МИСиС Группа МИ-12-1д	**ФДО** Товмасян Владимир Вячеславович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА 2

Контрольная работа № 1

Методические указания

Указания к выполнению контрольной работы № 3

Задача 1 [18]

1. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора А.

2. Полученные собственные векторы проверить на ортогональность, а также согласно определению собственного числа и собственного вектора.

3. Провести преобразование матрицы линейного оператора к базису из собственных векторов.

Задача 2 [18]

1. Составить матрицу квадратичной формы, найти её собственные числа и собственные векторы.

2. Полученные собственные векторы проверить на ортогональность, а также согласно определению собственного значения и собственного вектора.

3. Преобразовать заданное уравнение, перейдя в базис из ортонормированных собственных векторов, привести уравнение к каноническому виду.

4. Сделать чертеж исходной системы координат, новой системы координат и построить кривую второго порядка. Найти основные параметры кривой - центр, вершины, фокусы, асимптоты, директрисы в новой и исходной системах координат,

Задача 3 [19]

1. Найти обратную матрицу $D = C^{-1}$

2. Провести контроль расчётов перемножением матриц C и D.

3. С помощью матриц C и D и формулы преобразования координат тензора найти новые координаты тензора.

4. Записать получившиеся координаты тензора в матричной форме.

В отчете должны быть приведены все выкладки.

Задача 4 [19]

1. Симметрировать каждый блок матрицы В. Записать получившиеся координаты тензора в матричной форме

2. Альтернировать каждый блок матрицы В. Записать получившиеся координаты тензора в матричной форме

3. Свернуть тензор b по соответствующим условию верхнему и нижнему индексам. Записать получившиеся координаты тензора в матричной форме.

4. Провести операцию двойной свертки по соответствующим условию верхним и нижним индексам. Записать получившиеся координаты тензора в матричной форме.

В отчете должны быть приведены все выкладки.

Задача 5 [19]

1. Альтернировать тензор S типа (3,0) по всем его индексам.

2. Доказать, что элементы с повторяющимися индексами равны 0.

3. Записать получившиеся координаты тензора в матричной форме.

В отчете должны быть приведены все выкладки.

Задача 6 [19]

1. Указать базис в пространстве бивекторов.

2. Доказать, что указанный набор векторов действительно образует базис в пространстве $\wedge^2$.

3. Найти координаты векторов, получающихся при действии оператора $\hat{F}$ на базисные векторы пространства бивекторов. Записать получившиеся координаты векторов с помощью матрицы линейного оператора.

В отчете должны быть приведены все выкладки.

Задача 7 [19]

1. Определить тип тензора тензорного произведения. Указать базис.

2. Вывести формулу для определения координат тензора тензорного произведения.

3. Найти координаты получившегося тензора. Записать получившиеся

координаты тензора в матричной форме.

В отчете должны быть приведены все выкладки.

Задача 8 [19]

1. Найти матрицу G^{-1}.

2. Проверить правильность нахождения обратной матрицы умножением G^{-1} на матрицу G.

3. Записать формулу для операции поднятия данного индекса.

4. Вычислить координаты получившегося тензора. Результаты записать с помощью матрицы.

5. Записать формулу для операции опускания данного индекса.

6. Вычислить координаты получившегося тензора. Результаты записать с помощью матрицы

В отчете должны быть приведены все выкладки.

---

1. Найти собственные числа и собственные векторы самосопряженного линейного оператора A. Преобразовать матрицу линейного оператора A к диагональному виду. Условие содержит матрицу линейного оператора A.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Задано уравнение кривой второго порядка:

$$x^2 - 4xy + 9y^2 + 20\sqrt{5}y = -55$$

Привести уравнение этой кривой к каноническому виду, изобразить эту кривую на плоскости.

3. Дана матрица A-матрица тензора валентности 3 типа (0,3) над линейным пространством V размерности 2 (в старом базисе), C-матрица перехода к новому базису. Найти матрицу тензора A в новом базисе.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \end{array}\right) \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Даны координаты B=(b^{km}_{ij}) тензора типа (2,2) .Найти матрицы тензоров:

$$b^{km}_{(ij)}, b^{[km]}_{ij}, b^{km}_{im}, b^{im}_{mi}$$

$$B = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 1 & -1 \\ -9 & 5 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -7 \\ -3 & -3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Даны координаты тензора S=(s_{ijk}) типа (3,0). Найти тензор $s[ijk]$, то есть результат альтернирования тензора S по всем его индексам.

$$S = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 7 & -9 & -2 & 6 & 7 & 8 & -6 & -5 \\ -6 & 3 & 6 & 8 & -1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 9 & 6 & -5 & -6 & 3 & 6 & -2 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

6. Дана матрица линейного оператора F:V→ V в базисе B=(e_1,e_2,e_3). Найти матрицу линейного оператора $\widehat{F}:\wedge^2 \to \wedge^2$, действующего в пространстве $\wedge^2$ бивекторов по правилу: $\widehat{F}(e_i \wedge e_j) = F(e_i) \wedge F(e_j)$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -6 & 6 & -2 \\ -7 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Задана матрица коэффициентов:

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Требуется найти координаты тензорного произведения:

T= $(h_{11}e_1 + h_{12}e_2 + h_{13}e_3) \otimes (h_{21}e^1 + h_{22}e^2 + h_{23}e^3) \otimes (h_{31}e_1 + h_{32}e_2 + h_{33}e_3)$

8. Пусть в фиксированном базисе B=(e_1,e_2,e_3) трехмерного пространства V задана матрица метрического тензора G = (g_{ij}) и матрица некоторого двухвалентного тензора T типа (2,0).Выполняя операции поднятия и опускания индекса у тензора t в евклидовом пространстве, найти $t_{k\bullet}^{\bullet m}$ и $t_{\bullet\bullet}^{lq}$, если

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix};\ T=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Составитель: ст. преп. кафедры математики Е. Л. Плужникова