**.

Для того, чтобы статистическая оценка, давала хорошее приближение оцениваемого параметра, она должна удовлетворять следующим требованиям: быть несмещенной, эффективной и состоятельной.

Несмещенной называется оценка, математическое ожидание от которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки: $\langle\theta^*\rangle = \theta$.

Эффективной называют оценку, которая при заданном объеме выборки имеет наименьшую дисперсию.

Состоятельной называют оценку, которая при $n \to \infty$ стремится к оцениваемому параметру: $\lim\limits_{n\to\infty} \theta^* = \theta$.

Выборочное среднее $\bar{X}$ является несмещенной оценкой. Действительно

$$M\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n}\sum M\,[x_i] = \frac{1}{n}\cdot n \cdot M\,[x_1] = a,$$

т.е. математическое ожидание выборочной средней не зависит от объема выборки.

Выборочная дисперсия S является смещенной оценкой. По определению

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2,$$

тогда

$$\begin{aligned}
M\left[S^2\right] &= M\left[\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2\right] = M\left[\overline{X^2}\right] - M\left[\left(\overline{X}\right)^2\right] \\
&= M\left[x_1^2\right] - M\left[\overline{X}\right]^2 + M\left[\overline{X}\right]^2 - M\left[\left(\overline{X}\right)^2\right] \\
&= M\left[x_1^2\right] - M\left[x_1\right]^2 + M\left[\overline{X}\right]^2 - M\left[\left(\overline{X}\right)^2\right] \\
&= \sigma^2 - D\left[\overline{X}\right] = \sigma^2 - D\left[\frac{1}{n}\sum x_k\right] \\
&= \sigma^2 - \frac{1}{n^2}\cdot nD\left[x_1\right] = \sigma^2 - \frac{1}{n}\cdot\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2
\end{aligned}$$

Т.е. для несмещенной оценки дисперсии мы получим

$$D_0\left(x\right) = \frac{n}{n-1}\,D\left(x\right).$$

Здесь $D\left(x\right)$- выборочная (смещенная), а $D_0\left(x\right)$- исправленная (несмещенная) оценка дисперсии.

Состоятельность - означает, что последовательность приближается к неизвестному параметру при увеличении количества данных. При отсутствии этого свойства оценка $\theta^*\left(x\right)$ совершенно «несостоятельна» как оценка θ.

5.3 Методы нахождения оценок

5.3.1 Метод моментов

Метод моментов заключается в следующем: любой момент (ν_i-начальный или μ_i-центральный) распределения x, функционально зависит от параметра распределения θ. Мы можем найти обратную функцию - зависимость параметра θ от момента, а в качестве моментов взять его выборочный аналог. В результате получим оценку θ^*. Т.е. в данном методе в качестве параметров распределения необходимо взять соответствующие моменты выборки.

Пример 50. Случайная величина x распределена по закону Пуассона. По данной таблице эмпирического статистического распределения найти точечную оценку неизвестного параметра распределения.

x	0	1	2	3	4	5	6
n	405	366	175	40	8	4	2

Решение. Для распределения Пуассона

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

неизвестным параметром является $\theta = \lambda$.

Математическое ожидание

$$M[k] = \lambda = \theta.$$

Т.е. по математическому ожиданию распределения мы восстанавливаем неизвестный параметр θ, но для этого мы отождествляем математическое ожидание распределения с выборочным средним.

Найдем объем выборки

$$n = \sum n_i = 405 + 366 + 175 + 40 + 8 + 4 + 2 = 1000.$$

Найдем выборочное среднее случайной величины x:

$$M[x] = \frac{0 \cdot 405 + 1 \cdot 366 + 2 \cdot 175 + 3 \cdot 40 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{1000} = \frac{9}{10} = 0.9.$$

Таким образом, неизвестный параметр распределения есть $\theta = \lambda = 0.9$ и

$$p_k = \frac{0.9^k}{k!}\, e^{-0.9}. \quad \blacktriangle$$

5.3.2 Метод максимального правдоподобия

В данном методе в качестве параметров распределения необходимо взять такие θ, которые максимизируют вероятность получить при n опытах данную выборку. Для этого вводят **функцию правдоподобия**

$$F(x,\theta) = \begin{cases} p(x_1,\theta) \cdot p(x_2,\theta) \cdot \ldots \cdot p(x_n,\theta) & \text{для дискретной сл.вел.} \\ f(x_1,\theta) \cdot f(x_2,\theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n,\theta) & \text{для непрерывной сл.вел.} \end{cases}$$

Однако, на практике, чаще используют **логарифмическую** функцию правдоподобия

$$L(x,\theta) = \ln F(x,\theta) = \sum_k lnf(x_k)$$

Оценкой максимального правдоподобия неизвестного параметра называют такое значение θ, при котором функция $F(x,\theta)$ достигает максимума:

$$\hat{\theta} = \arg\max\left(F(x,\theta)\right).$$

Поскольку функция $y = lnx$ монотонна, то точки максимума $F(x,\theta)$ и $L(x,\theta)$ совпадают. Поэтому оценкой максимального правдоподобия называют также точку максимума функции $L(x,\theta)$:

$$\hat{\theta} = \arg\max\left(L(x,\theta)\right).$$

Пример 51. Найти методом максимального правдоподобия неизвестный параметр $\theta = \lambda$ распределения Пуассона

$$P_n(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda}$$

Решение. Функция правдоподобия имеет вид

$$L(x,\theta) = p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdot \ldots \cdot p(x_n,\theta) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия

$$\begin{aligned}\ln L(x,\theta) &= -\ln(x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_n!) + \ln(\lambda^{x_1}\cdot\lambda^{x_2}\cdot\ldots\cdot\lambda^{x_n}) + \ln\left(e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}\cdot\ldots\cdot e^{-\lambda}\right)\\ &= -\ln(x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_n!) + \sum x_i\ln\lambda - n\cdot\lambda\end{aligned}$$

Возьмем производную по λ

$$\frac{d}{d\lambda}\ \ln L(x,\theta) = \frac{1}{\lambda}\sum x_i - n = 0,$$

откуда

$$\lambda^* = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}. \quad \blacktriangle$$

Пример 52. Найти методом максимального правдоподобия неизвестный параметр $\theta = (a,\sigma^2)$ нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Решение. Для нормального распределения мы имеем два неизвестных параметра Функция $\theta = (a,\sigma^2)$ Функция максимального правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned}L\left(x,a,\sigma^2\right) &= f\left(x_1,a,\sigma^2\right)\cdot f\left(x_2,a,\sigma^2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(x_n,a,\sigma^2\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x_2-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x_n-a)^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия

$$\begin{aligned}\ln L\left(x,a,\sigma^2\right) &= f\left(x_1,a,\sigma^2\right)\cdot f\left(x_2,a,\sigma^2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(x_n,a,\sigma^2\right)\\ &= -\frac{n}{2}\ \ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{\sum(x_i-a)^2}{2\sigma^2}\end{aligned}$$

Возьмем производную по a и σ^2:

$$\frac{\partial}{\partial a}\ln L = \frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-a) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L &= f\left(x_1,a,\sigma^2\right)\cdot f\left(x_2,a,\sigma^2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(x_n,a,\sigma^2\right)\\ &= -\frac{n}{2\sigma^2}\ln 2\pi + \frac{\sum(x_i-a)^2}{2\sigma^4} = 0\end{aligned}$$

откуда

$$a^* = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}\ \sigma^2 = \frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n} = D_x. \quad \blacktriangle$$

5.3.3 Неравенство Рао-Крамера

Используя метод моментов и метод максимального правдоподобия можно получить для каждого параметра множество различных оценок. Необходимо их сравнить для выбора лучшей. Для этого сравнивают дисперсии отклонений $\left\langle (\theta^* - \theta)^2 \right\rangle$.

Считается, что оценка θ_1^* лучше θ_2^*, если

$$M\left[(\theta_1^* - \theta)^2\right] \leq M\left[(\theta_2^* - \theta)^2\right].$$

Сразу отметим, что в классе всех возможных оценок наилучшей, в смысле среднеквадратического подхода на существует (если $\theta^* \neq \theta$).

Оценка называется **эффективной в классе**, если она лучше (не хуже) всех других оценок класса в смысле среднеквадратического подхода. Эффективная оценка в классе называется просто **эффективной**.

Неравенство Рао-Крамера	$D(\theta) = \left\langle (\theta^* - \theta)^2 \right\rangle \geq \dfrac{1}{nI(\theta)}$

Это неравенство говорит о том, что в любом классе существует нижняя грань для среднеквадратического отклонения любой оценки. Другими словами, если найдется оценка, отклонение которой в точности равно этой нижней границе то данная оценка - эффективна, а у других оценок отклонение меньше быть не может.

Однако данное неравенство верно лишь для регулярных распределений.

Распределение $f(x)$ называется **регулярным**, если существует диффеоморфизм

$$diff(f(x)) \to \sqrt{f(x)}.$$

Информацией **Фишера** называется величина

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{d}{d\theta}\ln f\right)^2\right].$$

Для распределений, удовлетворяющих предыдущим двум условиям, имеет место равенство

$$\frac{d}{d\theta}M[x] = M\left[x \cdot \frac{d}{d\theta}L(x)\right]$$

Действительно

$$\frac{d}{d\theta}M[x] = \frac{d}{d\theta}\int xf dx = \int x\frac{df}{d\theta}dx = \int x\frac{d\ln f}{d\theta}f dx = \int x\frac{dL}{d\theta}f dx = M\left[x \cdot \frac{d}{d\theta}L(x)\right].$$

В терминах неравенства Рао-Крамера можно сказать, что оценка θ^* параметра θ, дисперсия которой достигает своего наименьшего значения $\frac{1}{nI(\theta)}$, называется эффективной:

$$D(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)}.$$

Несмещенная оценка θ^* называется **ассимптотически** эффективной оценкой параметра θ, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nI(\theta)\,D(\theta)} = 1.$$

Если условия регулярности $diff\,(f\,(x)) \to \sqrt{f\,(x)}$ не выполняются, то может существовать несмещенная оценка параметра θ, дисперсия которой меньше, чем нижняя граница неравенства Рао-Крамера. Такая оценка называется **сверхэффективной.**

Пример 53. Проверить эффективность оценки среднего $\theta = \bar{x}$ для нормального распределения $N\,(a, \sigma^2)$.

Решение. По определению функции распределения

$$f\,(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найдем информацию Фишера:

$$L\,(\theta) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{(x-\theta)}{\sigma^2},$$

$$I\,(\theta) = \left\langle \left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 \right\rangle = \frac{\left\langle (x-\theta)^2 \right\rangle}{\sigma^4} = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Нижняя граница неравенства есть

$$\frac{1}{nI\,(\theta)} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Теперь вычислим дисперсию оценки, которую мы найдем, например методом моментов:

$$D\,(\theta) = D\,(\bar{x}) = D\left(\frac{1}{n}\sum x\right) = \frac{1}{n^2}D\left(\sum x\right) = \frac{1}{n^2}\sum D\,(x) = \frac{n}{n^2}D\,(x) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Сравнивая полученные выражения, делаем вывод, что, полученная оценка является эффективной. ▲

5.3.4 Линейная корреляция

Если обе линии регрессии y на x и x на y - прямые, то корреляцию называют линейной. Выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x имеет вид

$$y - \overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right),$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ - выборочные средние, σ_x и σ_y - выборочные среднеквадратичные отклонения, r - выборочный коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\sum x n_{xy} y - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии x на y имеет вид

$$x - \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \bar{y}\right).$$

Пример 54. Найти выборочное уравнение прямой линий регрессии по данным, приведенным в корреляционной таблице.

y	**x**					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6				10
26		8	10			18
36			32	3	9	44
46			4	12	6	22
56				1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n = 100

Решение. Выпишем таблицу распределения относительно признака x:

x	20	25	30	35	40	
n	4	14	46	16	20	$n = 100$

По таблице найдем выборочное среднее $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{100}\left(20\cdot 4 + 25\cdot 14 + 30\cdot 46 + 35\cdot 16 + 40\cdot 20\right) = \frac{3170}{100} = 31.7.$$

Найдем второй начальный момент

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i = \frac{20^2\cdot 4 + 25^2\cdot 14 + 30^2\cdot 46 + 35^2\cdot 16 + 40^2\cdot 20}{100} = \frac{103350}{100} = 1033.5.$$

Найдем дисперсию

$$D_x = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 1033.5 - 31.7^2 = 28.6,$$

и среднеквадратическое отклонение $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{28.6} = 5.35$.

Выпишем таблицу распределения относительно признака y:

y	16	26	36	46	56	
n	10	18	44	22	6	$n = 100$

По таблице найдем выборочное среднее $\overline{y}$:

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i n_i = \frac{1}{100}\left(16\cdot 10 + 26\cdot 18 + 36\cdot 44 + 46\cdot 22 + 56\cdot 6\right) = \frac{3560}{100} = 35.6.$$

Найдем второй начальный момент

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y_i^2 n_i = \frac{16^2\cdot 10 + 26^2\cdot 18 + 36^2\cdot 44 + 46^2\cdot 22 + 56^2\cdot 6}{100} = \frac{137120}{100} = 1371.2.$$

Найдем дисперсию

$$D_y = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = 1371.2 - 35.6^2 = 103.84,$$

и среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{103.84} = 10.19.$$

Для вычисления коэффициента корреляции найдем сумму

$$\sum x_i n_{ik} y_k = \left(\begin{array}{r} 16\cdot 4\cdot 20 + 16\cdot 6\cdot 25 + 26\cdot 8\cdot 25 + 26\cdot 10\cdot 30+ \\ +36\cdot 32\cdot 30 + 36\cdot 3\cdot 35 + 36\cdot 9\cdot 40 + 46\cdot 4\cdot 30+ \\ +46\cdot 12\cdot 35 + 46\cdot 6\cdot 40 + 56\cdot 1\cdot 35 + 56\cdot 6\cdot 40 \end{array}\right) = 177020,$$

тогда

$$r = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{117020 - 100\cdot 31.7\cdot 35.6}{100\cdot 5.35\cdot 10.19} = 0.765.$$

Подставив найденные значения в соотношение

$$y - \overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

получим

$$y - 35.6 = 0.765 \frac{10.19}{5.35} (x - 31.7),$$

или

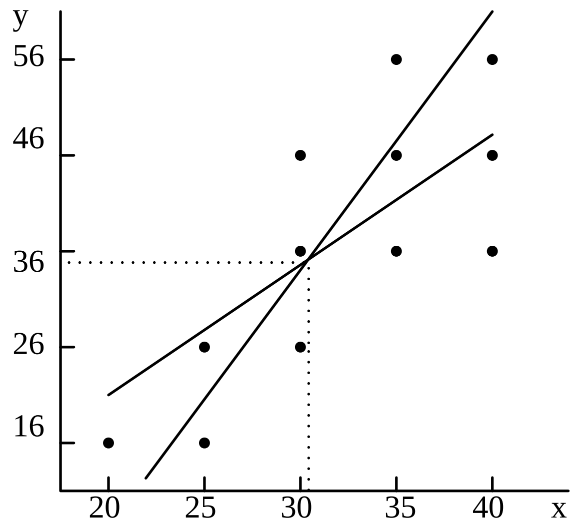
$$y = 1.45x - 10.58$$

Для выборочного уравнения прямой линии регрессии x на y получим

$$x - \overline{x} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \overline{y}),$$

$$x - 31.7 = 0.765 \frac{5.35}{10.19} (y - 35.6),$$

$$x = 0.4y + 17.41. \quad \blacktriangle$$



Задача 28. Найти выборочное уравнение прямой линий регрессии по данным, приведенным в корреляционной таблице.

y	**x**								n_y
	5	10	15	20	25	30	35	40	
100	2	1							3
120	3	4	3						10
140			5	10	8				23
160				1		6	1	1	9
180							4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	n=100

5.3.5 Криволинейная корреляция

Если график регрессии - кривая, то корреляцию называют криволинейной. В частности, в случае параболической корреляции второго порядка выборочное уравнение регрессии y на x имеет вид

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Неизвестные параметры (A, B, C) находят из системы уравнений

$$\begin{array}{l} A\sum n_i x_i^4 + B\sum n_i x_i^3 + C\sum n_i x_i^2 = \sum n_i \bar{y}_i x_i^2 \\ A\sum n_i x_i^3 + B\sum n_i x_i^2 + C\sum n_i x_i = \sum n_i \bar{y}_i x_i \\ A\sum n_i x_i^2 + B\sum n_i x_i + C\sum n_i \quad = \sum n_i \bar{y}_i \end{array}.$$

Пример 55. Найти выборочное уравнение регрессии

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

по данным, приведенным в таблице

y	**x**				n_y
	2	3	5	7	
25	20				20
45	1	30	1		32
110			48	50	98
n_x	21	30	49	50	150
$\bar{y}_i$	25.9	45	108.7	110	

По данной таблице рассчитаем значения сумм:

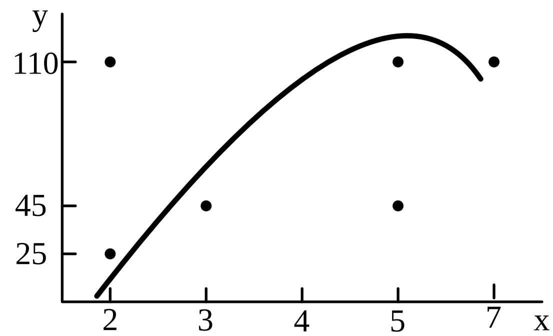
$$\begin{aligned}
\sum n_i &= 21 + 30 + 49 + 50 = 150, \\
\sum n_i x_i &= 21 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 49 \cdot 5 + 50 \cdot 7 = 727, \\
\sum n_i x_i^2 &= 21 \cdot 2^2 + 30 \cdot 3^2 + 49 \cdot 5^2 + 50 \cdot 7^2 = 4029, \\
\sum n_i x_i^3 &= 21 \cdot 2^3 + 30 \cdot 3^3 + 49 \cdot 5^3 + 50 \cdot 7^3 = 24253, \\
\sum n_i x_i^4 &= 21 \cdot 2^4 + 30 \cdot 3^4 + 49 \cdot 5^4 + 50 \cdot 7^4 = 153441,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{y}_1 = \frac{1}{n_x} \sum n_k y_k \Big|_{x=2} &= \frac{20 \cdot 25 + 1 \cdot 45 + 0 \cdot 110}{21} = 25.952, \\
\bar{y}_2 = \frac{1}{n_x} \sum n_k y_k \Big|_{x=3} &= \frac{0 \cdot 25 + 30 \cdot 45 + 0 \cdot 110}{30} = 45, \\
\bar{y}_3 = \frac{1}{n_x} \sum n_k y_k \Big|_{x=5} &= \frac{0 \cdot 25 + 1 \cdot 45 + 48 \cdot 110}{49} = 108.67, \\
\bar{y}_4 = \frac{1}{n_x} \sum n_k y_k \Big|_{x=7} &= \frac{0 \cdot 25 + 0 \cdot 45 + 50 \cdot 110}{50} = 110,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum n_i \bar{y}_i &= 21 \cdot 25 + 30 \cdot 47.1 + 49 \cdot 108.7 + 50 * 110 = 12720.2 \\
\sum n_i \bar{y}_i x_i &= 21 \cdot 25 \cdot 2 + 30 \cdot 47.1 \cdot 3 + 49 \cdot 108.7 \cdot 5 + 50 \cdot 110 \cdot 7 = 70269.3 \\
\sum n_i \bar{y}_i x_i^2 &= 21 \cdot 25 \cdot 2^2 + 30 \cdot 47.1 \cdot 3^2 + 49 \cdot 108.7 \cdot 5^2 + 50 \cdot 110 \cdot 7^2 = 416983.1
\end{aligned}$$

Подставив значения сумм в систему уравнений получим

$$\begin{aligned} A\cdot 153441 + B\cdot 24253 \ + C\cdot 4029 \ &= 416983\\ A\cdot 24253 \ + B\cdot 4029 \ + C\cdot 727 \ &= 70269\\ A\cdot 4029 \ + B\cdot 727 \ + C\cdot 150 \ &= 12720 \end{aligned}$$



Решение этой системы есть:

$$A = -5.06, \quad B = 64.358, \quad C = --91.214.$$

Подставляя данные коэффициенты в уравнения регрессии

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

получим

$$y = -5.06\cdot x^2 + 64.358\cdot x - 91.214. \quad \blacktriangle$$

Задача 29.

Найти выборочное уравнение регрессии $y = Ax^2+Bx+C$ по данным, приведенным в таблице

y	**x**					n_y
	0	1	2	3	4	
0	18	1	1			20
3	1	20				21
5	3	5	10	2		20
10			7		12	19
17					20	20
n_x	22	26	18	14	20	100

5.3.6 Ранговая корреляция Спирмена

Пусть выборка объема n содержит независимые объекты, которые обладают двумя качественными признаками: **A** и **B**. Под качественным подразумевают признак, который невозможно измерить точно, но он позволяет сравнивать объекты между собой, и следовательно, расположить их в порядке убывания или возрастания качества. Для определенности объекты принято располагать в порядке ухудшения качества.

Расположим сначала объекты в порядке ухудшения качества по признаку **A**. Припишем объекту, стоящему на i-м месте - ранг x_i равный порядковому номеру объекта: $x_i = i$. Затем расположим объекты в порядке убывания качества по признаку **B** и припишем каждому из них ранг (порядковый номер) y_i. В итоге получим две последовательности рангов:

$$\text{по признаку А } (x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\text{по признаку В } (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Для оценки степени связи признаков **A** и **B** найдем коэффициент ранговой корреляции Спирмена по формуле

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n},$$

где $d_i = x_i - y_i$, n - объем выборки.

Абсолютная величина коэффициента ранговой корреляции Спирмена не превышает единицы:

$$|\rho| \leq 1.$$

Пример 56. Знания десяти студентов проверены по двум тестам: **A** и **B**. Оценки по стобалльной системе оказались следующими

	Оценки									
Тест **A**	86	90	95	84	60	70	62	75	57	50
Тест **B**	83	93	92	80	72	60	45	55	62	70

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между оценками по двум тестам.

Решение. Расположим оценки теста **A** в убывающем порядке и присвоим каждой оценки соответствующий ранг $x_i = i$

	Оценки									
Тест **A**	86	90	95	84	60	70	62	75	57	50
Ранг $x_i = i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Расположим оценки теста **B** в убывающем порядке и присвоим каждой оценки соответствующий ранг $y_j = j$

	Оценки									
Тест **B**	93	92	83	80	72	70	62	60	55	45
Ранг $y_i = i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Перепишем исходную таблицу, записывая в каждую ячейку вместо оценки - ее соответствующий ранг

Ранг x	3	2	1	4	8	6	7	5	9	10
Ранг y	3	1	2	4	5	8	10	9	7	6
$d = x - y$	0	1	-1	0	3	-2	-3	-4	2	4
d^2	0	1	1	0	9	4	9	16	4	16

Затем, возведем разности рангов в квадрат и найдем сумму квадратов разности рангов.

Таким образом, искомый коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot 60}{10^3 - 10} = 1 - \frac{360}{990} = 0.64. \quad \blacktriangle$$

Задача 30. Три арбитра оценили мастерство 10 спортсменов. В итоге были получены три последовательности рангов x_i, y_i, z_i:

Ранг x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг y	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4
Ранг z	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

Определить пару арбитров, оценки которых наиболее согласуются, используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

5.3.7 Ранговая корреляция Кендалла

Построим ранговую таблицу аналогично предыдущему пункту:

$$\text{по признаку A } (x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\text{по признаку B } (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Допустим, что справа от y_1 имеется R_1 рангов, больших y_1; справа от y_2 имеется R_2 рангов, больших y_2; справа от y_{n-1} имеется R_{n-1} рангов, больших y_{n-1}. Введем обозначение суммы рангов:

$R = R_1 + R_2 + ... + R_{n-1}$. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла находится по формуле

$$\rho = \frac{4R}{n\,(n-1)} - 1,$$

где n - объем выборки.

Пример 57. Знания 10 студентов проверены по двум тестам: А и В. Оценки по стобалльной системе оказались следующими

	Оценки									
Тест **A**	86	90	95	84	60	70	62	75	57	50
Тест **B**	83	93	92	80	72	60	45	55	62	70

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла между оценками по двум тестам.

Решение. Располагая оценки теста A и B в убывающем порядке и присваивая каждой оценке соответствующий ранг перепишем исходную таблицу, записывая в каждую ячейку вместо оценки - ее соответствующий ранг

Ранг x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг y	2	1	3	4	9	8	10	5	7	6
R	8	8	7	6	1	1	0	2	0	0

Справа от $y_1 = 2$ имеется $R_1 = 8$ рангов больших 2; справа от $y_2 = 1$ имеется $R_2 = 8$ рангов больших 1 и т.д. Найдем коэффициент ранговой корреляции Кендалла

$$\rho = \frac{4R}{n\,(n-1)} - 1 = \frac{4 \cdot 33}{10\,(10-1)} - 1 = 0.47. \quad \blacktriangle$$

Задача 31. Три арбитра оценили мастерство 10 спортсменов. В итоге были получены три последовательности рангов x_i, y_i, z_i:

Ранг x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг y	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4
Ранг z	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

Определить пару арбитров, оценки которых наиболее согласуются, используя коэффициент ранговой корреляции Кендалла.

5.4 Статистическая проверка статистических гипотез

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из нескольких гипотез.

В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают через α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают через β.

Статистическим критерием называют случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым (эмпирическим) значением, K называют то значение критерия, которое вычислено по выборкам.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; в противном случае - нулевую гипотезу принимают.

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область, при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

5.4.1 Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант и соответствующих им частот

x_1	x_2	x_3	...	x_N
n_1	n_2	n_3	...	n_N

Требуется, используя критерий Пирсона. Проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность x распределена нормально.

Для этого необходимо:

1. Вычислить выборочную среднюю $\bar{x}$ и выборочное среднеквадратическое отклонение σ.

2. Вычислить теоретические частоты

$$n_i = \frac{nh}{\sigma} \cdot \varphi\left(u_i\right),$$

где n - объем выборки, h- шаг,

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}, \quad \varphi\left(u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

3. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

3.1. найти наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}};$$

3.2. по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s - число групп выборки) находят критическую точку χ_0^2 по таблице приложения 3.

Если $\chi^2 < \chi_0^2$ - нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если $\chi^2 > \chi_0^2$ - гипотезу отвергают. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Пример 58. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности x с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Решение.

1. Найдем выборочное среднее.

С учетом

$$n = \sum n_i = 15 + 26 + 25 + 30 + 26 + 21 + 24 + 20 + 13 = 200$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum x_i n_i \\ &= \frac{5\cdot 15 + 7\cdot 26 + 9\cdot 25 + 11\cdot 30 + 13\cdot 26 + 15\cdot 21 + 17\cdot 24 + 19\cdot 20 + 21\cdot 13}{200} \\ &= 12.63 \end{aligned}$$

2. Найдем выборочное среднеквадратическое отклонение. Для этого вычислим второй начальный момент

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i \\ &= \frac{1}{200}\left(\begin{array}{l} 5^2\cdot 15 + 7^2\cdot 26 + 9^2\cdot 25 + 11^2\cdot 30 + 13^2\cdot 26 + \\ +15^2\cdot 21 + 17^2\cdot 24 + 19^2\cdot 20 + 21^2\cdot 13 \end{array}\right) = \frac{36312}{200} = 181.56 \end{aligned}$$

затем дисперсию

$$D = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 181.56 - 12.63^2 = 22.043$$

откуда среднеквадратичное отклонение есть

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{22.043} = 4.695.$$

3. Вычислим теоретические частоты, учитывая, что $n = 200$, $h = 2$, $\sigma = 4.695$ по формуле

$$n_i^{'} = \frac{nh}{\sigma}\,\varphi\left(u_i\right); \qquad \varphi\left(u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-u_i^2/2},$$

где

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}.$$

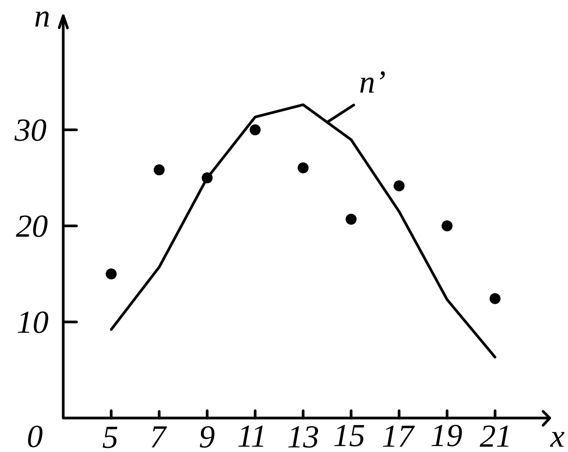
4. Сравнивая эмпирические и теоретические частоты найдем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}} = 22.425.$$

5. По таблице критических точек распределения χ_0^2, по уровню значимости $\alpha = 0.05$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ найдем кристическую точку

$$\chi_0^2\,(0.05;\ 6) = 12.5$$

Так как $\chi^2 > \chi_0^2$ - то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются значимо, что и видно из рисунка, (где точками обозначены эмпирические значения случайной величины x, а сплошной линией - теоретические значения. ▲



Задача 32. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности x с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
n	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

5.4.2 Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по биномиальному закону

Проведено n опытов. Каждый опыт состоит из N независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А одна и та же. После регистрации числа появления события А получено следующее распределение дискретной случайной величины x:

x	0	1	...	N
n	n_0	n_1	...	n_N

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о распределении дискретной случайной величины x по биноминальному закону.

Для того, чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о биномиальном распределении генеральной совокупности необходимо:

1. По заданному эмпирическому распределению вычислить выборочную среднюю $\bar{x}$.

2. Учитывая, что $\bar{x} = Np$, принять в качестве оценки параметра p биноминального распределения величину

$$p = \frac{\bar{x}}{N}.$$

3. Вычислить теоретические частоты

$$n_i^{'} = nP_i = nC_N^i p^i q^{N-i},$$

где n - объем выборки.

4. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

4.1. найти наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}};$$

4.2. по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s - число групп выборки) находят критическую точку χ_0^2 по таблице приложения 3.

Если $\chi^2 < \chi_0^2$ - нет оснований отвергнуть гипотезу о биномиальном распределении генеральной совокупности. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если $\chi^2 > \chi_0^2$ - гипотезу отвергают. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Пример 59. Произведено $n = 100$ опытов, по $N = 5$ испытаний. В итоге получено следующее эмпирическое распределение.

x	0	1	2	3	4	5
n	2	10	27	32	23	6

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о биномиальном распределении генеральной совокупности x.

Решение.

1. Найдем выборочное среднее.

С учетом

$$n = \sum n_i = 2 + 10 + 27 + 32 + 23 + 6 = 100$$

получим

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = \frac{1}{100}\left(0 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 27 + 3 \cdot 32 + 4 \cdot 23 + 5 \cdot 6\right) = \frac{282}{100} = 2.82$$

2 Примем в качестве оценки параметра p биномиального распределения величину

$$p = \frac{\bar{x}}{N} = \frac{2.82}{5} = 0.564.$$

3 Вычислим теоретические частоты

$$n_i^{'} = nP_i = nC_N^i p^i q^{N-i} = 100 \cdot C_5^i p^i q^{5-i},$$

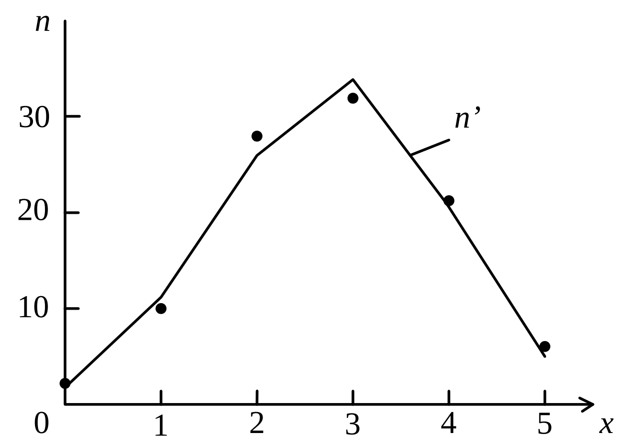
$n = 100$ - объем выборки.

4 Сравнивая эмпирические и теоретические частоты найдем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}} = 0.03183.$$

5 По таблице критических точек распределения χ_0^2, по уровню значимости $\alpha = 0.05$ и числу степеней свободы $k = 5 - 1 = 4$ найдем критическую точку

$$\chi_0^2\,(0.05;\ 4) = 9.48$$



Так как $\chi^2 < \chi_0^2$ - нет оснований отвергнуть гипотезу о биномиальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, данные наблюдений согласуются с гипотезой. ▲

Задача 33. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о биномиальном распределении генеральной совокупности x с эмпирическим распределением выборки:

x	0	1	2	3	4	5
n	72	77	34	14	2	1

5.4.3 Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант и соответствующих им частот

x_1	x_2	x_3	...	x_N
n_1	n_2	n_3	...	n_N

Требуется, используя критерий Пирсона. Проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность x распределена по закону Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Для этого необходимо:

1. Вычислить выборочную среднюю $\bar{x}$.

2. Принять в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона Выборочную среднюю $\lambda = \bar{x}$.

3. Вычислить теоретические частоты

$$n_k = n \cdot P_n(k) = n \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где n - объем выборки.

4. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

a. найти наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}};$$

b. по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s - число групп выборки) находят критическую точку χ_0^2 по таблице приложения 3.

Если $\chi^2 < \chi_0^2$ - нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если $\chi^2 > \chi_0^2$ - гипотезу отвергают. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Пример 60. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о Пуассоновском распределении генеральной совокупности x с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x	0	1	2	3	4
n	116	56	22	4	2

Решение.

1. Найдем выборочное среднее. С учетом $n = \sum n_i = 116 + 56 + 22 + 4 + 2 = 200$ получим

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i n_i = \frac{1}{200} (0 \cdot 116 + 1 \cdot 56 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2) = \frac{120}{200} = 0.6$$

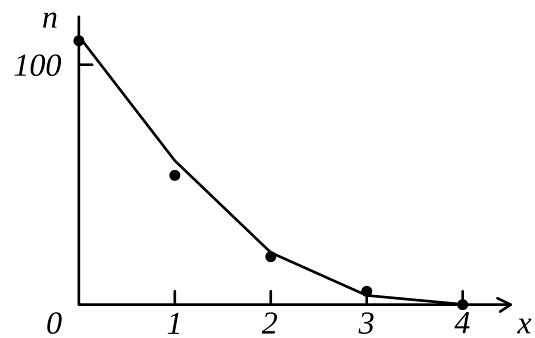
2. Возьмем в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю $\lambda = \bar{x} = 0.6$.

3. Вычислить теоретические частоты

$$n_k = n \cdot P_n(k) = n \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = n \cdot \frac{0.6^k}{k!} e^{-0.6}.$$

4. Сравнивая эмпирические и теоретические частоты найдем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}} = 5.42.$$



5. По таблице критических точек распределения χ_0^2, по уровню значимости $\alpha = 0.05$ и числу степеней свободы $k = s - 2 = 5 - 2 = 3$ найдем критическую точку

$$\chi_0^2 (0.05;\ 3) = 7.81.$$

Так как $\chi^2 < \chi_0^2$ - то нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются не значимо, что и видно из рисунка, (где точками обозначены эмпирические значения случайной величины x, а сплошной линией - теоретические значения. ▲

Задача 34. Задача Борткевича. На основании 200 донесений, полученных в течении двадцати лет о количестве кавалеристов прусской армии, которые погибли в результате гибели под ними коня, было получено следующее эмпирическое распределение:

x	0	1	2	3	4
n	109	65	22	3	1

5.4.4 Проверка гипотезы о показательном распределении генеральной совокупности

Для того, чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о показательном распределении генеральной совокупности необходимо:

1. По заданному эмпирическому распределению вычислить выборочную среднюю $\bar{x}$.

2. Принять в качестве оценки параметра λ показательного распределения величину, обратную выборочной средней:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}}.$$

3. Вычислить теоретические частоты

$$n_i^{'} = n_i \lambda \cdot \left(e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}\right),$$

где n - объем выборки, h - шаг.

4. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:
a. найти наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}};$$

b. по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s - число групп выборки) находят критическую точку χ_0^2 по таблице приложения 3.

Если $\chi^2 < \chi_0^2$ - нет оснований отвергнуть гипотезу о показательном распределении генеральной совокупности. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если $\chi^2 > \chi_0^2$ - гипотезу отвергают. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Пример 61. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о показательном распределении генеральной совокупности x с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x	$0-5$	$5-10$	$10-15$	$15-20$	$20-25$	$25-30$
n	133	45	15	4	2	1

Решение.

1. Найдем выборочное среднее.

С учетом

$$n = \sum n_i = 133 + 45 + 15 + 4 + 2 + 1 = 200$$

получим

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n}\sum n_i \frac{(x_i + x_{i+1})}{2} \\ &= \frac{1}{200}(133 \cdot 2.5 + 45 \cdot 7.5 + 15 \cdot 12.5 + 4 \cdot 7.5 + 2 \cdot 22.5 + 1 \cdot 27.5) = \frac{1000}{200} = 5\end{aligned}$$

2. Примем в качестве оценки параметра λ показательного распределения величину, обратную выборочной средней:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

3. Вычислить теоретические частоты

$$n_i^{'} = n\lambda \cdot \left(e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}\right),$$

где $n = 200$ - объем выборки.

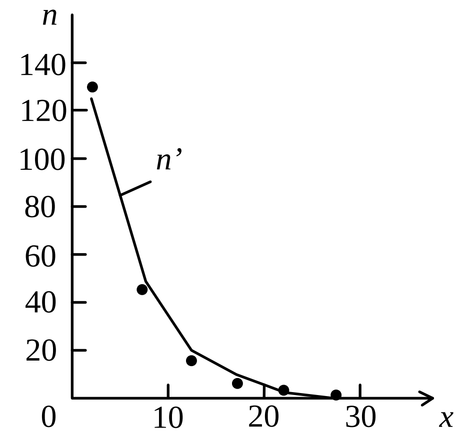
4. Сравнивая эмпирические и теоретические частоты найдем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}} = 1.5561.$$

5. По таблице критических точек распределения χ_0^2, по уровню значимости $\alpha = 0.05$ и числу степеней свободы $k = s - 2 = 6 - 2 = 4$ найдем критическую точку

$$\chi_0^2\,(0.05;\ 4) = 9.48. \quad \blacktriangle$$

Гипотеза принимается.



Задача 35. В итоге регистрации времени прихода 800 посетителей выставки было получено следующее эмпирическое распределение:

x	$0-1$	$1-2$	$2-3$	$3-4$	$4-5$	$5-6$	$6-7$	$6-8$
n	259	167	109	74	70	47	40	34

Требуется при уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что случайная величина x - время прихода посетителей выставки распределено по показательному закону.

5.4.5 Проверка гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности

Для того, чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о равномерном распределении генеральной совокупности необходимо:

1. По заданному эмпирическому распределению вычислить выборочную среднюю $\bar{x}$.

2. Вычислить среднеквадратическое отклонение σ.

3. Оценить параметры a и b по формулам

$$\begin{cases} a = \bar{x} - \sqrt{3}\sigma \\ b = \bar{x} + \sqrt{3}\sigma \end{cases}$$

4. Найти плотность распределения

$$f\,(x) = \frac{1}{b-a}$$

5. Вычислить теоретические частоты

$$n_i^{'} = n_i \frac{x_i - x_{i-1}}{b-a},$$

где n - объем выборки, h - шаг.

6. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:
a. найти наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'};$$

b. по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s - число групп выборки) находят критическую точку χ_0^2 по таблице приложения 3.

