**Вариант №5**

**Задача №5**

Вычислить криволинейный интеграл по окружности , ориентированной по часовой стрелке:

.

**Задача №7**

Найти общее решение дифференциального уравнения:

.

**Задача №8**

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию : .

**Задача №9**

Решить задачу Коши:

, .

**Задача №10**

Найти общее действительное решение однородного дифференциального уравнения: .

**Задача №11**

Количество продукции, поступающей на обработку от трех цехов, определяется соотношением 3:4:5. На 100 единиц продукции первого цеха приходится в среднем 3 единицы брака , второго и третьего цехов , соответственно, 2 и 4 единицы. Наудачу взятая единица продукции оказалась годной. Какова вероятность того, что она поступила из второго цеха?

**Задача №12**

Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Оценить вероятность того, что событие в 100 испытаниях наступит не менее 20 раз и не более 30 раз.

**Задача №13**

Случайная величина  может принимать только два значения  и , причём . Известны вероятность  возможного значения , математическое ожидание  и дисперсия . Найти закон (ряд) распределения этой случайной величины: .

**Задача №14**

Случайная величина  задана функцией распределения , требуется:

1) найти плотность вероятности;

2) математическое ожидание и дисперсию ;

3) построить графики функции распределения и функции плотности распределения.

.

**Задача №15**

Заданы математическое ожидание  и средне квадратическое отклонение  нормально распределённой величины . Найти: 1) вероятность того, что  примет значение, принадлежащие интервалу ; 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения  окажется меньше .

.

**Решение примерного варианта**

**Задача №5**

Вычислить криволинейный интеграл по окружности , ориентированной по часовой стрелке:

.

**Решение**

По формуле Грина, которая в данной задаче применима, т.к. кривая  кусочно-гладкая, а функции  и  – непрерывны вместе с частными производными  и  в замкнутом круге :  [1], имеем:

,

знак «–» перед двойным интегралом объясняется тем, что формула Грина верна при положительной ориентации границы области , что в нашей задаче совпадает с ориентацией окружности  против часовой стрелки, а по условию надо подсчитать значение интеграла при противоположной ориентации окружности.

 – площадь единичного круга.

**Задача №7**

Найти общее решение дифференциального уравнения:

.

**Решение**

Данное уравнение является однородным. Необходимо произвести замену , где  – новая функция. В силу замены . Подставляя в уравнение, получим уравнение относительно неизвестной функции :

 – уравнение с разделяющимися переменными.

.

Подстановкой в уравнение убеждаемся, что функции  – решения уравнения.







.

Подставляя в выражение для решения имеем:

 

.

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая все решения, получим общее решение уравнения:

.

**Задача №8**

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию :

.

**Решение**

Запишем уравнение в приведённом виде:

 – уравнение Бернулли.

Замена . Поделим уравнение на  и используем замену:

.

Полученное уравнение линейное уравнение первого порядка. Решим однородное уравнение , . Общее решение найдём методом вариации произвольной постоянной . Полагая,  ищем общее решение в виде , где  неизвестная функция. Подставляя в неоднородное уравнение, получим:

, .

Отсюда общее решение линейного уравнения:

.

Возвращаясь к исходной переменной, имеем:  – общее решение исходного уравнения. Подставляя начальное условие, находим , тогда  – решение задачи.

**Задача №9**

Решить задачу Коши:

, .

**Решение**

Уравнение не зависит от переменной . Поэтому можно понизить порядок уравнения заменой , тогда . При этом из начальных условий следует, что .

,

т.к.  не является решением задачи Коши, то полученное уравнение эквивалентно уравнению:

 – уравнение Бернулли.

Замена  приводит к линейному уравнению , решая его, получаем  или . Подставляя начальное условие , получим . Возвращаясь к исходной функции, имеем:

 или , получаем:

.

Подставляя начальное условие, получим .

Решение задачи Коши задаётся выражением:

.

**Задача №10**

Найти общее действительное решение однородного дифференциального уравнения:

.

**Решение**

Это однородное линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Для нахождения общего решения найдём корни характеристического уравнения: . Тогда общее действительное решение имеет вид: , т.к. , , то общее действительное решение имеет вид: .

**Задача №11**

Вероятность того, что во время работы компьютера произойдёт сбой в арифметическом устройстве (АУ), в оперативной памяти (ОП), в остальных устройствах относятся как 3:2:5. Вероятность обнаружения сбоя в АУ, в ОП и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9.

Найти: 1) вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен;

2) вероятность того, что обнаруженный в машине сбой возник в АУ или ОП.

**Решение**

1) Обозначим через  событие – возникший в машине сбой обнаружен. Можно сделать три предположения (гипотезы):  – сбой произошёл в АУ;  – сбой произошёл в ОП;  – сбой произошёл в остальных устройствах. По условию задачи: , , . Условные вероятности обнаружения сбоя в каждом из перечисленных устройств АУ, ОП и остальных равны, соответственно – ; . Так как события  () образуют полную группу событий то по формуле полной вероятности имеем:



.

2) Событие, состоящее в том, что сбой возник в АУ или ОП можно записать как , так как , то события  и  – несовместны и, следовательно,

С другой стороны  Отсюда:



 – искомая вероятность.

**Задача №12**

1) Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено менее трёх изделий [5].

**Решение**

Число  велико, вероятность  мала и рассматриваемые события (повреждение изделий) независимы, поэтому можно использовать формулу Пуассона:

, где .

Интересующая нас вероятность того, что будет повреждено менее трёх изделий, находится по формуле:

.

2) Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 и не более 90 раз [5].

**Решение**

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

,

где  – функция Лапласа,

, .

По условию ; ; ; , . Тогда:

; .

С учётом нечётности функции Лапласа , получим:

.

**Задача 13**

Случайная величина  может принимать только два значения  и , причём . Известны вероятность  возможного значения , математическое ожидание  и дисперсия . Найти закон (ряд) распределения этой случайной величины [5].

**Решение**

Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины должна быть равна единице, поэтому вероятность  того, что  примет значение  равна: .

Тогда закон распределения :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 0,6 | 0,4 |

По определению:

;

.

Напишем закон распределения :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 0,6 | 0,4 |

Найдём ,

тогда .

Имеем систему уравнений для нахождения  и :

.

Решая систему, найдём: ,  и , . По условию , поэтому второе решение не подходит. Тогда закон распределения дискретной случайной величины имеет вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 |
|  | 0,6 | 0,4 |

**Задача №14**

Случайная величина  задана функцией распределения , требуется:

1) найти плотность вероятности;

2) математическое ожидание и дисперсию ;

3) построить графики функции распределения и функции плотности распределения.

.

**Решение**

Найдём плотность распределения. По определению:

.

Тогда

,

.

График функции распределения представлен на рисунке 6.



Рисунок 6

График функции плотности распределения представлен на рисунке 7.



Рисунок 7

**Задача №15**

Заданы математическое ожидание  и средне квадратическое отклонение  нормально распределённой величины . Найти: 1) вероятность того, что  примет значение, принадлежащие интервалу ; 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения  окажется меньше .

.

**Решение**

1) Воспользуемся формулой:

,

подставив , получим:

.

По таблицам приложения [5] находим ; . Тогда искомая вероятность равна:

.

2) Искомая вероятность находится по формуле:

.

По условию . Следовательно:

