

**РОСЖЕЛДОР**

**Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Ростовский государственный университет путей сообщения»**

**(РГУПС)**

---

И.О. Нечес, Н.Д. Пирогова

**АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Учебно-методическое пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Ростов-на-Дону

2013

УДК 621.3.011.71(07) + 06

**Нечес, И.О.**

Анализ линейных электрических цепей : учебно-методическое пособие к курсовой работе / И.О. Нечес, Н.Д. Пирогова; ФГБОУ ВПО РГУПС. – 2-е изд. перераб. и доп.– Ростов н/Д, 2013. – 93 с. : ил. 19. Библиогр. : 6 назв.

Приведено задание и методические указания для выполнения курсовой работы по теории линейных электрических цепей. Изложена методика выполнения работы и основные формулы для расчета линейной электрической цепи при воздействии тестовых и заданных сигналов временным и частотным методами. Рассмотрен пример расчета линейной электрической цепи второго порядка.

Предназначено студентам, изучающим дисциплину «Теория линейных электрических цепей».

Одобрено к изданию кафедрой «Связь на ж.-д. транспорте».

Рецензент канд. техн. наук, доц. К.С. Айзинбуд (РГУПС)

## Задание на курсовую работу

1 Рассчитать переходную  $h(t)$  и импульсную  $k(t)$  характеристики заданной цепи. По корням характеристического уравнения сделать вывод о характере переходного процесса и рассчитать постоянную времени  $\tau_{ц}$  цепи. Для проверки полученных результатов найти импульсную характеристику  $k(t)$  через переходную  $h(t)$ .

2 Определить отклик цепи на воздействие сигнала  $S_{вх}(t)$  методом интеграла Дюамеля.

Построить графики в одном масштабе:

- исходного сигнала  $S_{вх}(t)$ ;
- переходной  $h(t)$  и импульсной  $k(t)$  характеристик;
- отклика  $S_{вых}(t)$ .

Графики функции  $S_{вых}(t)$  построить в интервале  $t = [0; 5\tau_{ц}]$ . Оценить степень искажения сигнала.

3 Определить частотные функции схемы:

- комплексный коэффициент передачи по напряжению  $K(j\omega)$ ;
- амплитудно-частотную характеристику (АЧХ);
- фазо-частотную характеристику (ФЧХ);
- групповое время запаздывания (ГВЗ);

Построить графики АЧХ, ФЧХ, ГВЗ.

4 Определить  $A$ -параметры заданной цепи. Выполнить проверку правильности получения  $A$ -параметров.

5 Используя  $A$ -параметры заданной цепи, получить выражения для  $K(j\omega)$ , АЧХ, ФЧХ, ГВЗ при заданной нагрузке  $Z_{н}$ .

Построить графики АЧХ, ФЧХ, ГВЗ.

По кривой АЧХ определить полосу пропускания четырехполосника на уровне  $0,7 K(j\omega)_{\max}$ .

Указать интервал частот, в котором частотные характеристики заданной схемы удовлетворяют условиям неискаженной передачи.

6 Вычислить характеристические сопротивления  $Z_{c1}$ ,  $Z_{c2}$  и входное сопротивление  $Z_{вх}$  четырехполосника.

Вычислить собственное, рабочее и вносимое затухания:

– при  $Z_{ВН} = Z_{c1}$ ,  $Z_{Н} = Z_{c2}$ ;

– при заданных значениях  $Z_{ВН}$  и  $Z_{Н}$ .

7 Разложить заданный сигнал в тригонометрический ряд Фурье (период сигнала  $T = Q\tau_u$ ). Вычислить составляющие амплитудного и фазового спектра. Построить спектральные диаграммы амплитуд и фаз.

Число членов ряда ограничить величиной, когда  $C_B \approx 0,1C_1$ .

8 Вычислить спектральную функцию и амплитудный спектр заданного сигнала, рассматривая его как одиночный. Построить график амплитудного спектра, включающий три полуволны.

9 Определить спектральным методом отклик цепи на заданный непериодический сигнал. Построить график амплитудного спектра отклика, включающий три полуволны.

Примечание. Графики по пп. 3, 5, 8, 9 строить в одном масштабе по  $\omega$  один под другим.

### Номера вариантов и числовые данные задания

№ вар	$R_1$ кОм	$R_2$ кОм	$L$ мГн	$C$ мкФ	$Z_{ВН}$ Ом	$Z_{Н}$ кОм	$U$ В	$Q$
1	1	2	5	10	20	10	0,5	2
2	2	1	10	5	21	5	0,6	3
3	3	2	2	6	22	3	0,7	4
4	2	3	1	10	23	2	0,8	5
5	1	5	2	10	24	5	0,9	2
6	3	6	3	2	25	15	1	3
7	1	5	1	1	26	6	1,1	4

№ вар	$R_1$ кОм	$R_2$ кОм	$L$ мГн	$C$ мкФ	$Z_{BH}$ Ом	$Z_H$ кОм	$U$ В	$Q$
8	3	5	2	1	27	7	1,2	5
9	0,05	0,2	3	0,4	28	1	1,3	2
10	3	4	5	6	29	5	1,4	3
11	2	2	3	4	30	3	1,5	4
12	1,5	2	6	5	31	20	1,6	5
13	1	2	6	8	32	10	1,7	2
14	5	1	3	2	33	4	1,8	3
15	0,17	0,3	60	0,05	34	0,6	1,9	4
16	6	5	4	3	35	14	2	5
17	3	3	3	5	36	12	2,1	2
18	6	2	3	0,5	37	10	2,2	3
19	7	1	1,5	2	38	5	2,3	4
20	3	1	4	3	39	10	2,4	5
21	4	6	8	1	40	5	2,5	2
22	2	3	5	7	41	14	2,6	3
23	0,25	0,3	10	0,1	42	8	2,7	4
24	2	1	4	0,5	43	11	2,8	5
25	2	1,5	6	2	44	7	2,9	2

№ вар	$R_1$ кОм	$R_2$ кОм	$L$ мГн	$C$ мкФ	$Z_{BH}$ Ом	$Z_H$ кОм	$U$ В	$Q$
26	1	4	2	3	45	5	3	3
27	4,5	1	8	2	46	6	3,1	4
28	0,03	0,06	30	0,25	10	0,2	3,2	5
29	1,5	4	1,5	4	48	9	3,3	2
30	7	2	1	4	49	18	3,4	3
31	3	1	5	2	50	7	3,5	4
32	7	3	1	1	51	12	3,6	5
33	8	4	3	5	52	19	3,7	2
34	6	2	1	6	53	20	3,8	3
35	1	1	2	1	54	5	3,9	4
36	0,05	0,07	50	0,6	5,5	2,5	4	5
37	0,15	0,2	200	0,2	20	0,5	4,1	2
38	5	2	6,5	2	57	23	4,2	3
39	0,06	0,03	70	0,3	58	0,21	4,3	4
40	0,8	11	16	0,8	59	6	4,4	5
41	8	5	8	5	60	27	4,5	2
42	4	7	11	3	61	38	4,6	3
43	10	7	9	3	62	29	4,7	4

№ вар	$R_1$ кОм	$R_2$ кОм	$L$ мГн	$C$ мкФ	$Z_{BH}$ Ом	$Z_H$ кОм	$U$ В	$Q$
44	3,5	1,2	28	6	63	2,5	4,8	5
45	12	9	10	1	64	31	4,9	2
46	1	10	2	0,5	65	32	5	3
47	5	14	30	0,2	66	33	5,1	4
48	3	8	3	5	67	34	5,2	5
49	0,04	0,07	40	0,15	68	35	5,3	2
50	5	6	5	2	69	15	5,4	3
51	6	5	4	7	70	14	5,5	4
52	1	4	7	1,5	71	5	5,6	5
53	1	0,7	9	7	72	3,9	5,7	2
54	0,09	0,2	60	0,8	73	0,6	5,8	3
55	1	0,1	80	0,35	74	2,5	5,9	4
56	9	2	7	4	75	8	6	5
57	3,5	5	3	5	76	11	6,1	2
58	2	4	2,5	3	77	6	6,2	3
59	1,6	2,7	48	0,01	78	4	6,3	4
60	5	6	12	1	79	6,5	6,4	5
61	9	6	8,5	4	80	28	6,5	2

№ вар	$R_1$ кОм	$R_2$ кОм	$L$ мГн	$C$ мкФ	$Z_{BH}$ Ом	$Z_H$ кОм	$U$ В	$Q$
62	8	6	1	8	81	17	6,6	3
63	6	6	14	6	82	15,5	6,7	4
64	0,16	0,17	180	0,3	50	0,4	6,8	5
65	0,5	9	19	0,1	84	10,5	6,9	2
66	0,5	7	12	2	85	18,5	7	3
67	4	1	6	1	56	24	7,1	4
68	0,1	0,15	50	0,1	8,7	0,6	7,2	5
69	7	4	10	6	88	6	7,3	2
70	8	3	9	5,5	89	7	7,4	3
71	0,25	0,3	250	0,15	9,0	0,8	7,5	4
72	7	4	6	2,5	91	13	7,6	5
73	1	3	2	5	92	8	7,7	2
74	2	3	1	5	93	6	7,8	3
75	5	1,5	9	8	94	5,5	7,9	4
76	6	2	10	5	95	9	8,0	5
77	1,5	2,2	6	1	96	3	8,1	2
78	1,2	1,8	4	0,5	97	5	8,2	3
79	12	7	5	3	98	9	8,3	4



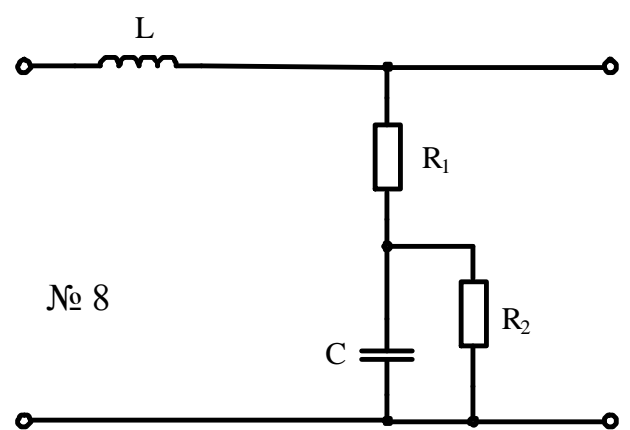
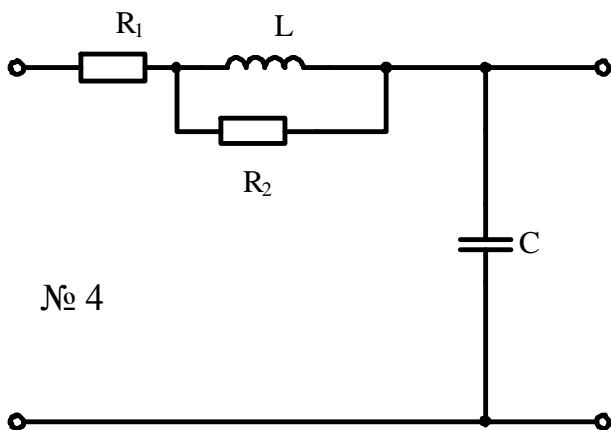
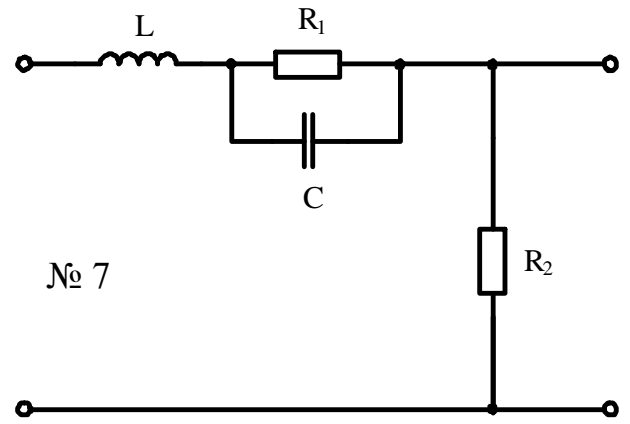
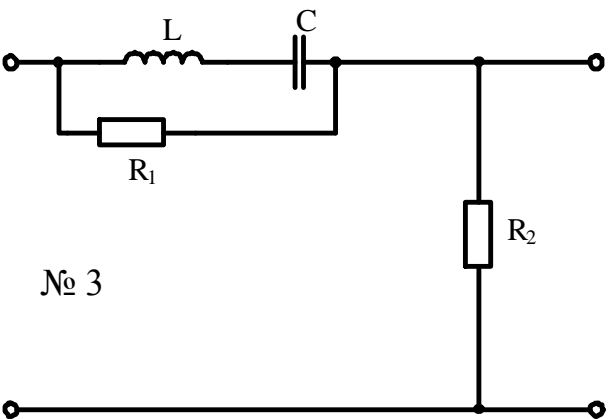
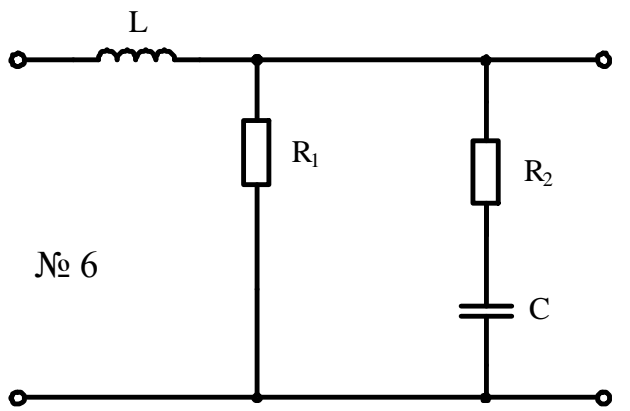
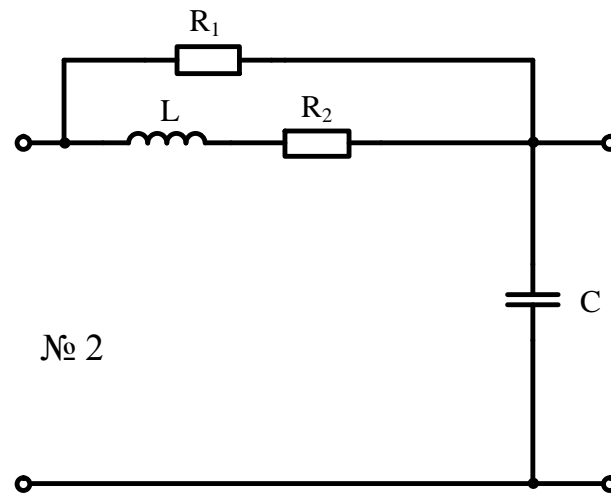
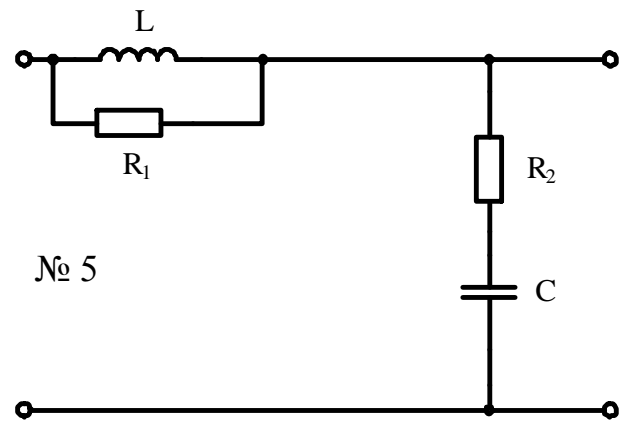
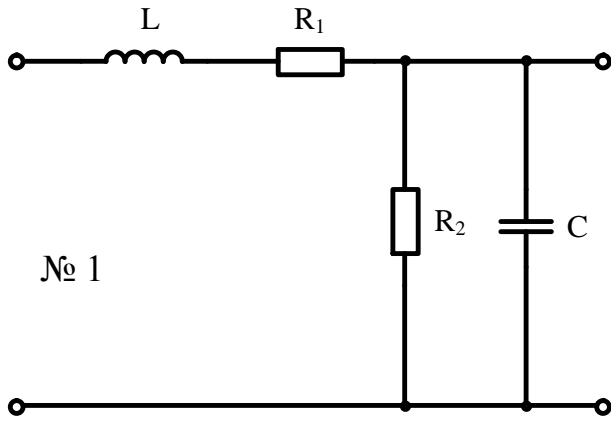
№ вар	$R_1$ кОм	$R_2$ кОм	$L$ мГн	$C$ мкФ	$Z_{BH}$ Ом	$Z_H$ кОм	$U$ В	$Q$
80	8	1	11	1,3	99	7,5	8,4	5
81	1,3	2,1	9	1	100	6,2	8,5	2
82	0,8	3	10	1,5	101	4	8,6	3
83	1,2	9	7,5	0,8	102	2	8,7	4
84	8	1	6,5	2,5	103	10	8,8	5
85	2	9	8	6	104	18	8,9	2
86	0,1	0,2	250	0,5	20	0,5	9,0	3
87	0,15	0,1	280	1,1	30	0,6	9,1	4
88	0,11	0,12	350	0,8	10	0,9	9,2	5
89	1,3	6,7	18	3	110	4	9,3	2
90	3	8	12	3,5	150	11	9,4	3
91	0,5	1,1	12	7	200	18	9,5	4
92	15	0,5	20	5	105	25	9,6	5
93	10	1	15	9	300	10	9,7	2
94	1	10	7	5	550	19	9,8	3
95	2,4	1,7	160	4	250	3	9,9	4
96	3	8	9	7	120	20,5	10	5
97	0,08	0,1	500	0,85	10	0,3	10,1	2

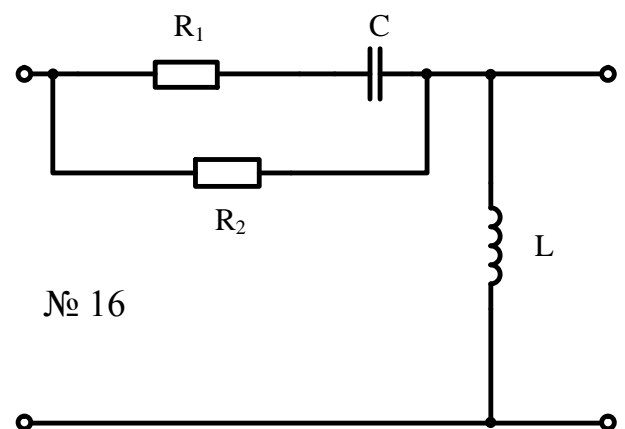
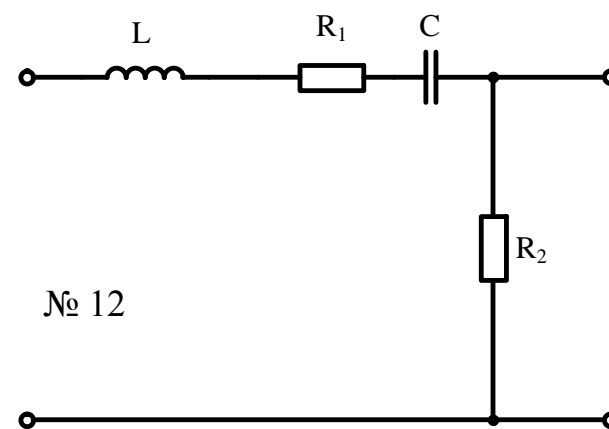
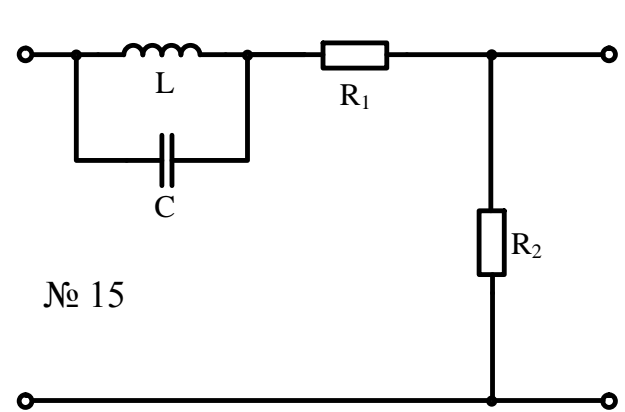
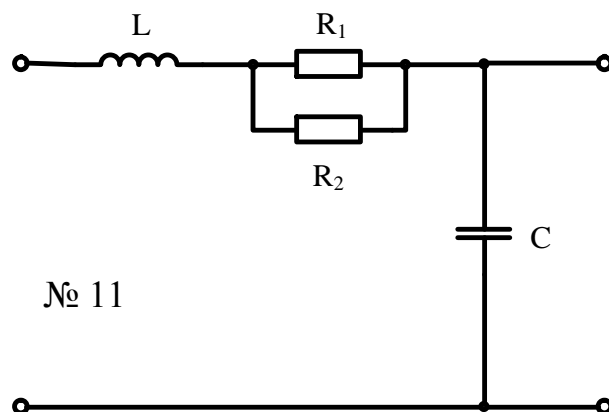
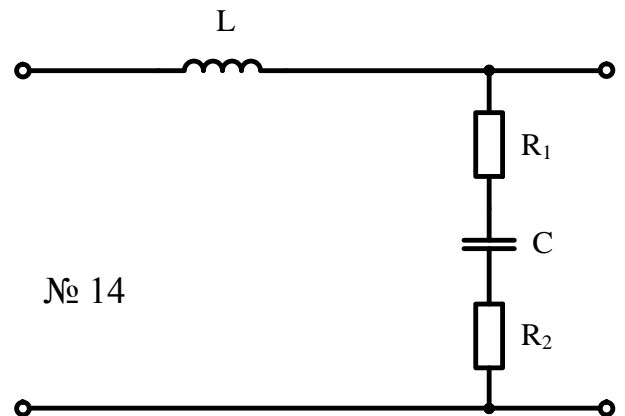
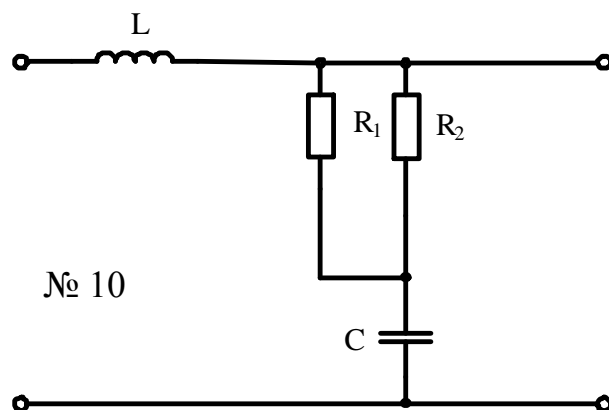
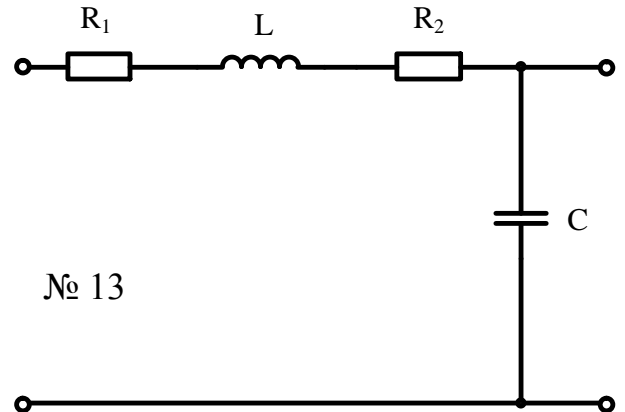
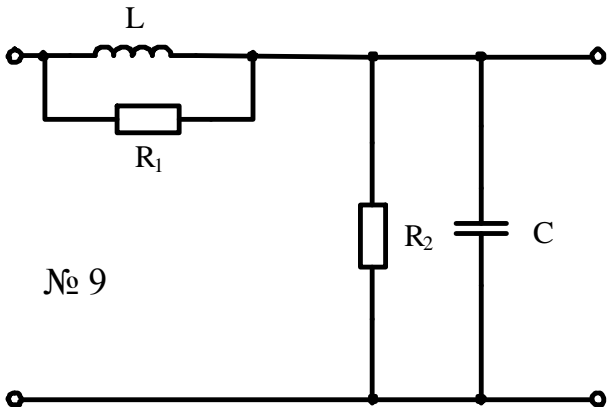
№ вар	$R_1$ кОм	$R_2$ кОм	$L$ мГн	$C$ мкФ	$Z_{BH}$ Ом	$Z_H$ кОм	$U$ В	$Q$
98	11	8	9,5	2	400	30	10,2	3
99	8	3	7	9	350	5	10,3	4
100	0,6	1	9	0,6	22	1,5	10,4	5
101	6	5	11	2,5	600	4,2	10,5	2
102	2	9	1	1	800	33	11	3
103	11	3	6	4	900	21	12	4
104	7	4	7,5	4	320	26	15	5

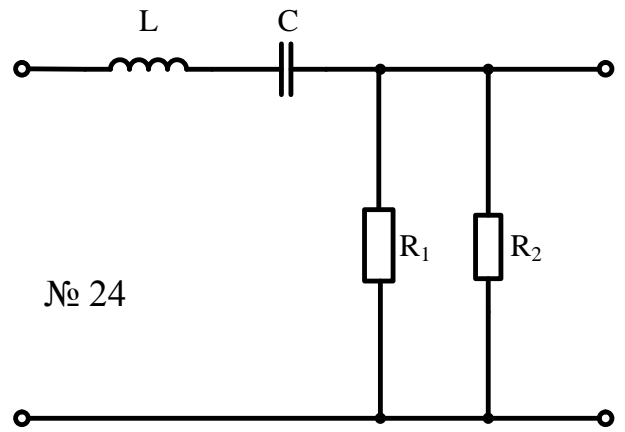
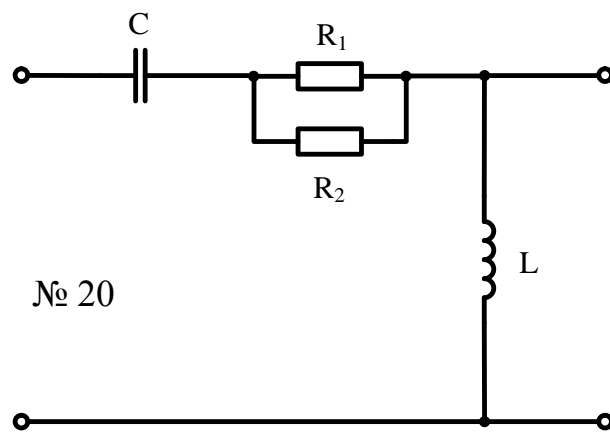
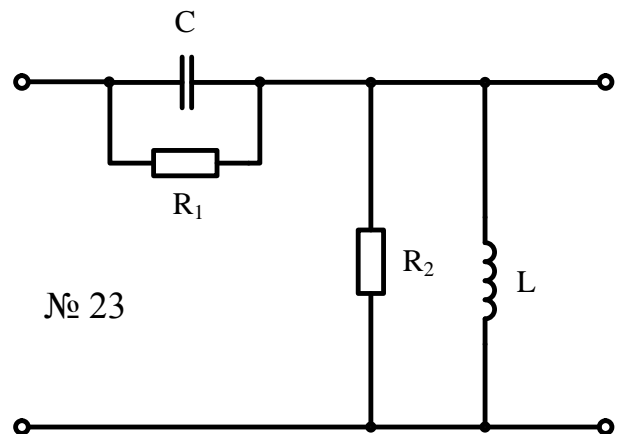
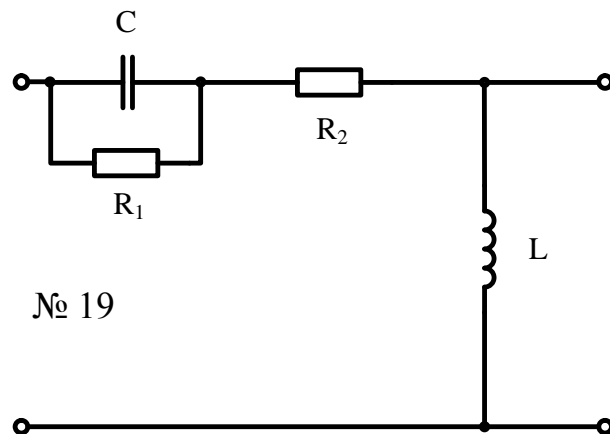
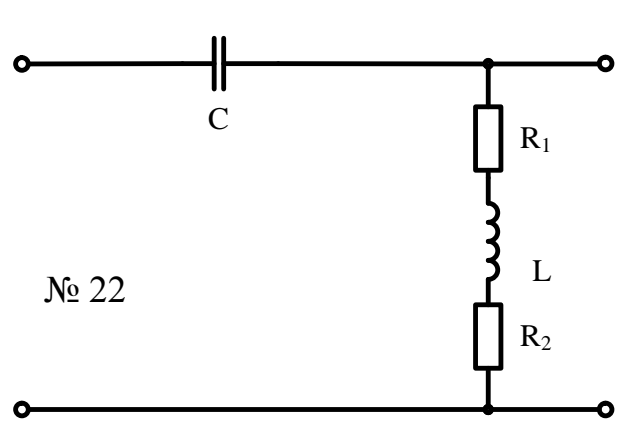
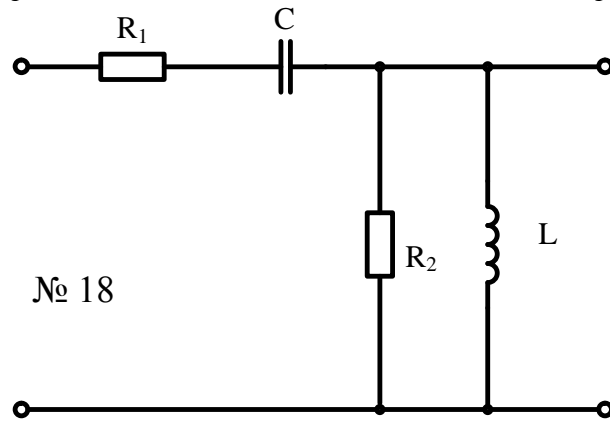
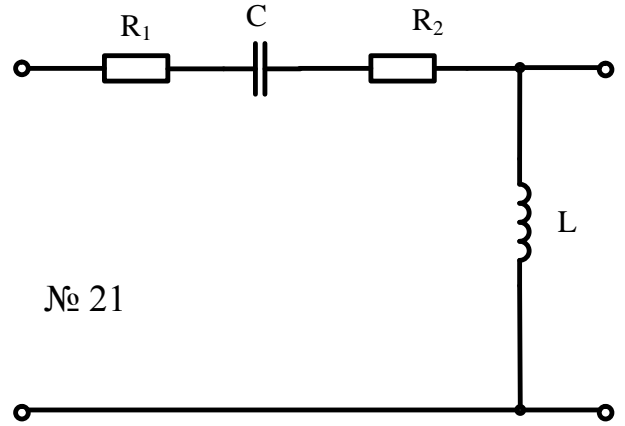
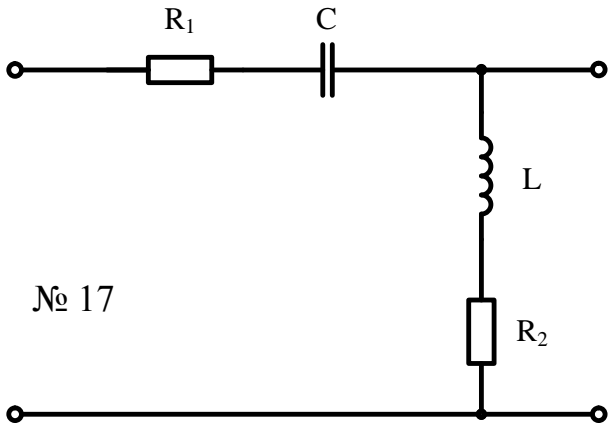
### Варианты схем и сигналов

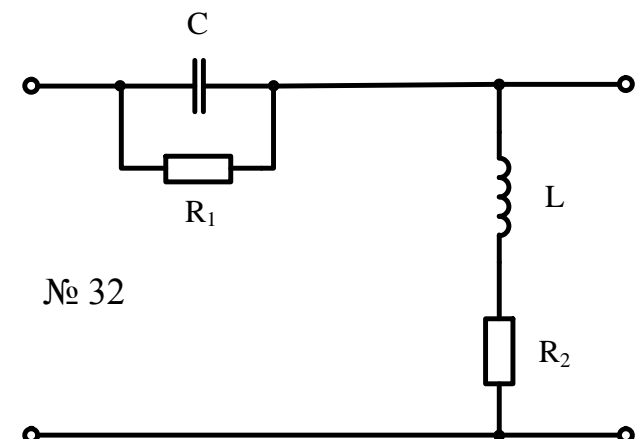
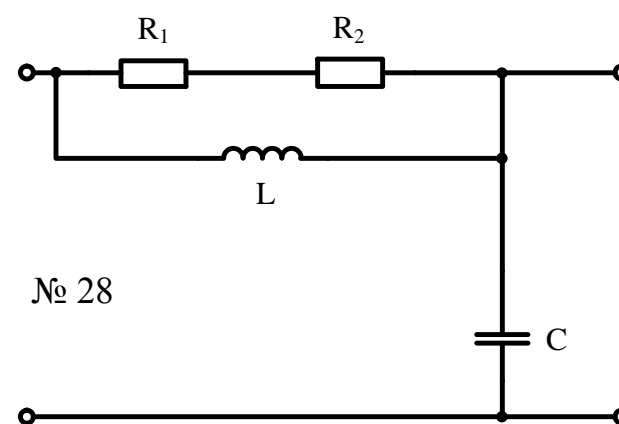
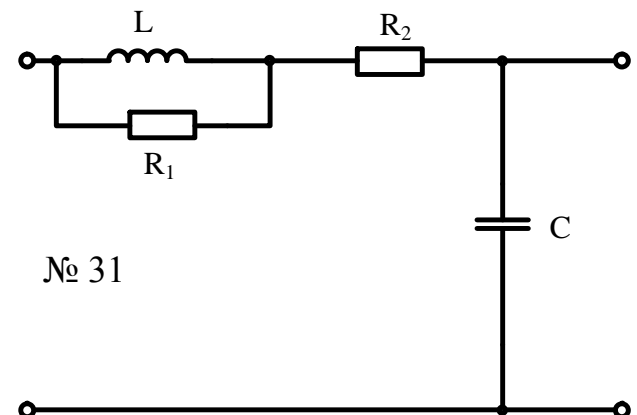
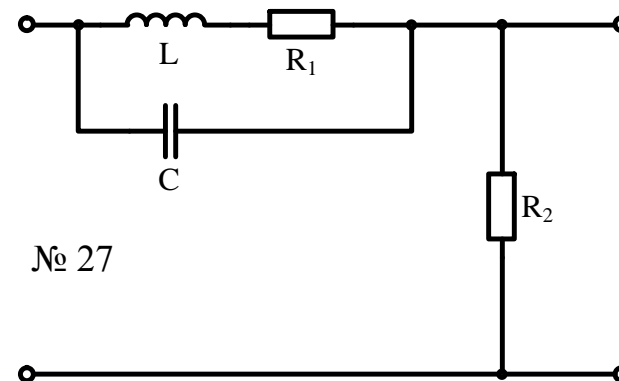
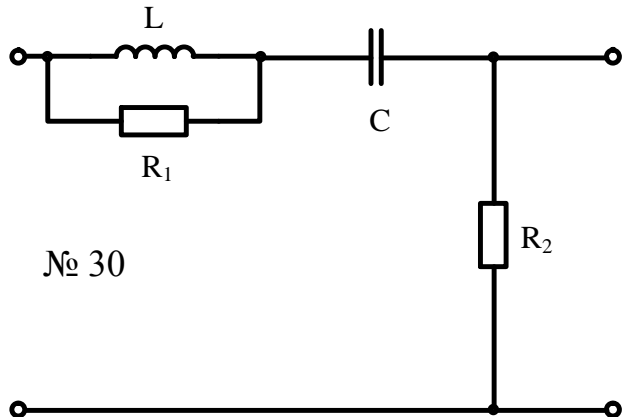
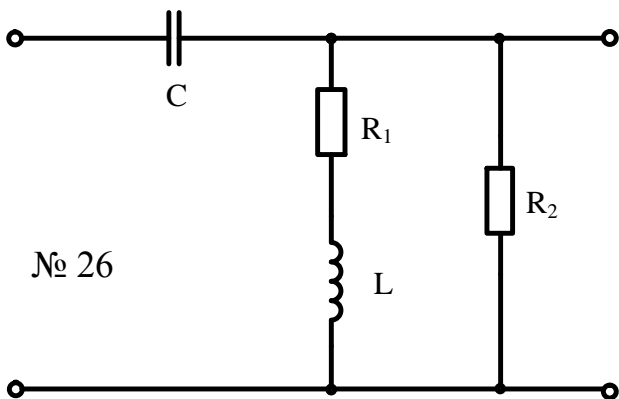
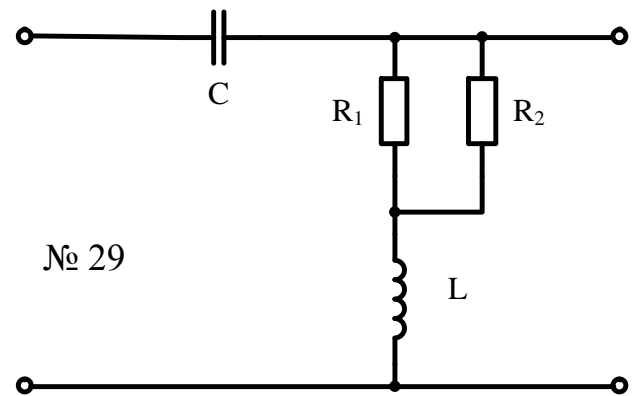
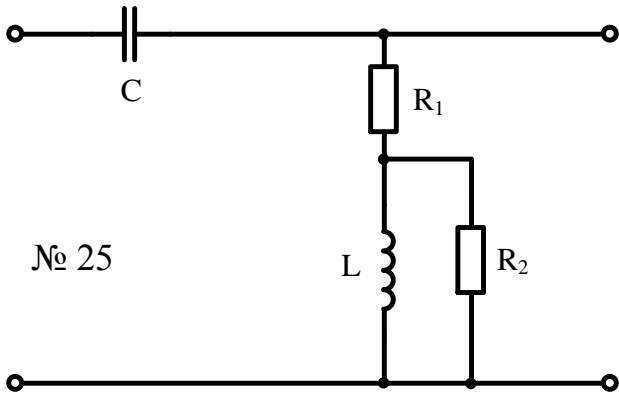
Ниже представлено 104 варианта схем второго порядка, предназначенных для анализа в данной курсовой работе. Каждому студенту предлагается индивидуальная схема с числовыми данными номиналов элементов цепи, выбираемыми из таблицы. Внутреннее сопротивление источника  $Z_{BH}$  и нагрузки  $Z_H$  используются при расчете схемы, как четырехполюсника в п. 5 и п. 6 работы.

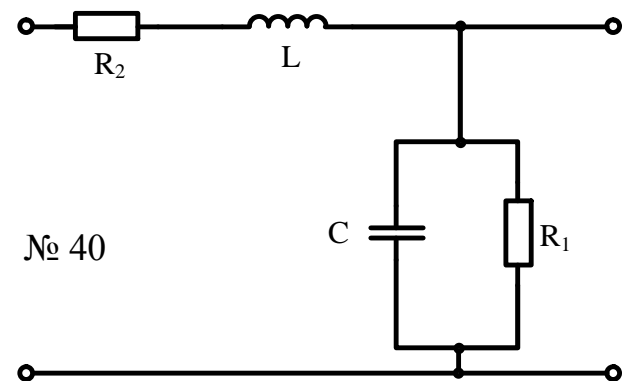
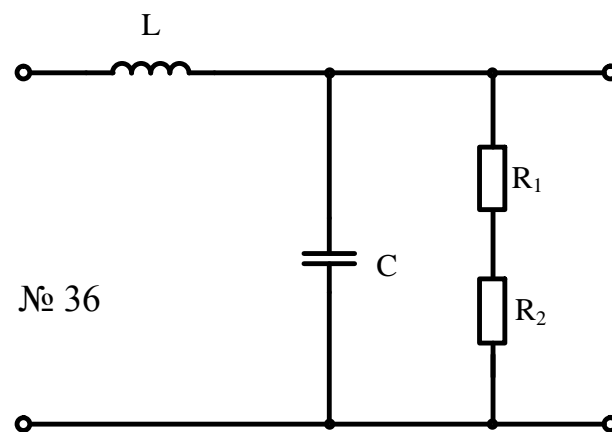
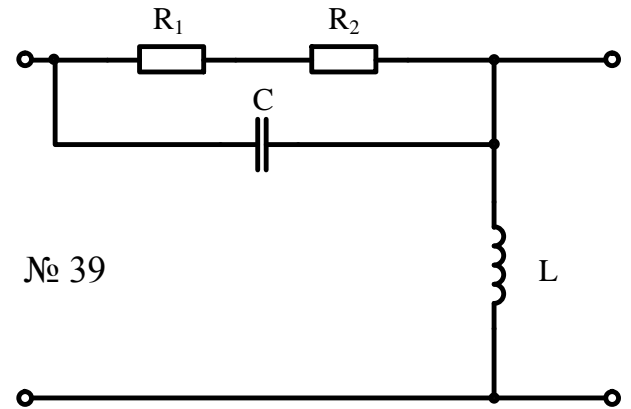
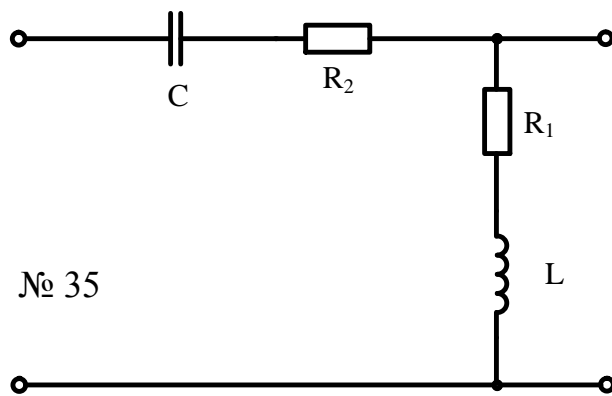
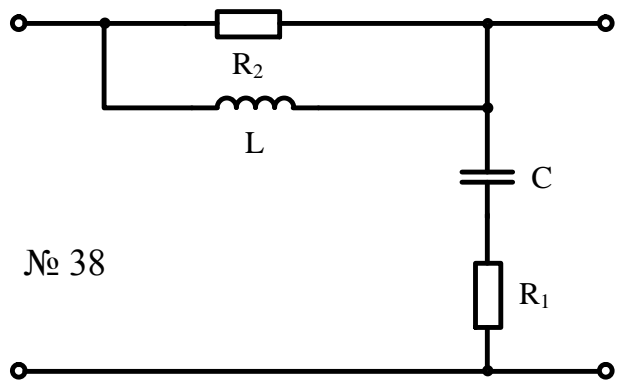
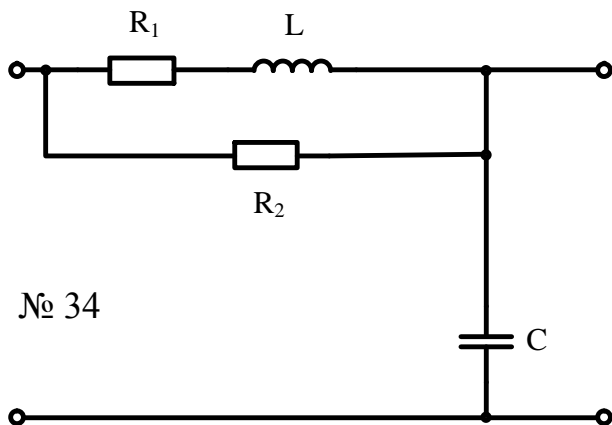
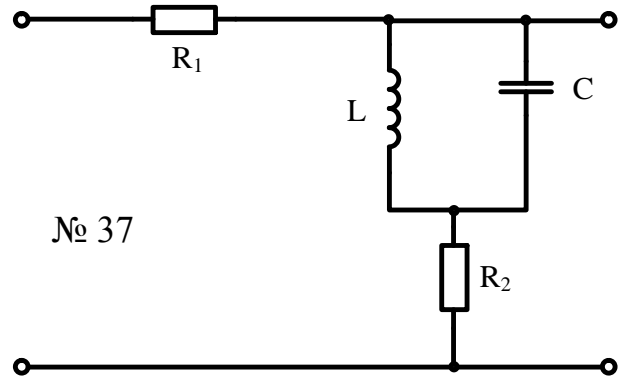
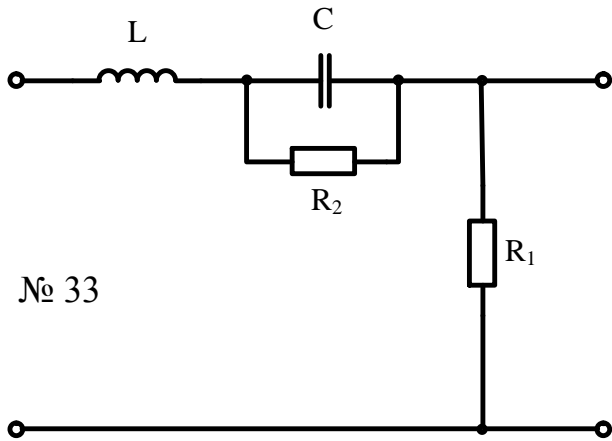
Также ниже приведены 104 варианта входных сигналов, параметры которых выбираются из таблицы и определяются при расчете. Параметр  $\tau_{и}$  определяется как удвоенная максимальная постоянная времени цепи  $\tau_{и} = 2\tau_{цл}$ , полученная при расчете переходной характеристики. Для сигналов экспоненциальной формы параметр  $\alpha = 3/\tau_{и}$  [1/с].

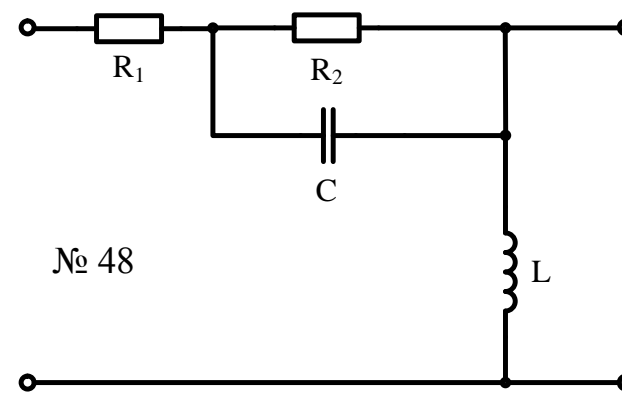
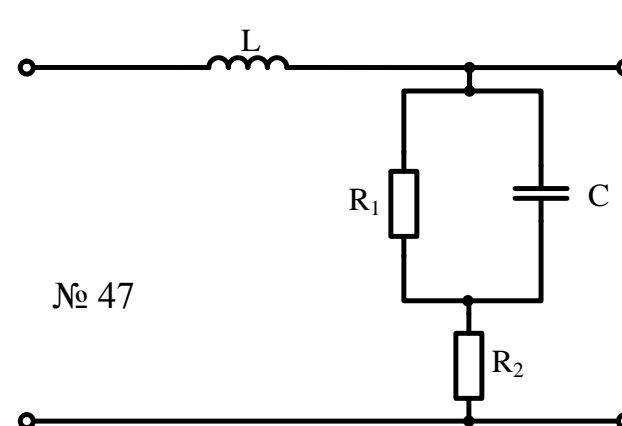
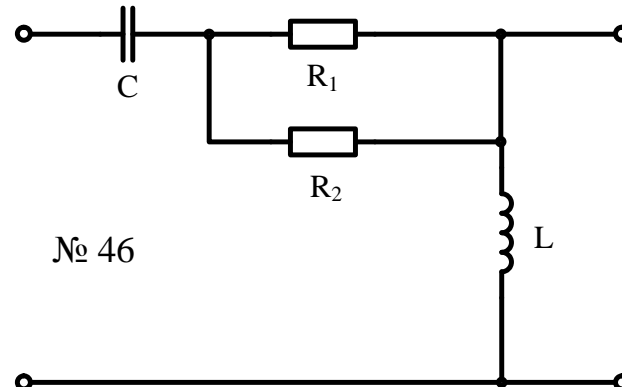
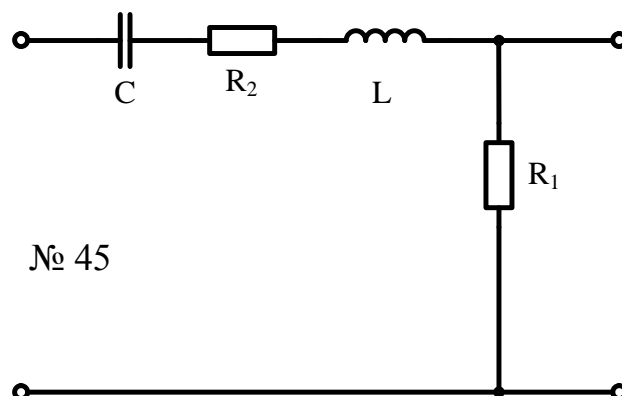
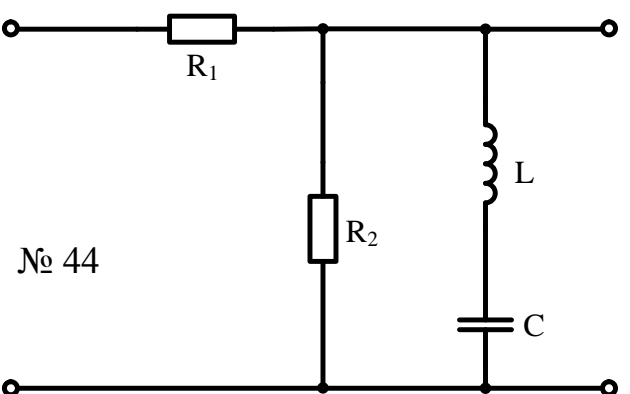
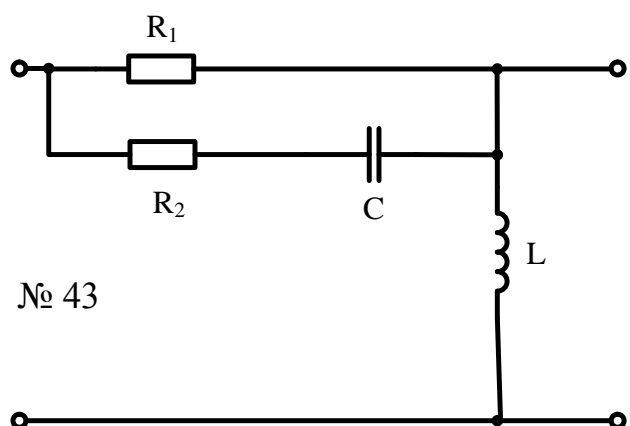
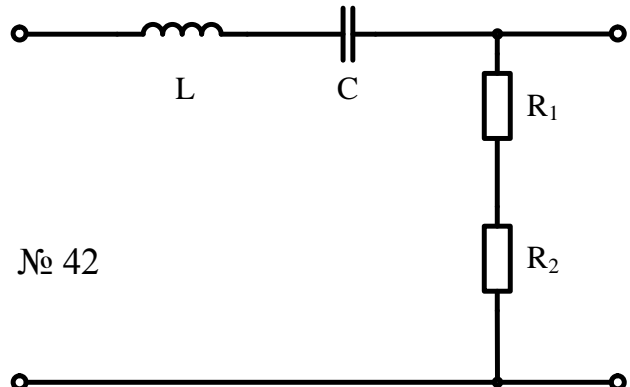
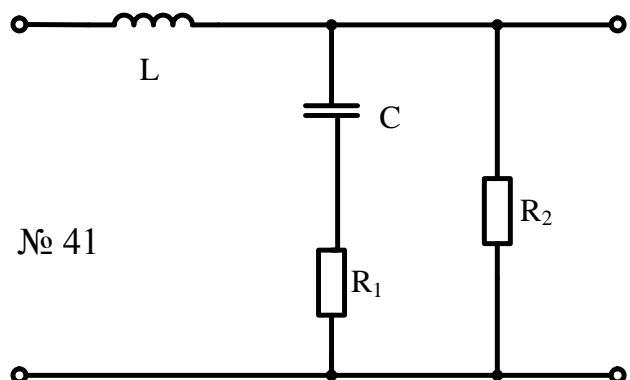




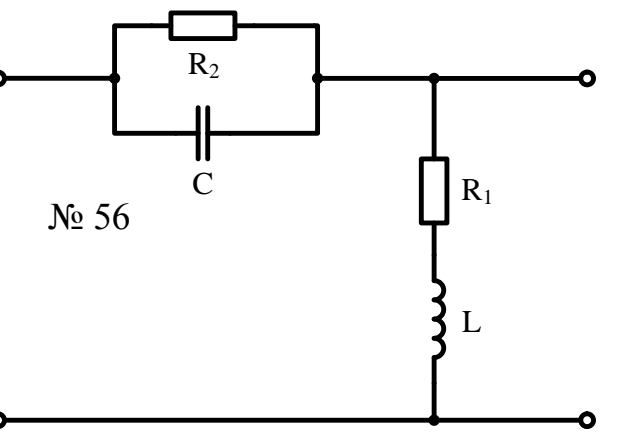
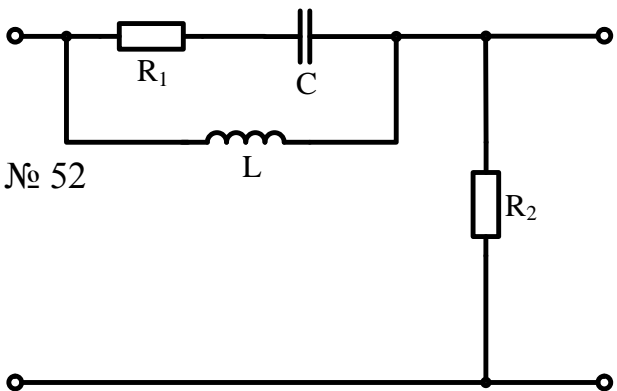
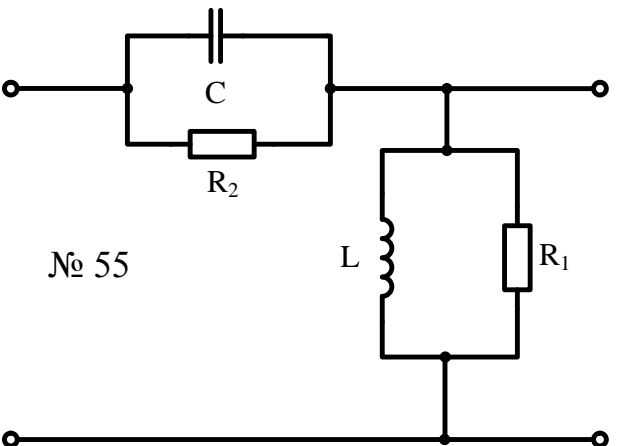
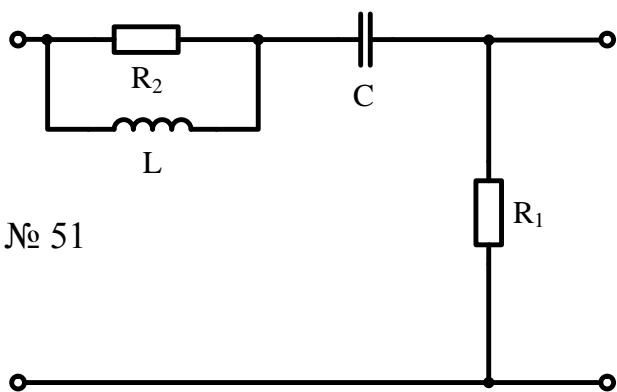
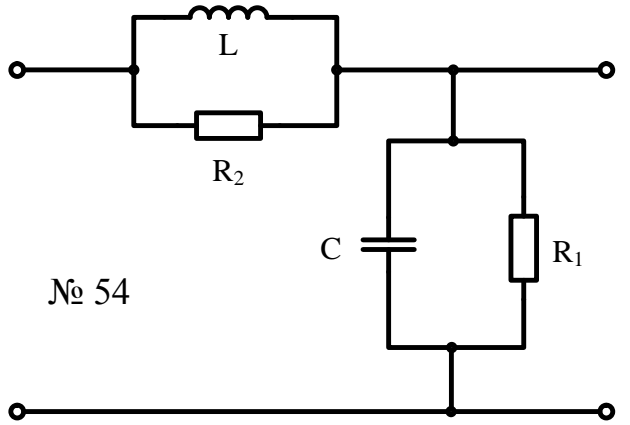
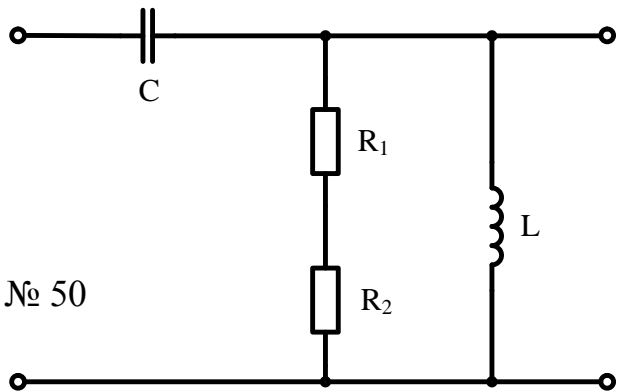
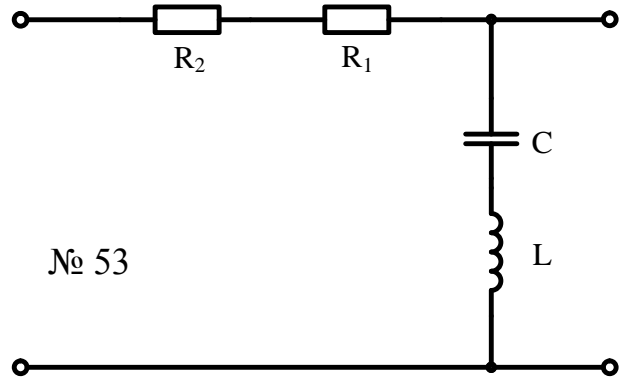
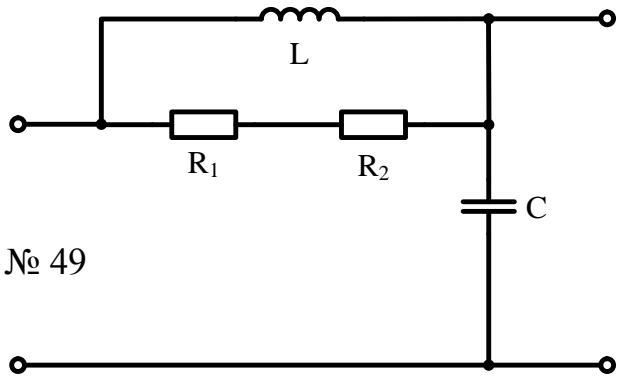


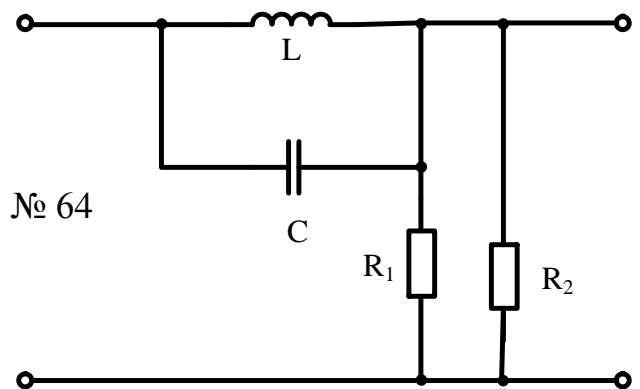
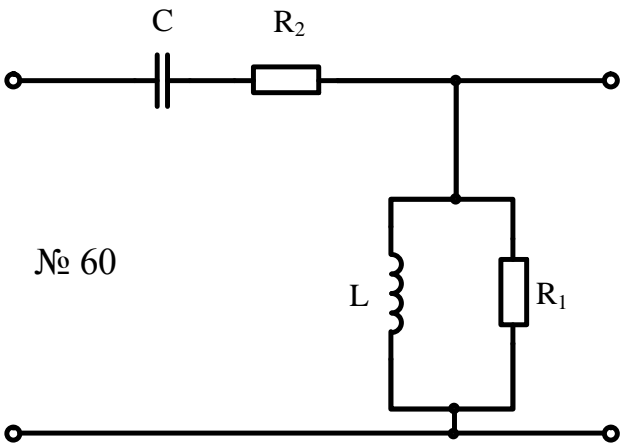
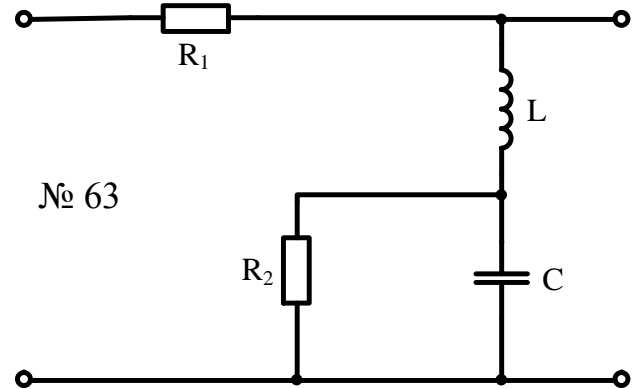
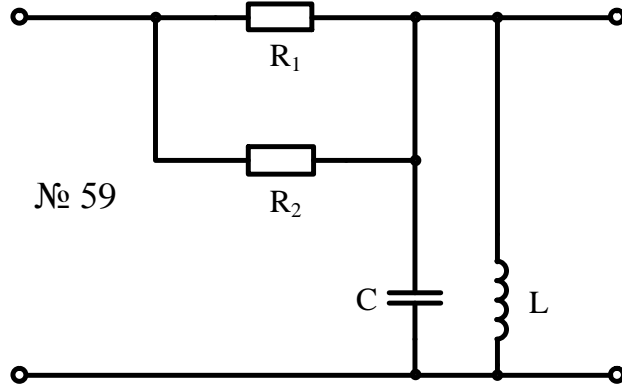
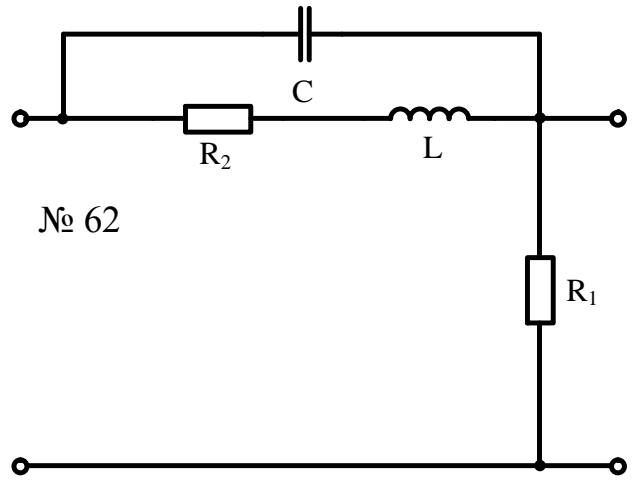
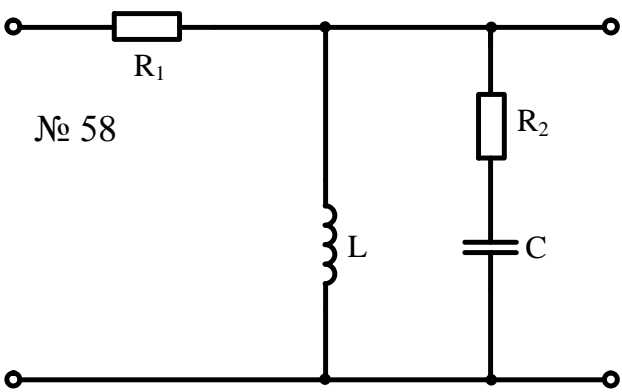
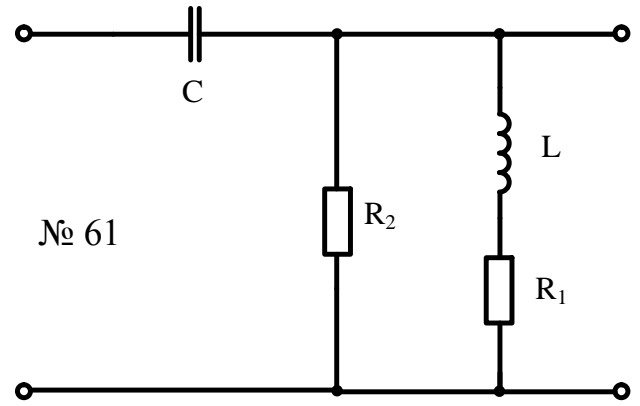
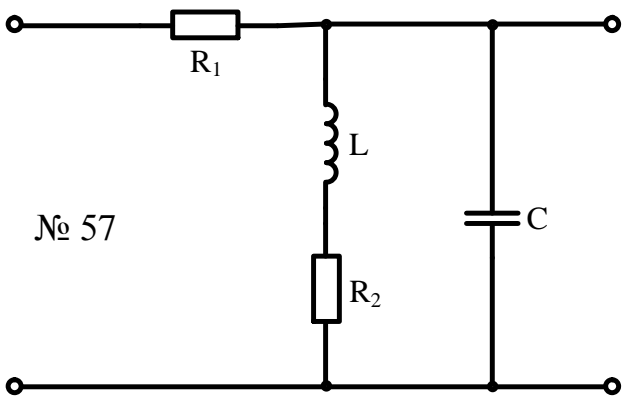


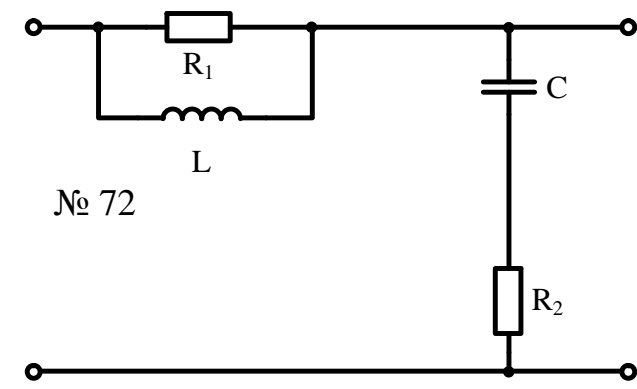
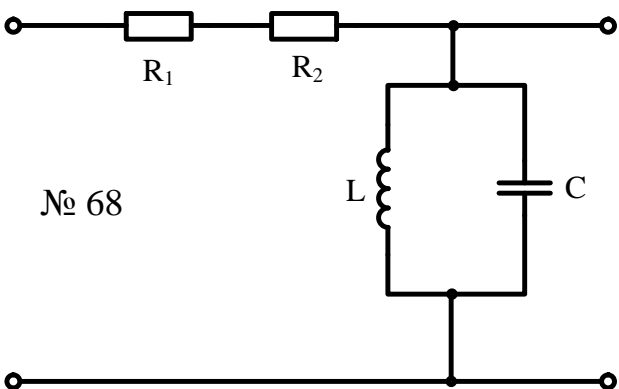
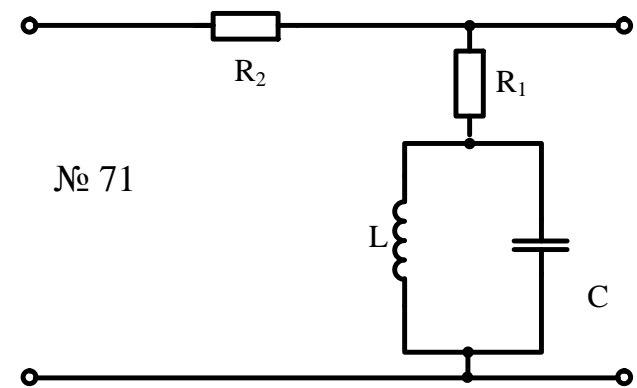
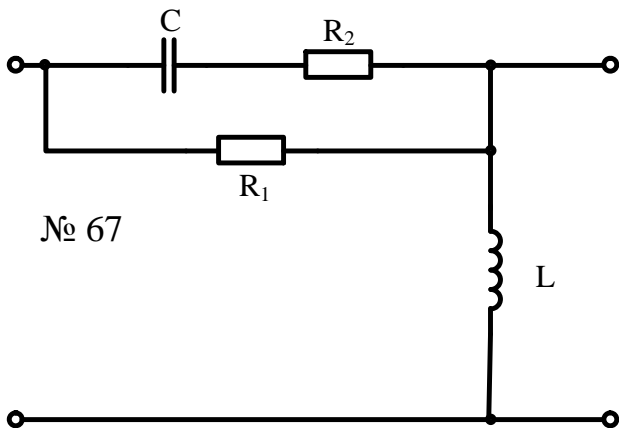
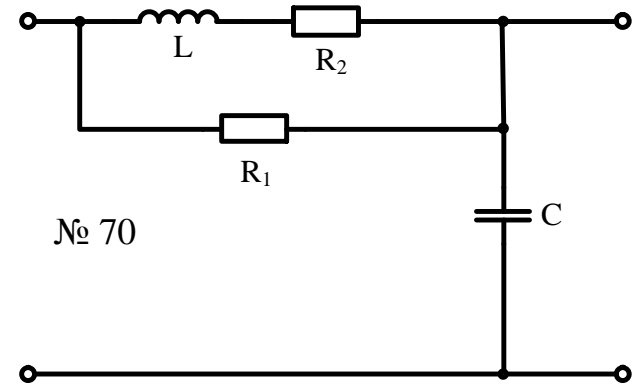
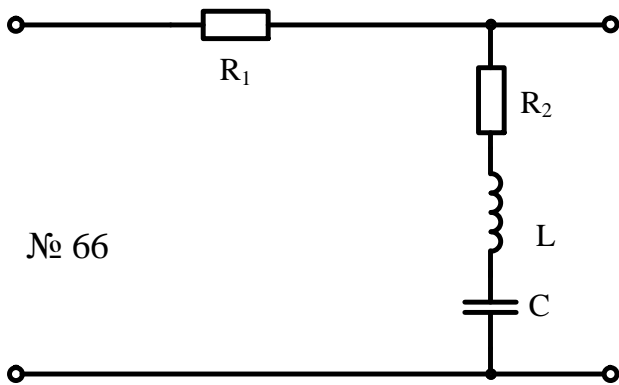
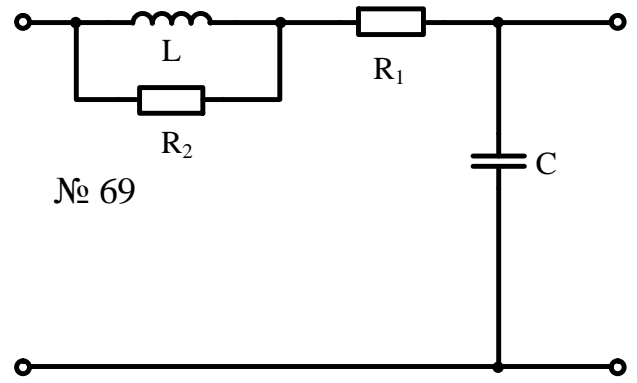
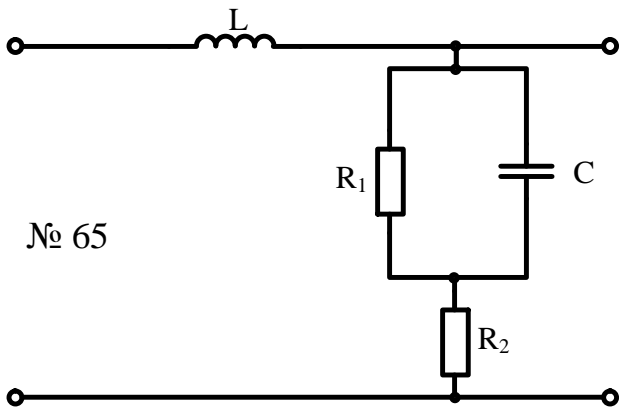


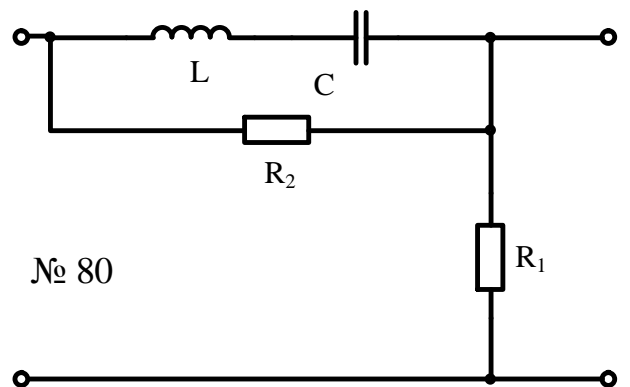
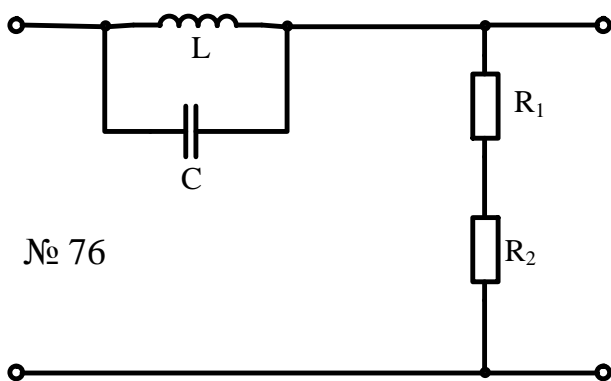
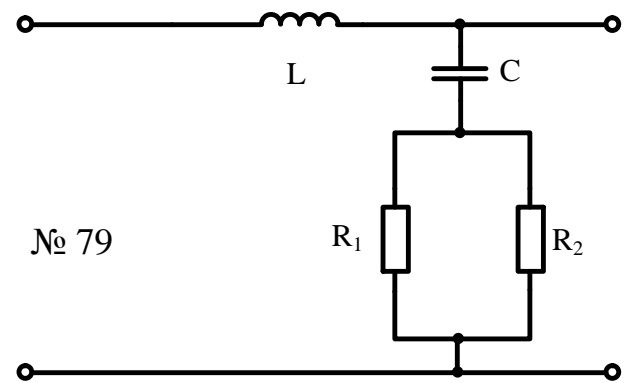
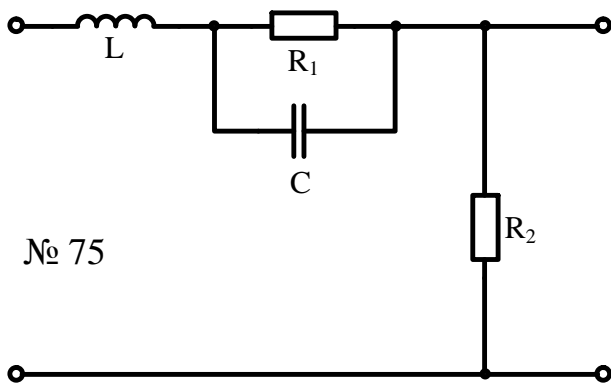
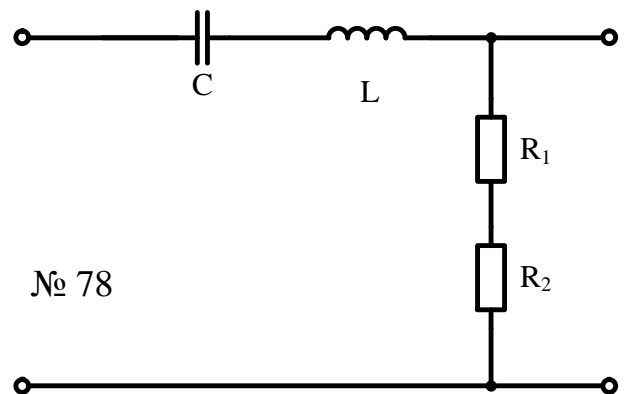
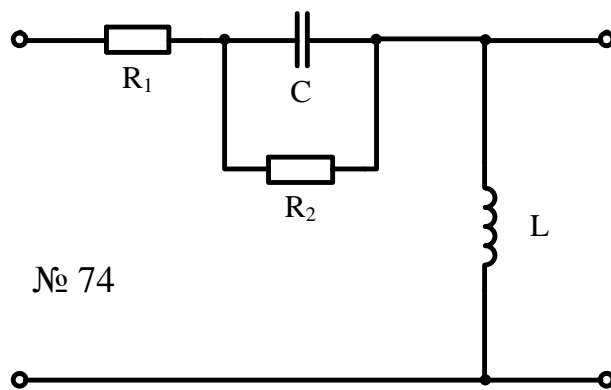
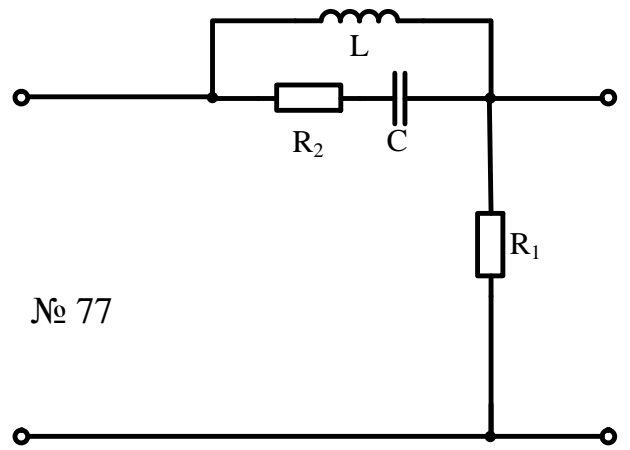
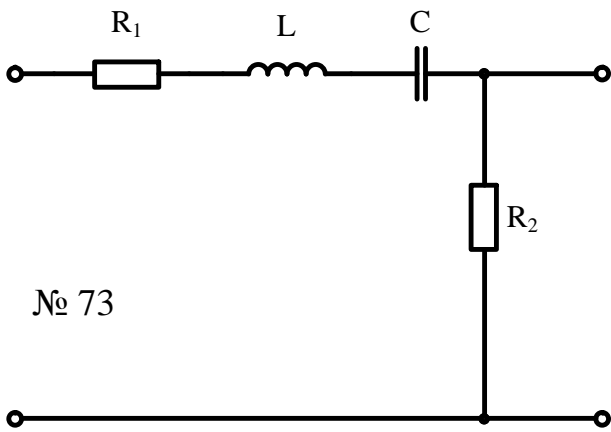


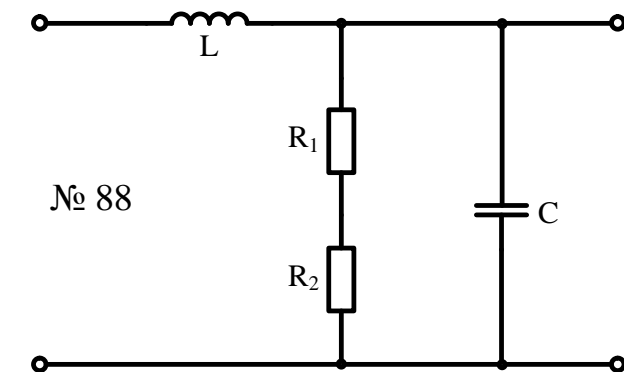
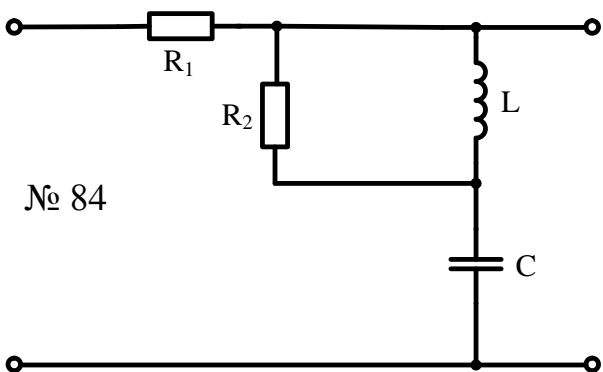
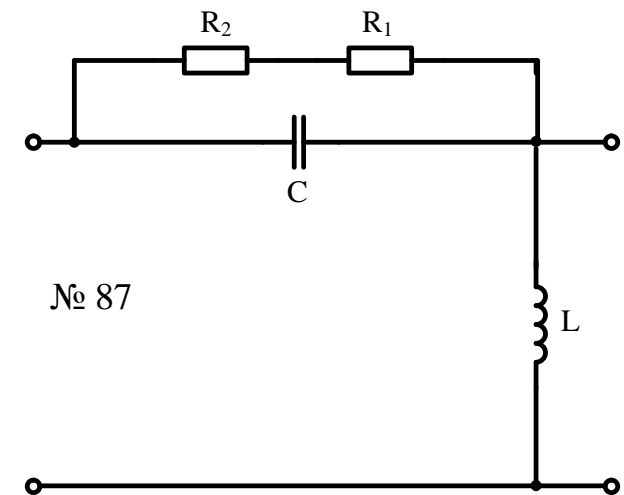
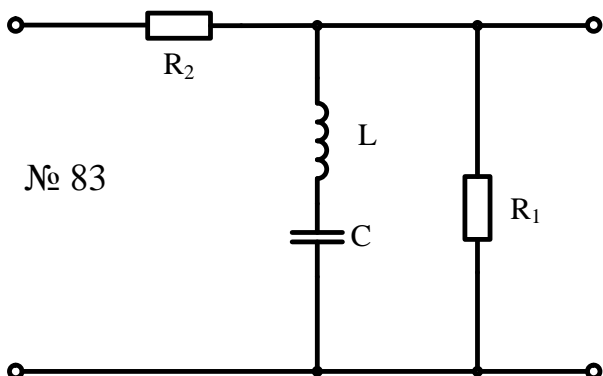
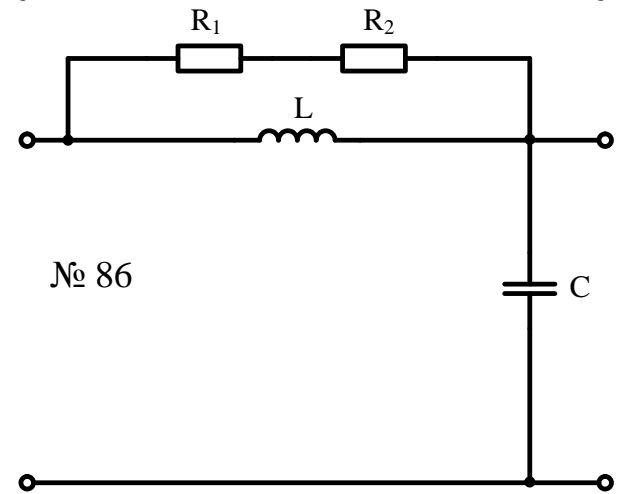
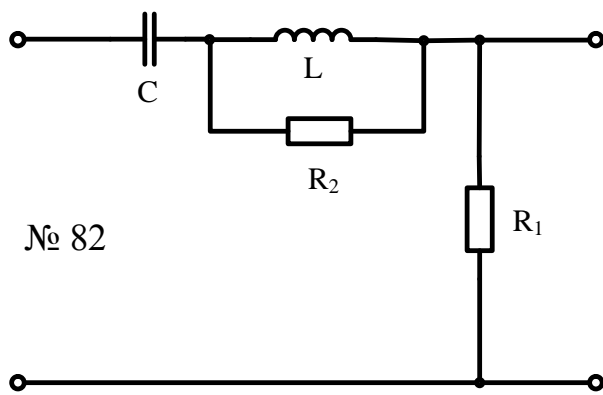
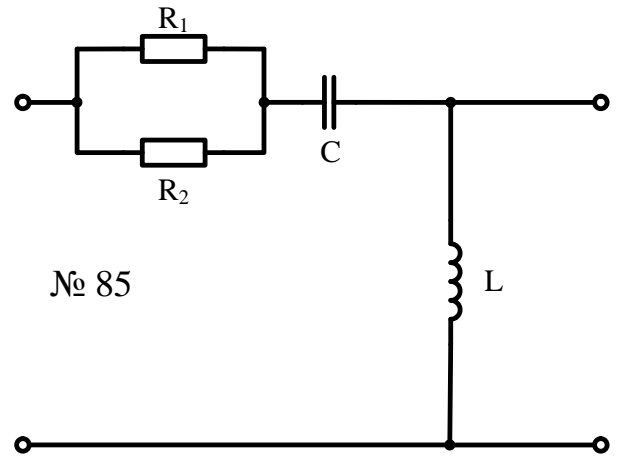
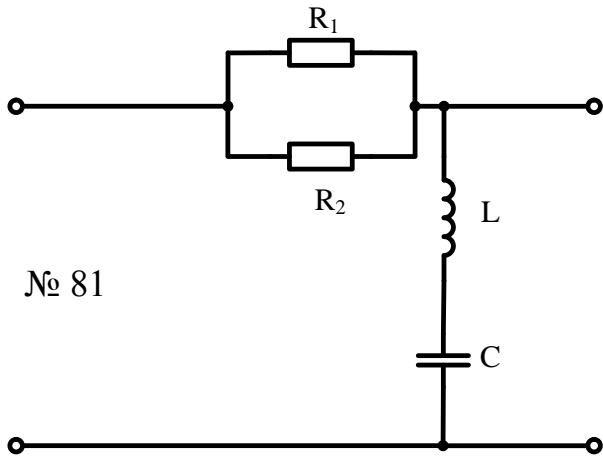


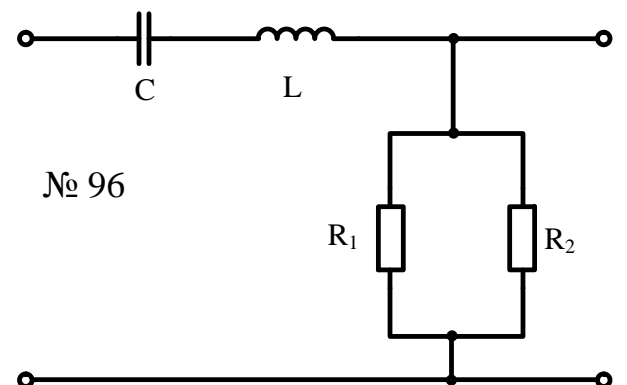
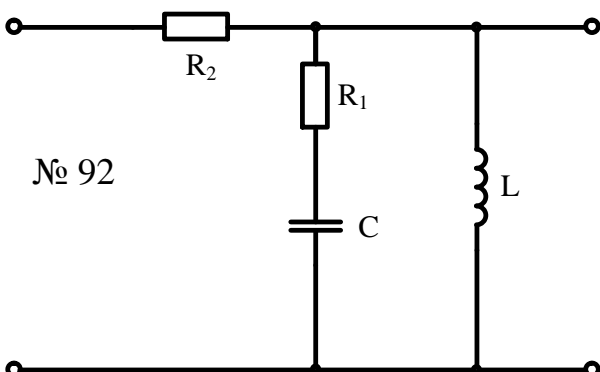
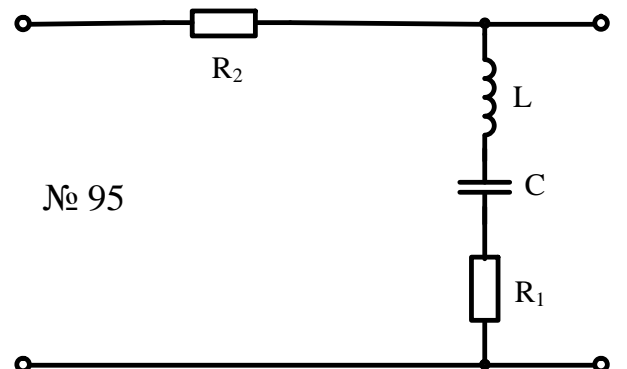
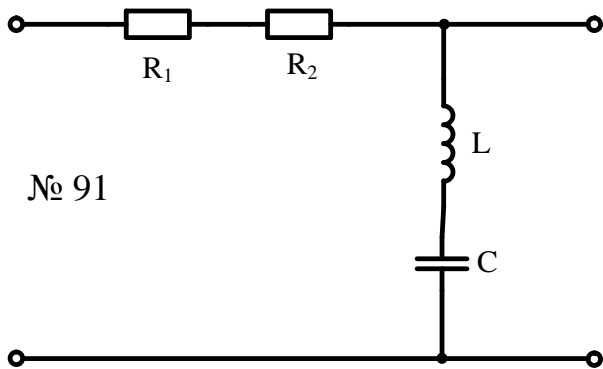
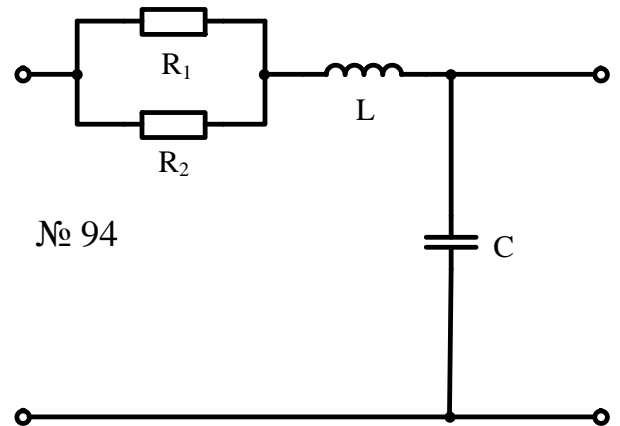
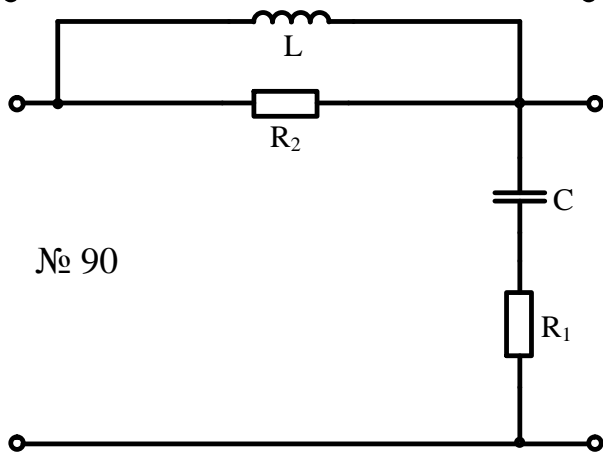
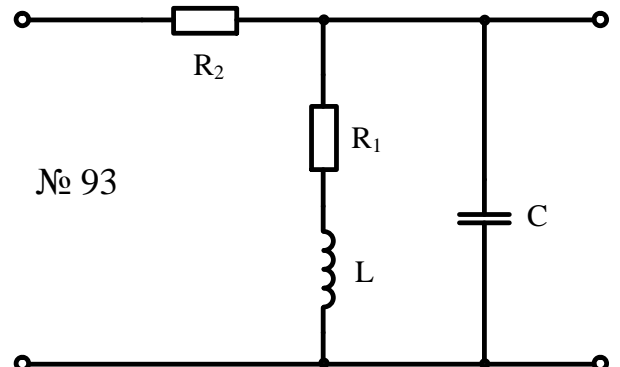
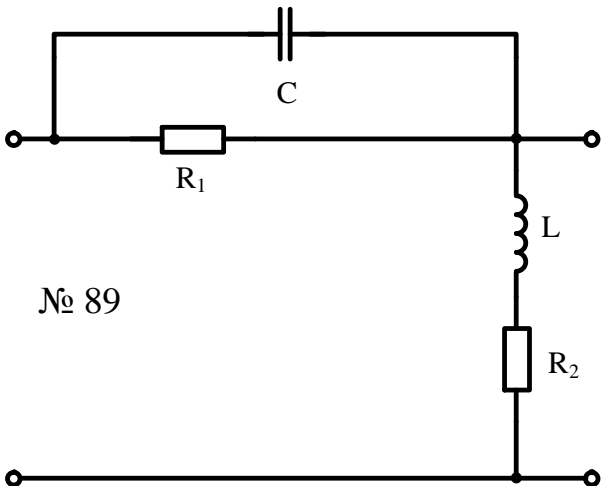


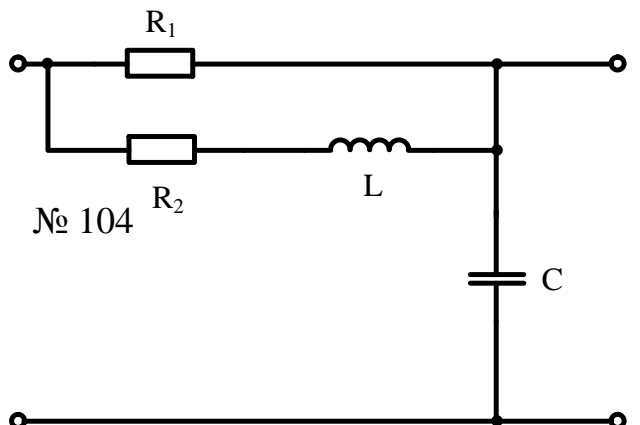
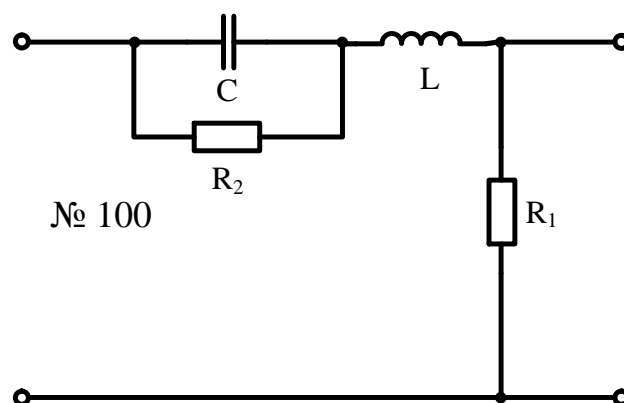
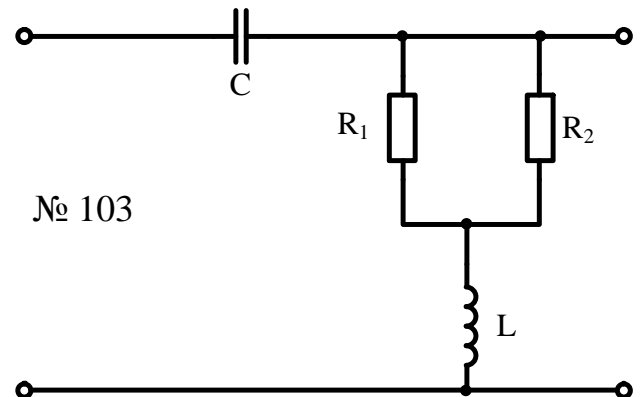
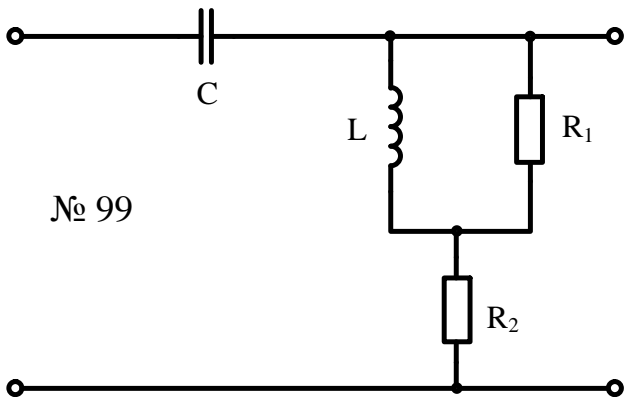
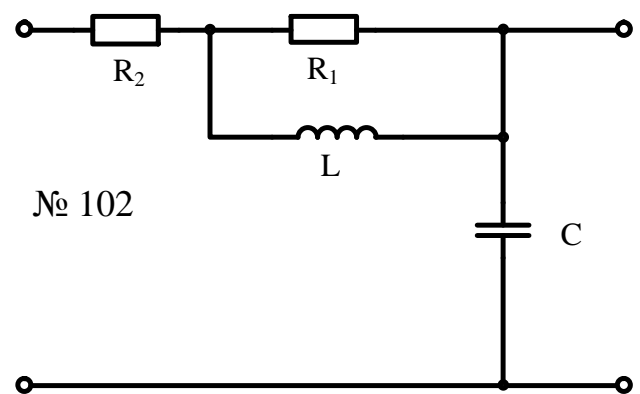
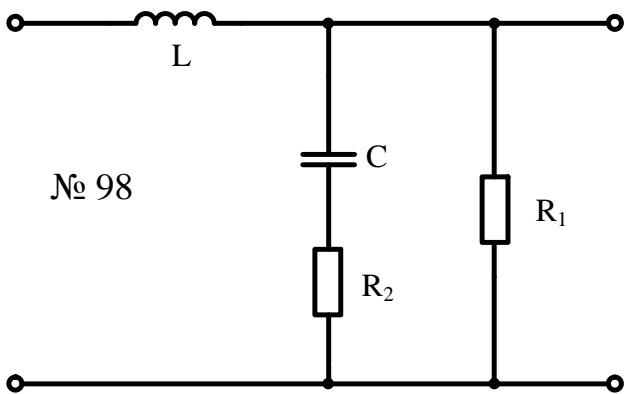
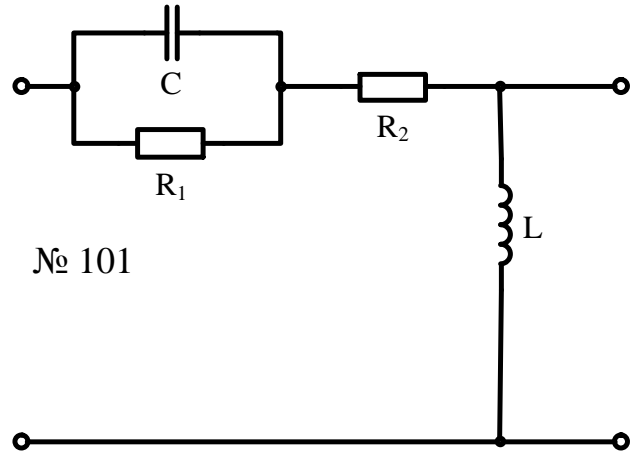
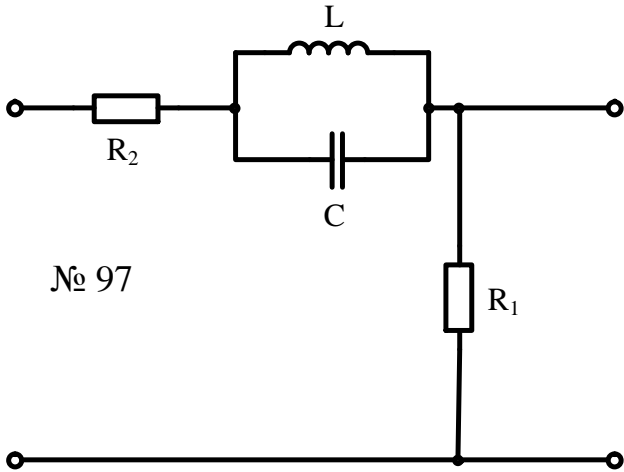


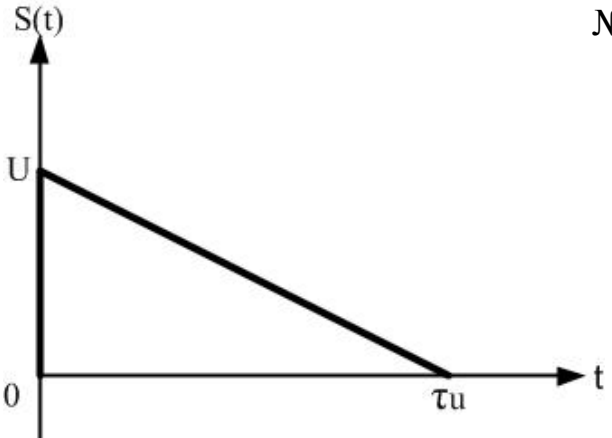
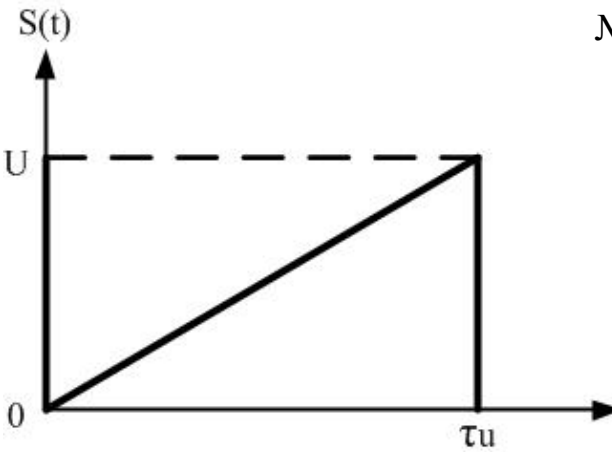
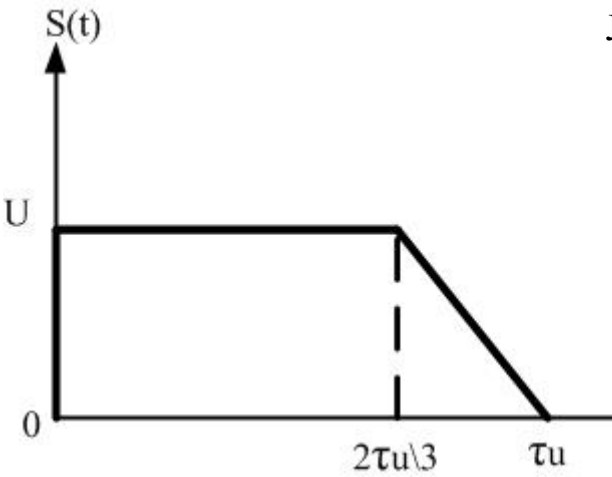
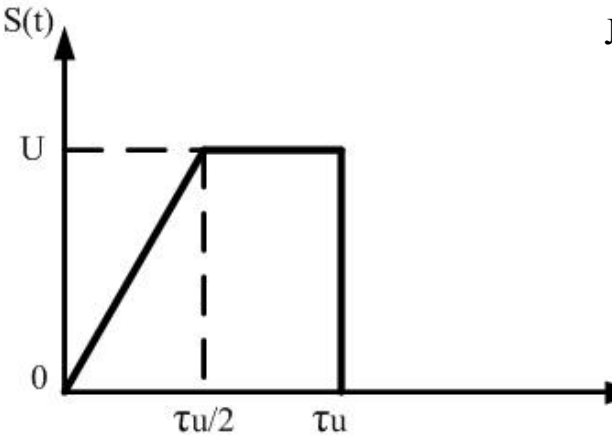




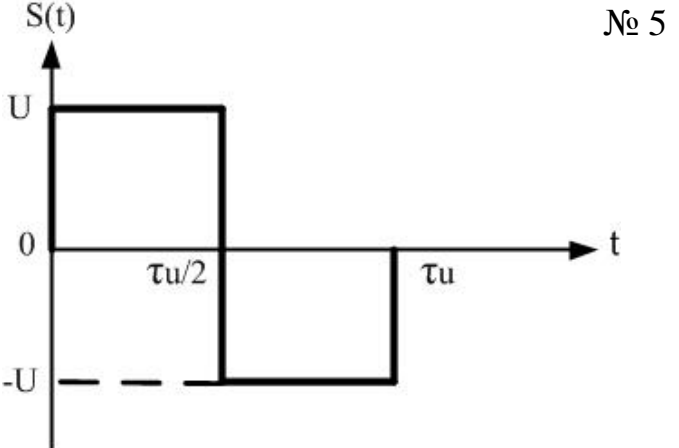
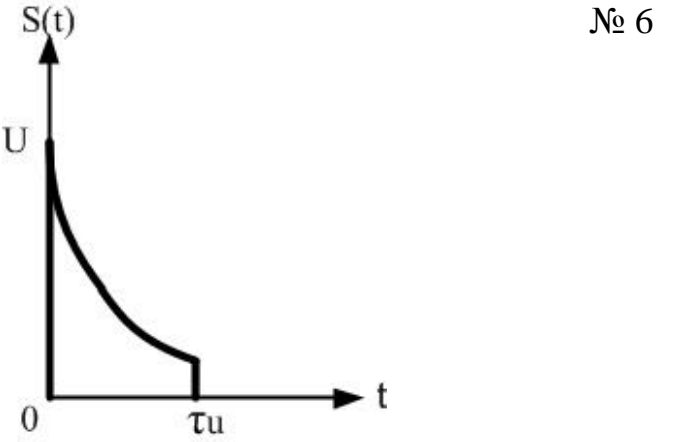
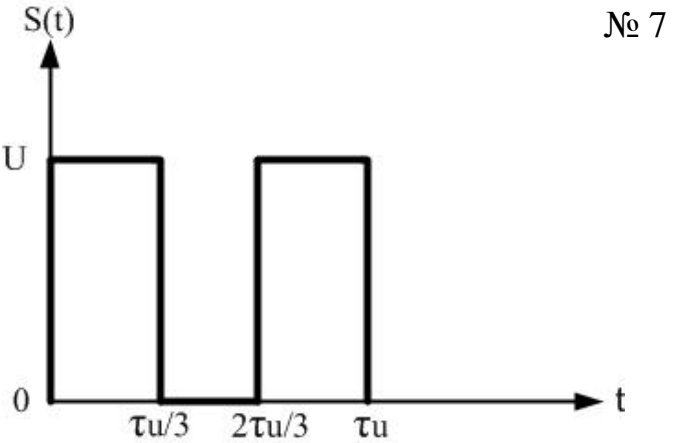
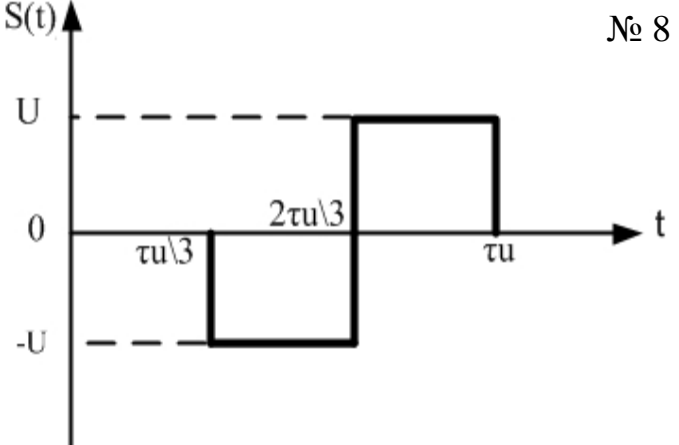


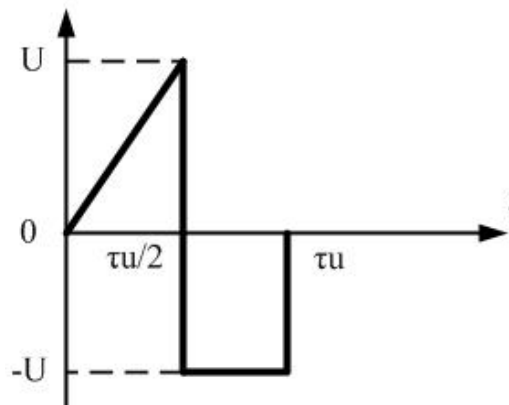
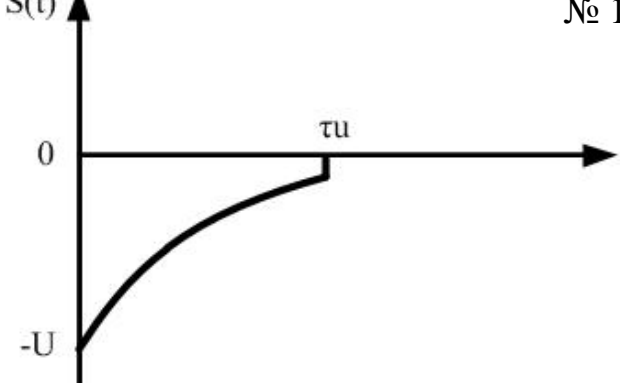
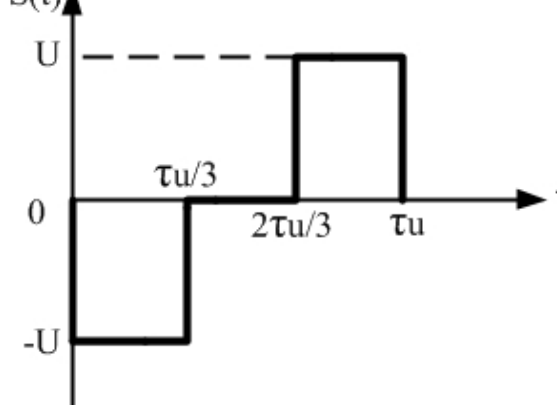
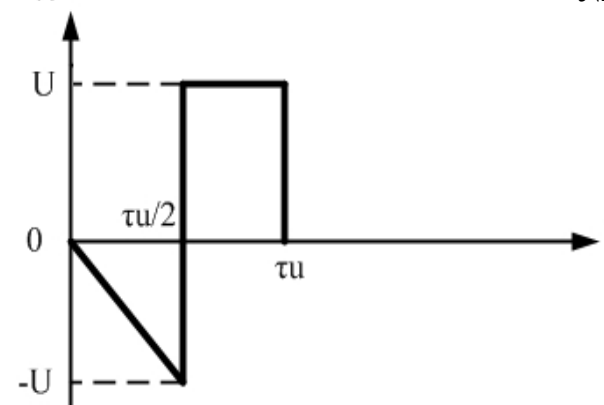


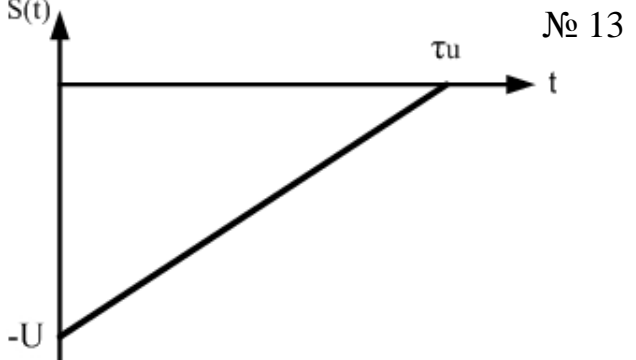
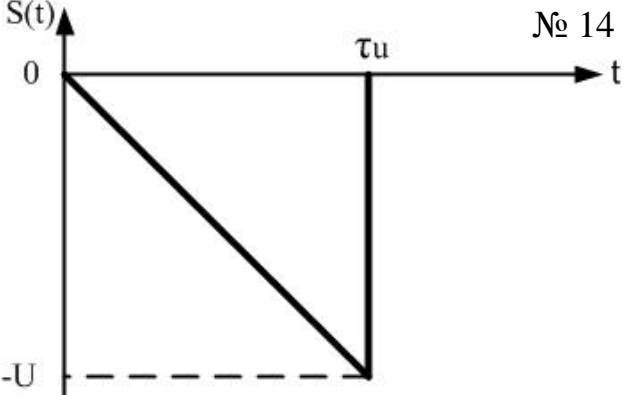
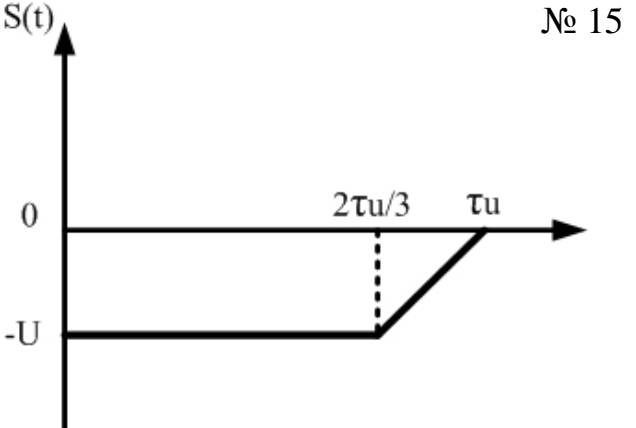
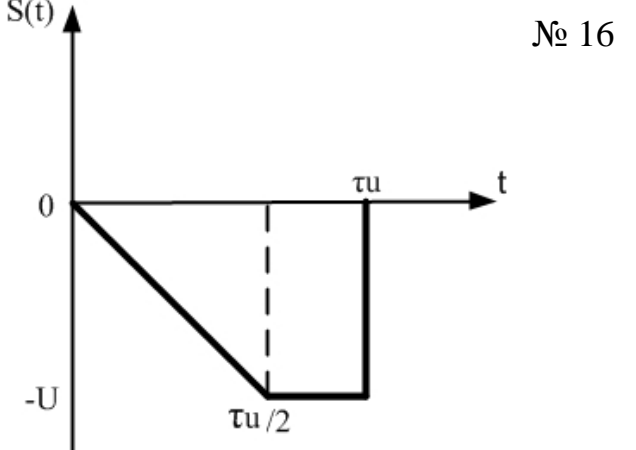


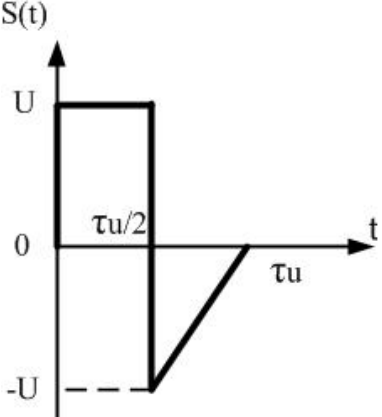
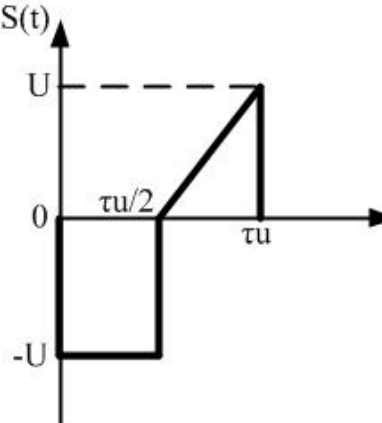
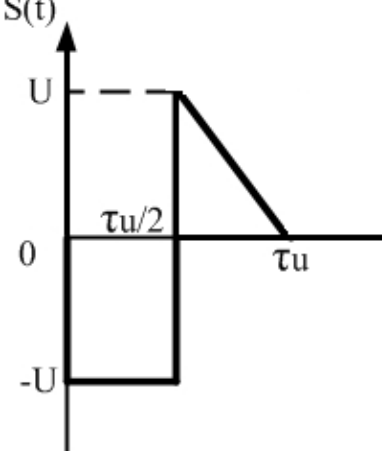
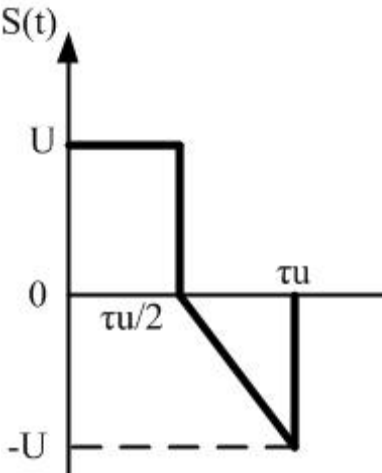
<p>№ 1</p> 	$S(t) = U \left(1 - \frac{t}{\tau_u}\right), \quad \text{если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p>№ 2</p> 	$S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p>№ 3</p> 	$S(t) = U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{2}{3}\tau_u$ $S(t) = 3U \left(1 - \frac{t}{\tau_u}\right), \quad \text{если } \frac{2}{3}\tau_u \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p>№ 4</p> 	$S(t) = \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$

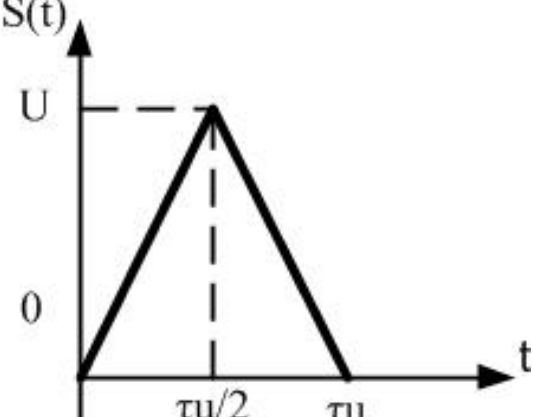
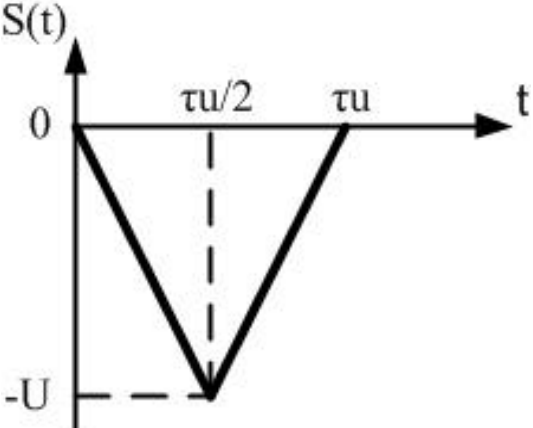
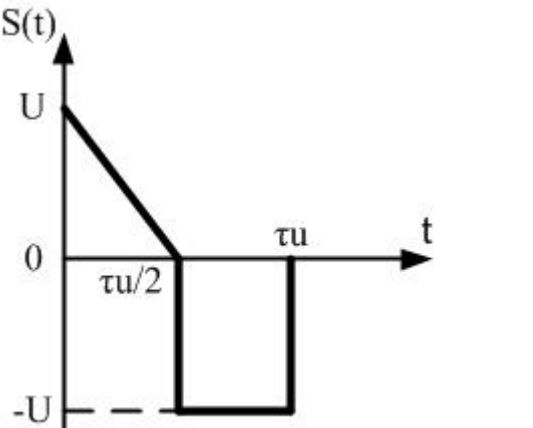
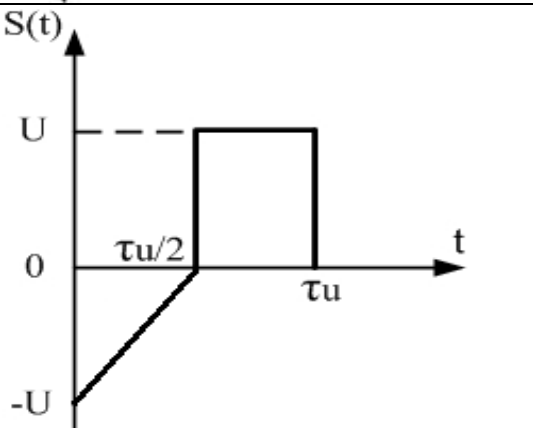


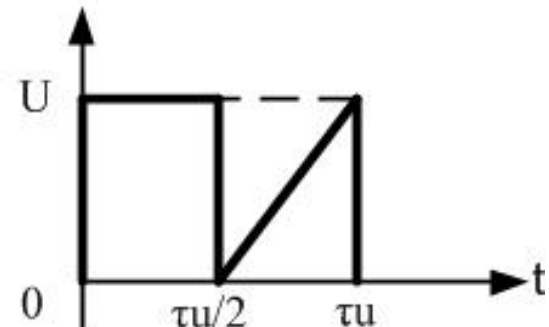
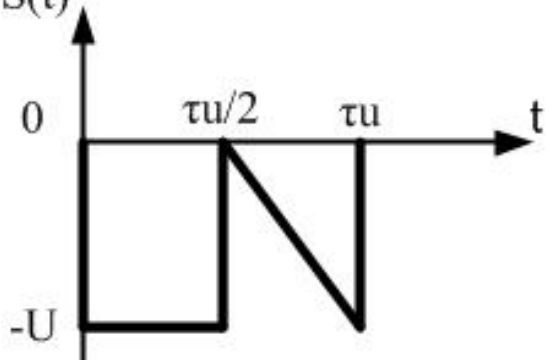
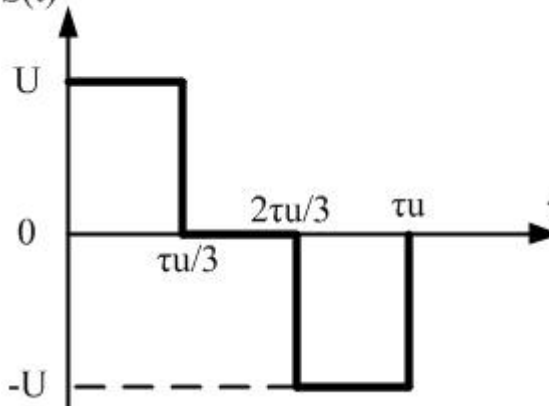
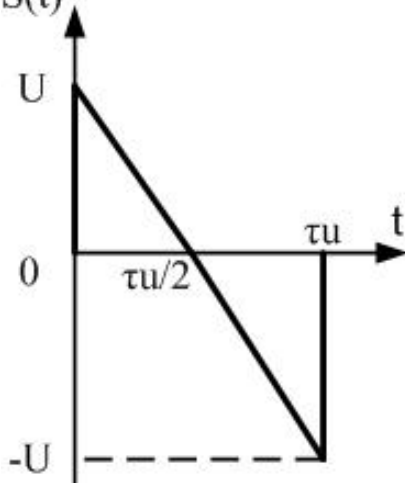
<p style="text-align: right;">№ 5</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 6</p> 	$S(t) = Ue^{-\alpha t} 1(t), \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 7</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{3}$ $S(t) = 0, \text{ если } \frac{\tau_u}{3} \leq t < \frac{2}{3}\tau_u$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{2}{3}\tau_u \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 8</p> 	$S(t) = 0, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{3}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{3} \leq t < \frac{2\tau_u}{3}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{2\tau_u}{3} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p style="text-align: right;">№ 9</p> 	$S(t) = \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 10</p> 	$S(t) = -Ue^{-\alpha t} 1(t), \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 11</p> 	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{3}$ $S(t) = 0, \text{ если } \frac{\tau_u}{3} \leq t < \frac{2}{3}\tau_u$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{2}{3}\tau_u \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 12</p> 	$S(t) = \frac{-2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p>№ 13</p> 	$S(t) = -U\left(1 - \frac{t}{\tau_u}\right), \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 14</p> 	$S(t) = \frac{-U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 15</p> 	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{2}{3}\tau_u$ $S(t) = -3U\left(1 - \frac{t}{\tau_u}\right), \text{ если } \frac{2}{3}\tau_u \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 16</p> 	$S(t) = \frac{-2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p>№ 17</p> 	$S(t) = U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -2U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p>№ 18</p> 	$S(t) = -U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p>№ 19</p> 	$S(t) = -U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = 2U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p>№ 20</p> 	$S(t) = U, \quad \text{если } 0 \leq t \leq \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$

<p>№ 21</p> 	$S(t) = \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = 2U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 22</p> 	$S(t) = -\frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -2U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 23</p> 	$S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 24</p> 	$S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p>№ 25</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 26</p> 	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 27</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{3}$ $S(t) = 0, \text{ если } \frac{\tau_u}{3} \leq t < \frac{2\tau_u}{3}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{2\tau_u}{3} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 28</p> 	$S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

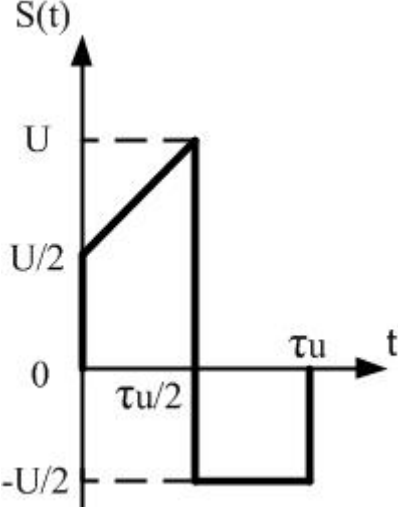
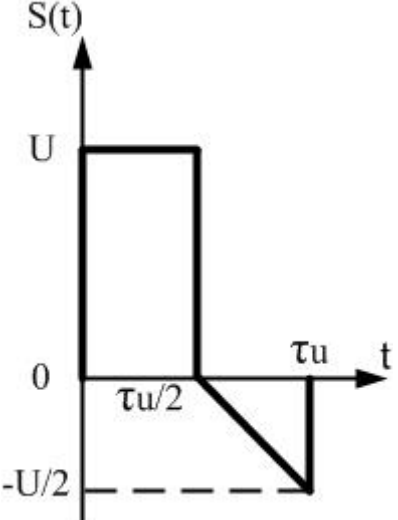
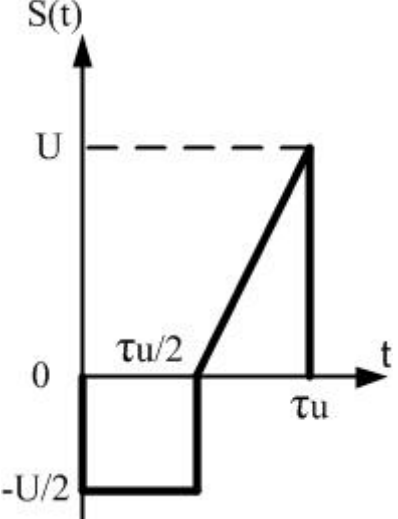
	№ 29	$S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
	№ 30	$S(t) = \frac{U}{2}, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = 2U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
	№ 31	$S(t) = U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{3U}{2} - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
	№ 32	$S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$

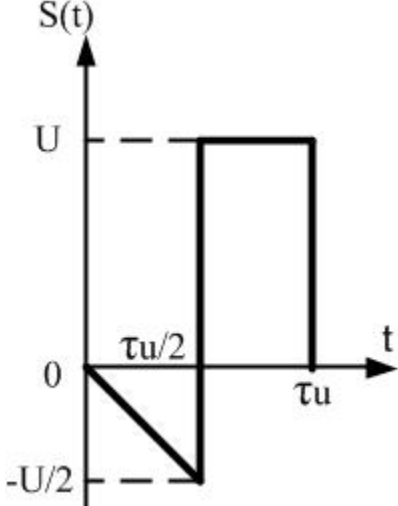
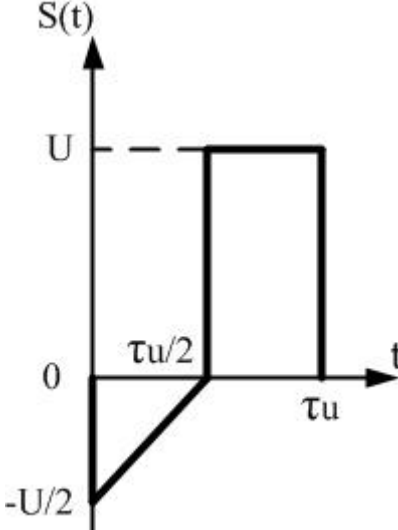
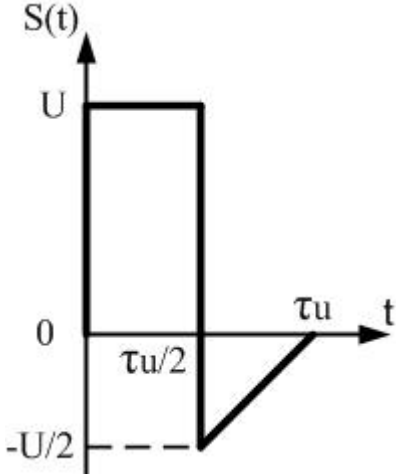
	№ 33	$S(t) = \frac{U}{2} - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 34	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 35	$S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -2U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 36	$S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

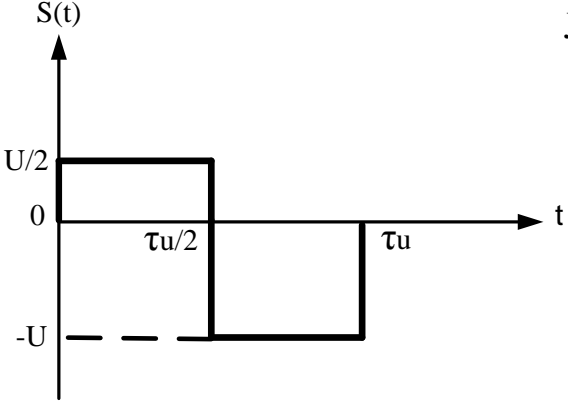
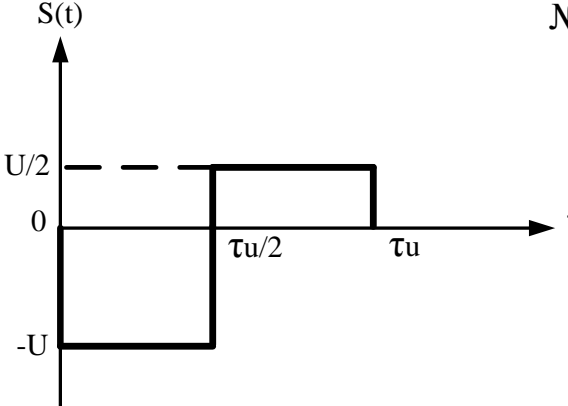
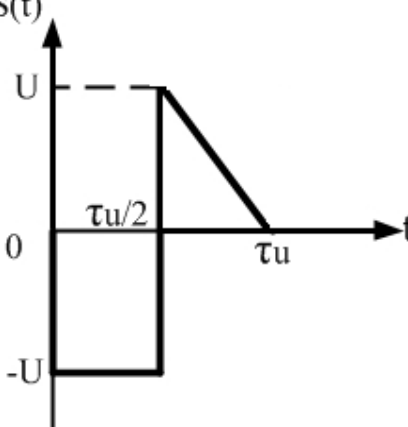
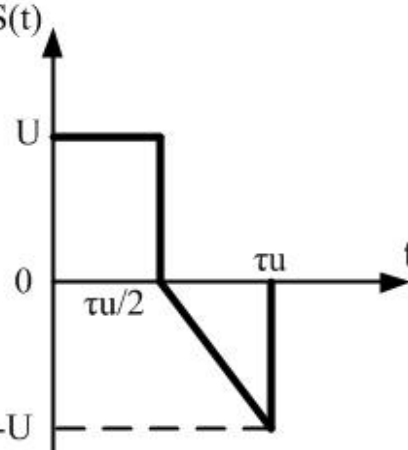


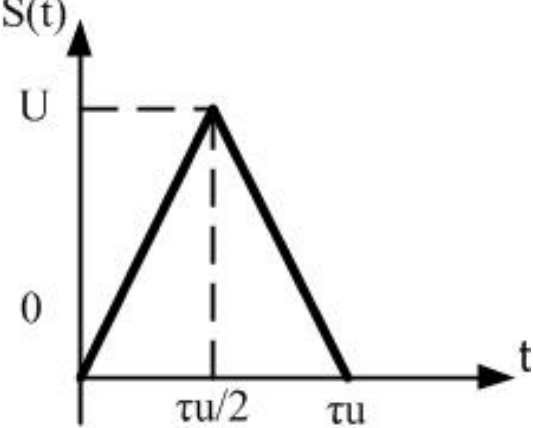
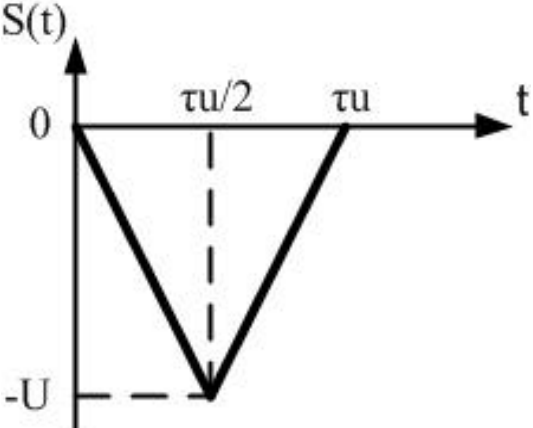
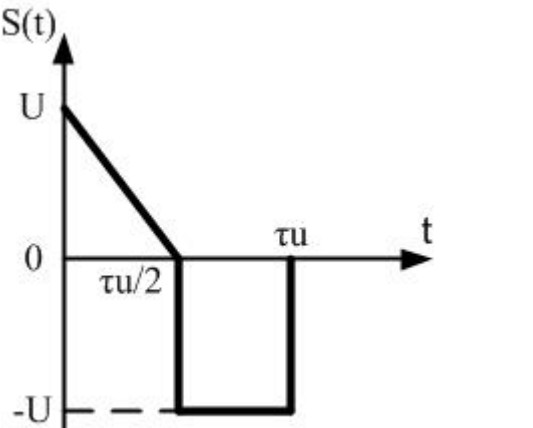
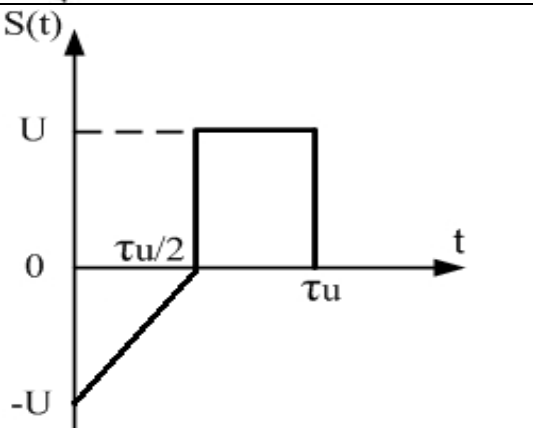
	№ 37	$S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 38	$S(t) = \frac{U}{2} - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 39	$S(t) = -\frac{U}{2}, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = 2U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 40	$S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -\frac{U}{2}, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

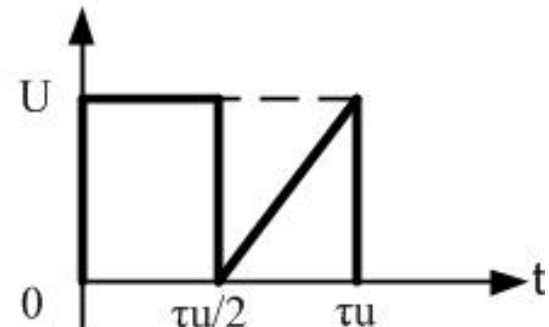
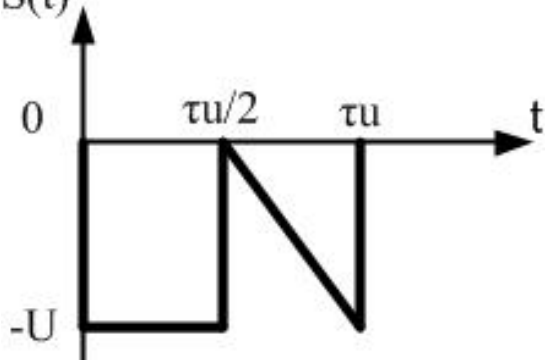
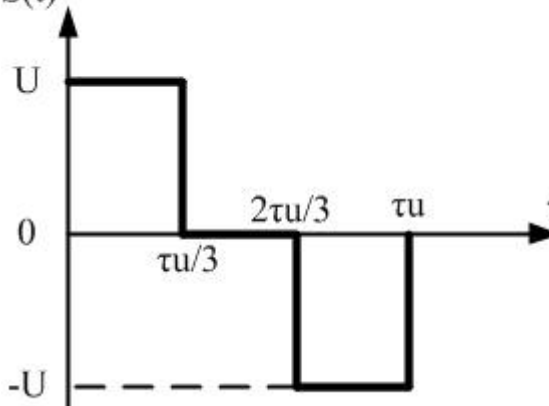
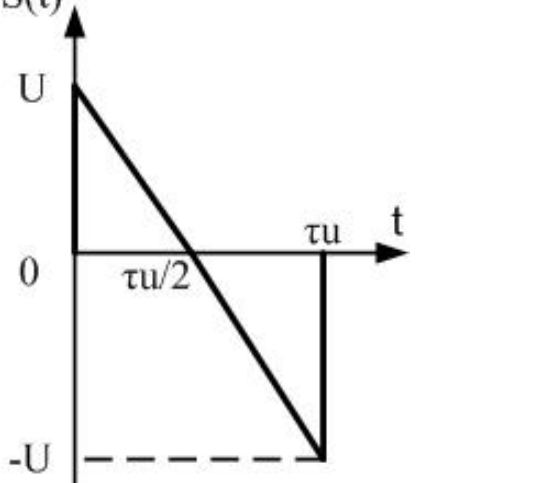
	№ 41	$S(t) = \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -\frac{U}{2}, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 42	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t - \frac{U}{2}, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 43	$S(t) = U - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 44	$S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p style="text-align: right;">№ 45</p> 	$S(t) = \frac{U}{2} + \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -\frac{U}{2}, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 46</p> 	$S(t) = U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{2} - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 47</p> 	$S(t) = -\frac{U}{2}, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$

	<p>№ 48</p> $S(t) = -\frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	<p>№ 49</p> $S(t) = -\frac{U}{2} + \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	<p>№ 50</p> $S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U + \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p style="text-align: right;">№ 51</p> 	$S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 52</p> 	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 53</p> 	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = 2U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 54</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t \leq \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p>№ 55</p> 	$S(t) = \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = 2U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 56</p> 	$S(t) = -\frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -2U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 57</p> 	$S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 58</p> 	$S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p>№ 59</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 60</p> 	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 61</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{3}$ $S(t) = 0, \text{ если } \frac{\tau_u}{3} \leq t < \frac{2\tau_u}{3}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{2\tau_u}{3} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 62</p> 	$S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

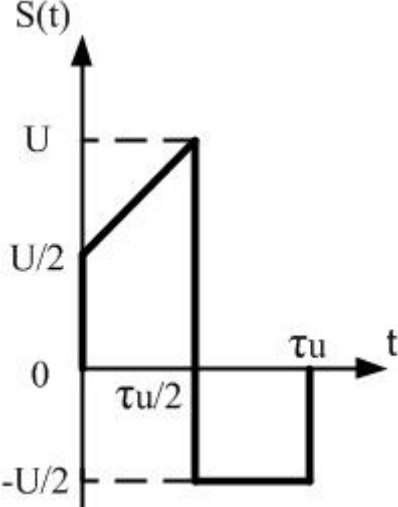
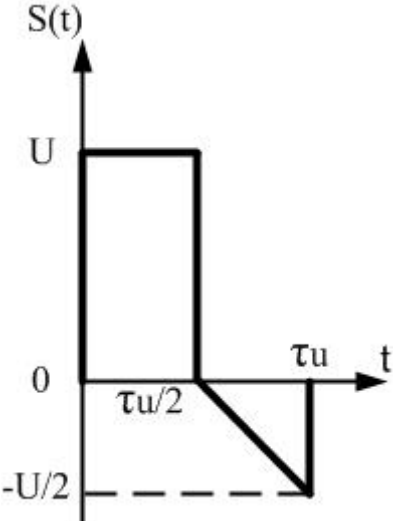
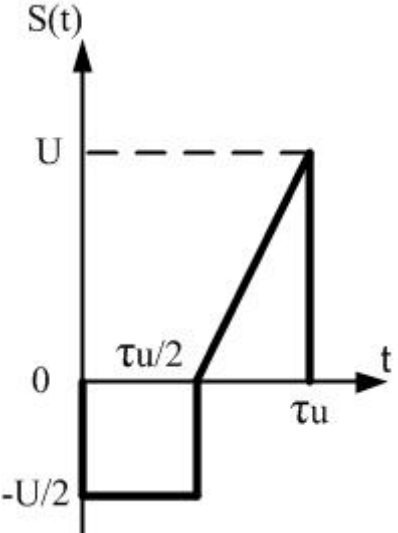
	№ 63	$S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
	№ 64	$S(t) = \frac{U}{2}, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = 2U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
	№ 65	$S(t) = U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{3U}{2} - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
	№ 66	$S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$