Если $\chi^2 < \chi_0^2$ - нет оснований отвергнуть гипотезу о равномерном распределении генеральной совокупности. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если $\chi^2 > \chi_0^2$ - гипотезу отвергают. Т.е. эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Пример 62. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о равномерном распределении генеральной совокупности x с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x	$2-4$	$4-6$	$6-8$	$8-10$	$10-12$	$12-14$	$14-16$	$16-18$	$18-20$	$20-22$
n	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Решение.
1. Найдем выборочное среднее
С учетом

$$n = \sum n_i = 21 + 16 + 15 + 26 + 22 + 14 + 21 + 22 + 18 + 25 = 200$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum n_i \frac{(x_i + x_{i+1})}{2} \\ &= \frac{1}{200}\left(\begin{array}{c} 21\cdot 3 + 16\cdot 5 + 15\cdot 7 + 26\cdot 9 + 22\cdot 11 + \\ +14\cdot 13 + 21\cdot 15 + 22\cdot 17 + 18\cdot 19 + 25\cdot 21 \end{array} \right) = \frac{2462}{200} = 12.31. \end{aligned}$$

2. Найдем второй начальный момент

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum n_i \frac{\left(x_i + x_{i+1}\right)^2}{4} \\ &= \frac{1}{200}\left(\begin{array}{l} \quad 21\cdot 3^2 + 16\cdot 53^2 + 15\cdot 73^2 + 26\cdot 93^2 + \\ +22\cdot 113^2 + 14\cdot 133^2 + 21\cdot 153^2 + \\ +22\cdot 173^2 + 18\cdot 193^2 + 25\cdot 213^2 \end{array} \right) = \frac{37064}{200} = 185.32. \end{aligned}$$

дисперсию

$$D = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 185.32 - 12.31^2 = 33.78$$

и среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{33.78} = 5.81.$$

3. Оценить параметры a и b по формулам

$$\begin{cases} a = \bar{x} - \sqrt{3}\sigma = 12.31 - \sqrt{3} \cdot 5.81 = 2.24 \\ b = \bar{x} + \sqrt{3}\sigma = 12.31 + \sqrt{3} \cdot 5.81 = 22.37 \end{cases}$$

4. Найдем плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{22.37 - 2.24} = \frac{1}{20.13} = 0.049$$

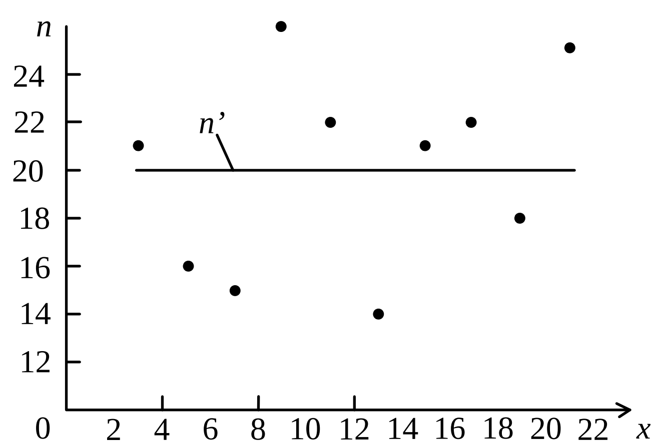
5. Вычислим теоретические частоты

$$\begin{aligned} n_2^{'} &= n\,\frac{x_2 - x_1}{b-a} = 200\,\frac{4-2}{20.13} = 20, \\ n_3^{'} &= n\,\frac{x_3 - x_2}{b-a} = 200\,\frac{6-4}{20.13} = 20 \\ &\ldots \\ n_{10}^{'} &= n\,\frac{x_{10} - x_9}{b-a} = 200\,\frac{22-20}{20.13} = 20 \end{aligned}$$

где n - объем выборки.

6. Сравнивая эмпирические и теоретические частоты найдем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}} = 7.55.$$



7. По таблице критических точек распределения χ_0^2, по уровню значимости $\alpha = 0.05$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 10 - 3 = 7$ найдем критическую точку

$$\chi_0^2\,(0.05;\ 7) = 14.0. \quad \blacktriangle$$

Так как $\chi^2 > \chi_0^2$ - гипотезу о равномерном распределении генеральной совокупности отвергаем. Другими словами, данные наблюдений не согласуются с гипотезой.

Задача 36. В течение 10 ч. регистрировали прибытие автомашин к бензоколонке и получили следующее эмпирическое распределение случайной величины x:

x	$8-9$	$9-10$	$10-11$	$11-12$	$12-13$	$13-14$	$14-15$	$15-16$
n	12	40	22	16	28	6	11	22

Требуется при уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что время прибытия машин распределено равномерно.

Приложение 1. Таблица нормальной плотности вероятности $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1824	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2. Таблица интеграла вероятности $\Phi\left(z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0.04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,40147
1,3	0,4032	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,4192	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,4331	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,4452	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,4554	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,4640	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,4712	0,497193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,4772	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,4821	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,4861	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,4892	0,48956	0,48983	0,42009	0,42035	0,42061	0,42086	0,42110	0,42134	0,42157
2,4	0,42182	0,42202	0,42224	0,42245	0,42265	0,42285	0,42305	0,42324	0,42343	0,42361
2,5	0,42370	0,42396	0,42413	0,42429	0,42445	0,42461	0,42476	0,42491	0,42506	0,42520
2,6	0,42539	0,42547	0,42560	0,42573	0,42585	0,42597	0,42609	0,42620	0,42631	0,42642
2,7	0,42653	0,42663	0,42673	0,42683	0,42692	0,42702	0,42711	0,42719	0,42728	0,42736
2,8	0,42745	0,42752	0,42759	0,42767	0,42774	0,42781	0,42788	0,42794	0,42801	0,42807
2,9	0,42814	0,42819	0,42825	0,42830	0,42835	0,42841	0,42846	0,42851	0,42855	0,42860
3,0	0,42860	0,42869	0,42873	0,42877	0,42881	0,42885	0,42889	0,42893	0,42896	0,42899
3,1	0,43034	0,43064	0,43095	0,43126	0,43155	0,43183	0,43211	0,43237	0,43263	0,43288
3,2	0,43319	0,43336	0,43359	0,43381	0,43402	0,43423	0,43442	0,43462	0,43481	0,43499
3,3	0,43516	0,43533	0,43549	0,43565	0,43581	0,43595	0,43610	0,43624	0,43637	0,43650
3,4	0,43661	0,43675	0,43686	0,43698	0,43709	0,43719	0,43729	0,43739	0,43749	0,43758
3,5	0,43764	0,43775	0,43784	0,43792	0,43799	0,43807	0,43814	0,43821	0,43828	0,43834
3,6	0,43849	0,43846	0,43852	0,43858	0,43863	0,43868	0,43873	0,43878	0,43883	0,43887
3,7	0,43892	0,43896	0,44003	0,44042	0,44079	0,44115	0,44150	0,44183	0,44215	0,44246
3,8	0,44275	0,44305	0,44332	0,44359	0,44384	0,44409	0,44433	0,44455	0,44477	0,44498
3,9	0,44519	0,44538	0,44557	0,44575	0,44592	0,44609	0,44625	0,44640	0,44655	0,44669
4,0	0,44683	0,44696	0,44709	0,44721	0,44732	0,44743	0,44754	0,44764	0,44774	0,44784
4,1	0,44793	0,44802	0,44810	0,44818	0,44826	0,44833	0,44840	0,44847	0,44854	0,44860
4,2	0,44866	0,44872	0,44877	0,44883	0,44888	0,44893	0,44897	0,45022	0,45065	0,45106
4,3	0,45146	0,45183	0,45219	0,45254	0,45287	0,45319	0,45349	0,45378	0,45406	0,45433
4,4	0,45458	0,45484	0,45506	0,45528	0,45550	0,45570	0,45590	0,45608	0,45626	0,45643
4,5	0,45660	0,45675	0,45690	0,45705	0,45718	0,45731	0,45744	0,45756	0,45767	0,45778
4,6	0,45788	0,45798	0,45808	0,45817	0,45825	0,45834	0,45841	0,45849	0,45856	0,45863
4,7	0,45869	0,45876	0,45882	0,45887	0,45893	0,45898	0,46032	0,46078	0,46123	0,46166
4,8	0,46206	0,496245	0,46282	0,46317	0,46350	0,46382	0,46413	0,46442	0,46469	0,46495
4,9	0,46520	0,46544	0,46567	0,46588	0,46609	0,46628	0,46647	0,46665	0,466821	0,46698

Приложение 3. Критические точки распределения χ_0^2

k	Уровень значимости α												
	.995	**.990**	**.975**	**.950**	**.900**	**.750**	**.500**	**.250**	**.100**	**.050**	**.025**	**.010**	**.005**
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.10	0.45	1.32	2.70	3.84	5.02	6.63	7.87
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.57	1.38	2.77	4.60	5.99	7.37	9.21	10.5
3	0.07	0.11	0.21	0.35	0.58	1.21	2.36	4.10	6.25	7.81	9.34	11.3	12.8
4	0.20	0.29	0.48	0.71	1.06	1.92	3.35	5.38	7.77	9.48	11.1	13.2	14.8
5	0.41	0.55	0.83	1.14	1.61	2.67	4.35	6.62	9.23	11.0	12.8	15.0	16.7
6	0.67	0.87	1.23	1.63	2.20	3.45	5.34	7.84	10.64	12.5	14.4	16.8	18.5
7	0.98	1.23	1.68	2.16	2.83	4.25	6.34	9.03	12.01	14.0	16.0	18.4	20.2
8	1.34	1.64	2.17	2.73	3.48	5.07	7.34	10.2	13.36	15.5	17.5	20.0	21.9
9	1.73	2.08	2.70	3.32	4.16	5.89	8.34	11.3	14.68	16.9	19.0	21.6	23.5
10	2.15	2.55	3.24	3.94	4.86	6.73	9.34	12.5	15.98	18.3	20.4	23.2	25.1
11	2.60	3.05	3.81	4.57	5.57	7.58	10.3	13.7	17.27	19.6	21.9	24.7	26.7
12	3.07	3.57	4.40	5.22	6.30	8.43	11.3	14.8	18.54	21.0	23.3	26.2	28.2
13	3.56	4.10	5.00	5.89	7.04	9.29	12.3	15.9	19.81	22.3	24.7	27.6	29.8
14	4.07	4.66	5.62	6.57	7.78	10.1	13.3	17.1	21.06	23.6	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.22	6.26	7.26	8.54	11.0	14.3	18.2	22.30	24.9	27.4	30.5	32.8
16	5.14	5.81	6.90	7.96	9.31	11.9	15.3	19.3	23.54	26.2	28.8	31.9	34.2
17	5.69	6.40	7.56	8.67	10.0	12.7	16.3	20.4	24.7	27.5	30.1	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.8	13.6	17.3	21.6	25.9	28.8	31.5	34.8	37.1
19	6.84	7.63	8.90	10.1	11.6	14.5	18.3	22.7	27.2	30.1	32.8	36.1	38.5
20	7.43	8.26	9.59	10.8	12.4	15.4	19.3	23.8	28.4	31.4	34.1	37.5	39.9
21	8.03	8.89	10.2	11.5	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.6	35.4	38.9	41.4
22	8.64	9.54	10.9	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.7	40.2	42.7
23	9.26	10.1	11.6	13.0	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.1	38.0	41.6	44.1
24	9.88	10.8	12.4	13.8	15.6	19.0	23.3	28.2	33.1	36.4	39.3	42.9	45.5
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.4	19.9	24.3	29.3	34.3	37.6	40.6	44.3	46.9
26	11.1	12.1	13.8	15.3	17.2	20.8	25.3	30.4	35.5	38.8	41.9	45.6	48.2
27	11.8	12.8	14.5	16.1	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.1	46.9	49.6
28	12.4	13.5	15.3	16.9	18.9	22.6	27.3	32.6	37.9	41.3	44.4	48.2	50.9
29	13.1	14.2	16.0	17.7	19.7	23.5	28.3	33.7	39.0	42.5	45.7	49.5	52.3
30	13.7	14.9	16.7	18.4	20.5	24.4	29.3	34.7	40.2	43.7	46.9	50.8	53.6

Литература

Основная

1. Думачев В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Воронеж: ВИ МВД России, 2006. - 200 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа. 2007. 480 с.
3. Гмурман В.Е. Практическое руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа. 2007. 460 с.
4. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука. 2004.
5. Агапов Г.И. задачи по теории вероятностей. - М.: Высшая школа. 2005. 80 с.
6. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). М.: Высшая школа. 2003.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. т. 2. М.: Высшая школа. 2001. 355с.

Дополнительная

8. Енина Е.П. Математическая статистика. Учебное пособие. Воронеж: ВГУ. 2003.
9. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М., 2004.
10. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., 2005.
11. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.М., 2001.
12. Тихонов В.И., Миронов Р.А. Марковские процессы. М.:Сов.радио, 2004.
13. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М., 2004.
14. Дынкин Е.Б. Основания теории марковских процессов. М., 2003.
15. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.:Сов.радио, 2005.
16. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. - М.: Наука. 2003. 240 с.
17. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т.2. - М.: Наука, 2003.

.

Владислав Николаевич Думачев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Подписано в печать 26.12.2011 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс новая. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 9,30.
Тираж 110 экз. Заказ № 319

Издательство Воронежского института МВД России
394065, Воронеж, просп. Патриотов, 53

Типография Воронежского института МВД России
394065, Воронеж, просп. Патриотов, 53.