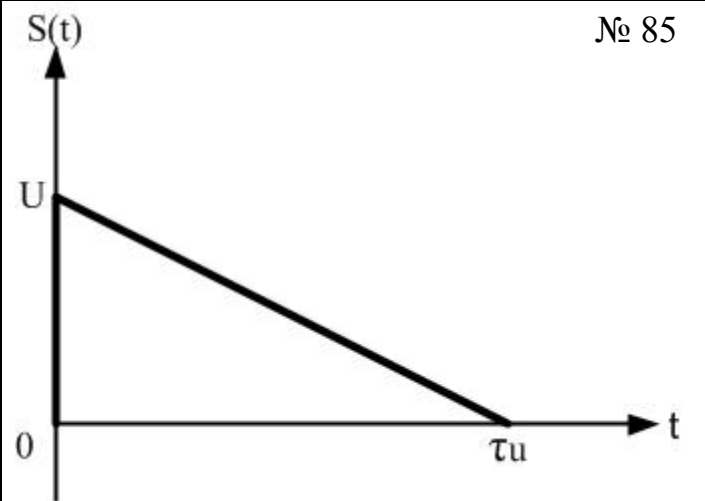
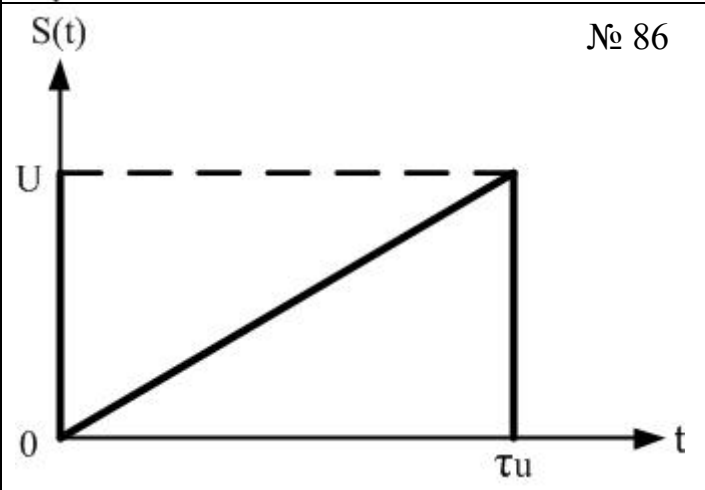
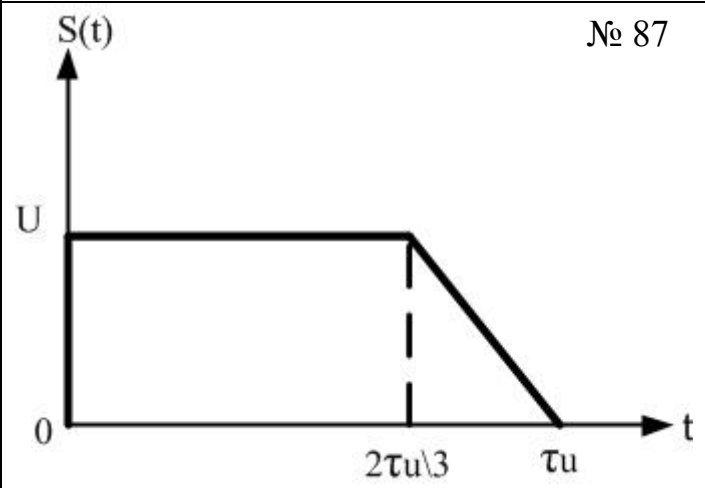
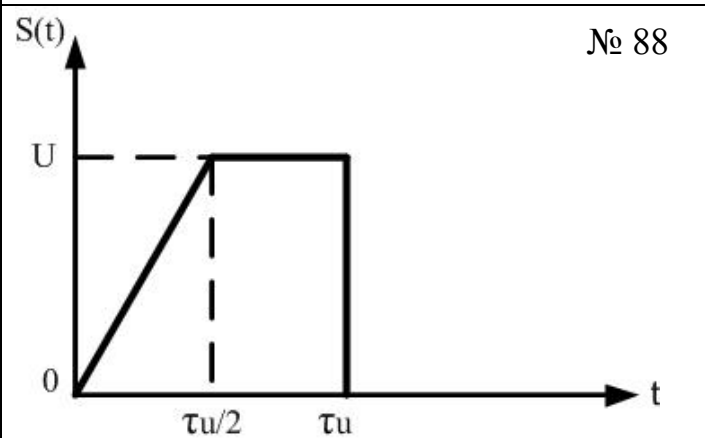
	№ 67	$S(t) = \frac{U}{2} - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 68	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 69	$S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -2U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 70	$S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

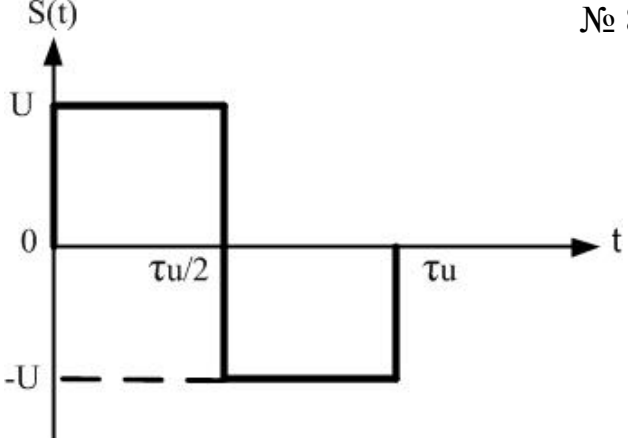
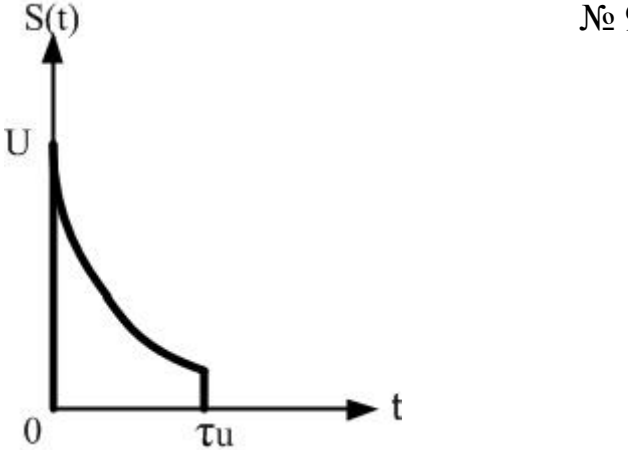
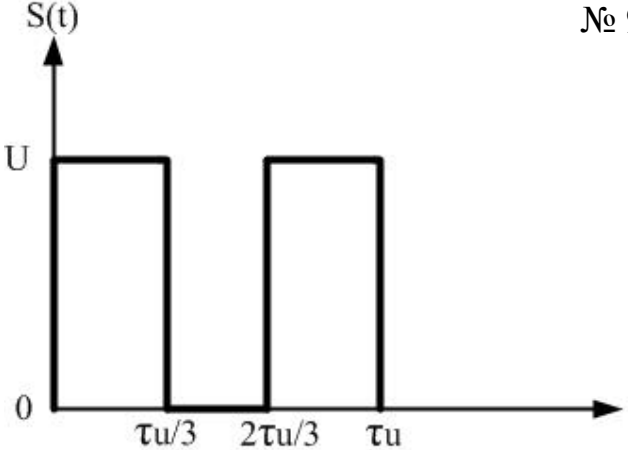
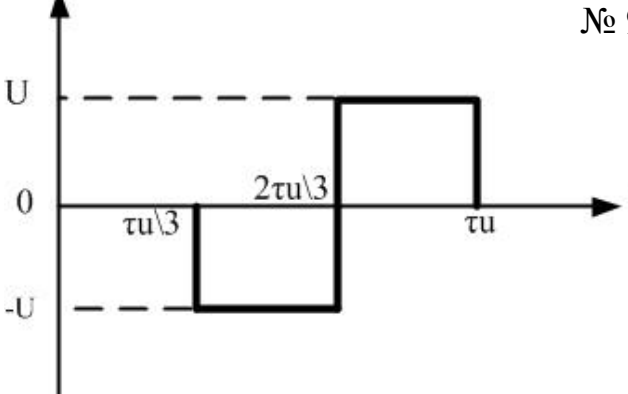
	№ 71	$S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 72	$S(t) = \frac{U}{2} - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 73	$S(t) = -\frac{U}{2}, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = 2U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 74	$S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -\frac{U}{2}, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

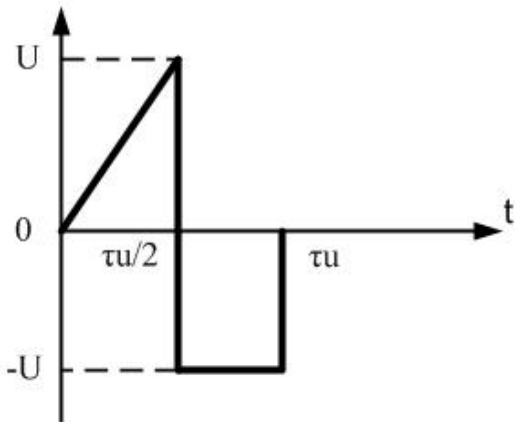
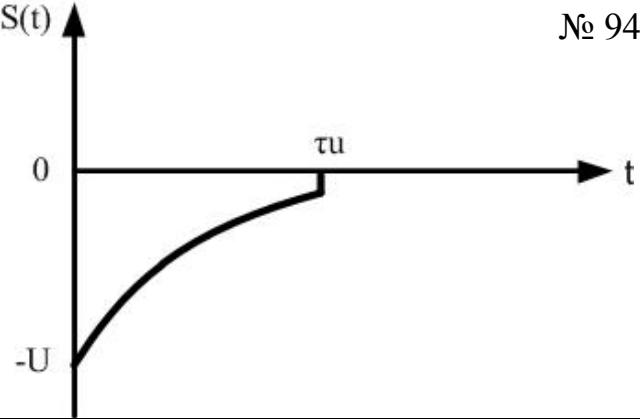
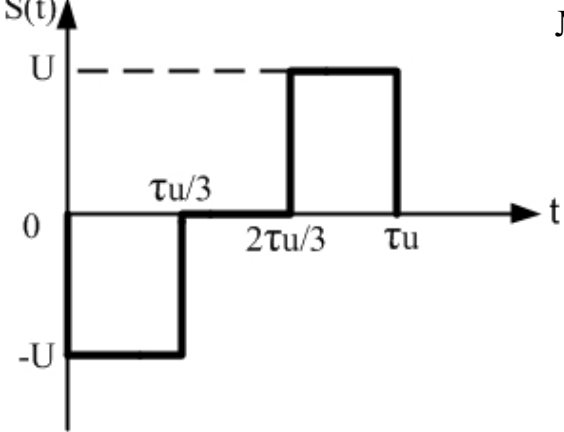
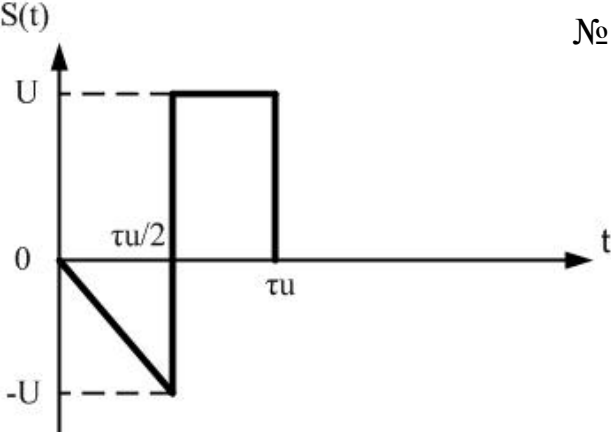
	№ 75	$S(t) = \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -\frac{U}{2}, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 76	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t - \frac{U}{2}, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 77	$S(t) = U - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	№ 78	$S(t) = \frac{U}{2}, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U - \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p style="text-align: right;">№ 79</p> 	$S(t) = \frac{U}{2} + \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -\frac{U}{2}, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 80</p> 	$S(t) = U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{2} - \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 81</p> 	$S(t) = -\frac{U}{2}, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$

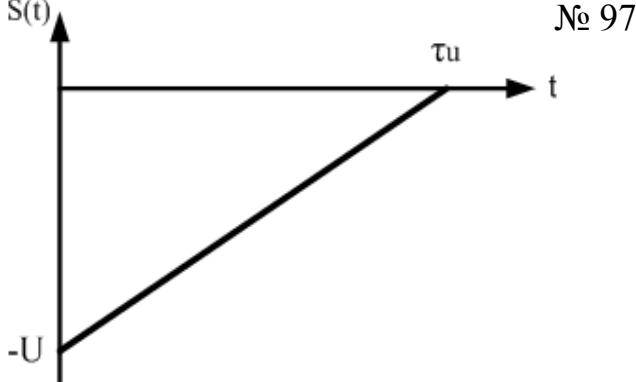
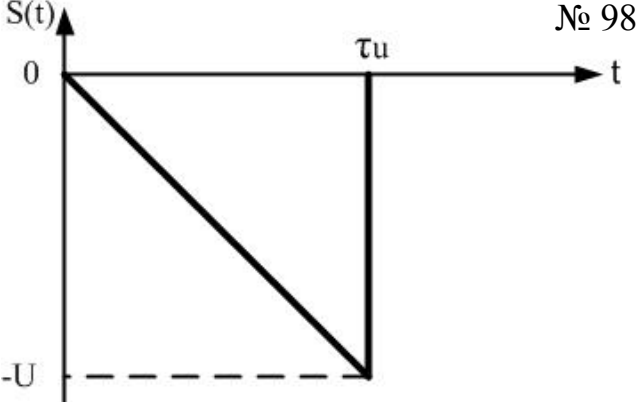
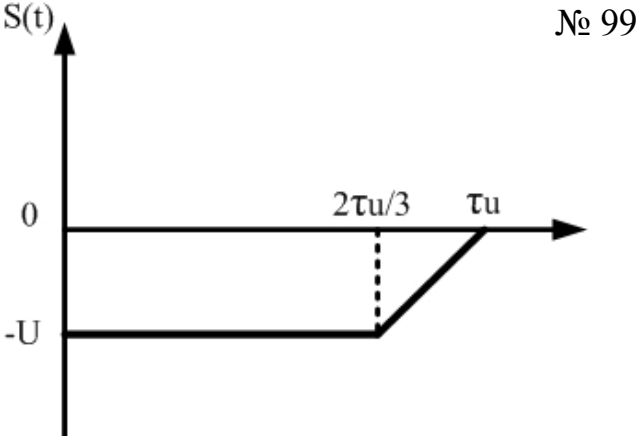
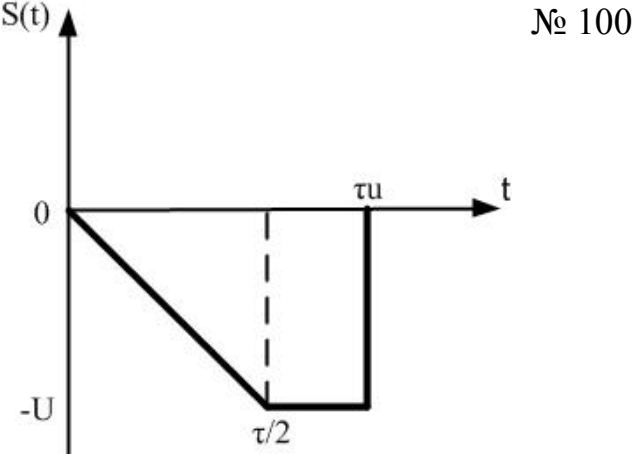
	<p>№ 82</p> $S(t) = -\frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	<p>№ 83</p> $S(t) = -\frac{U}{2} + \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
	<p>№ 84</p> $S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U + \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

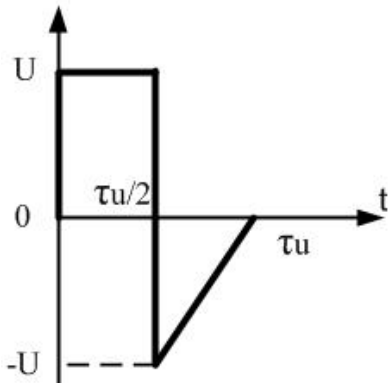
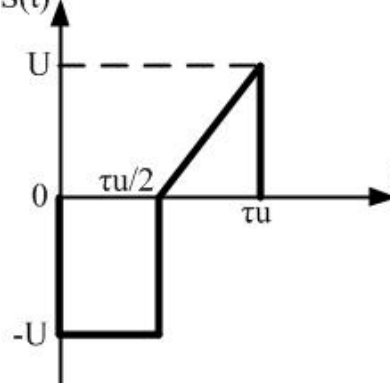
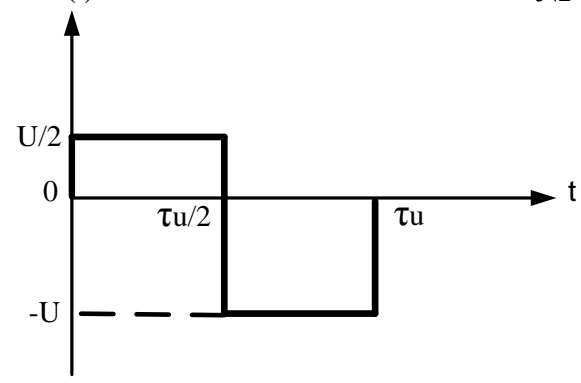
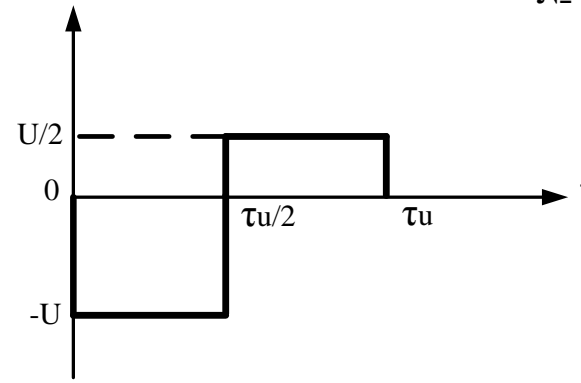
<p>№ 85</p> 	$S(t) = U\left(1 - \frac{t}{\tau_u}\right), \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 86</p> 	$S(t) = \frac{U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 87</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{2}{3}\tau_u$ $S(t) = 3U\left(1 - \frac{t}{\tau_u}\right), \text{ если } \frac{2}{3}\tau_u \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 88</p> 	$S(t) = \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p style="text-align: right;">№ 89</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 90</p> 	$S(t) = Ue^{-\alpha t} 1(t), \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 91</p> 	$S(t) = U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{3}$ $S(t) = 0, \text{ если } \frac{\tau_u}{3} \leq t < \frac{2}{3}\tau_u$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{2}{3}\tau_u \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 92</p> 	$S(t) = 0, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{3}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{3} \leq t < \frac{2\tau_u}{3}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{2\tau_u}{3} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p>№ 93</p> 	$S(t) = \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 94</p> 	$S(t) = -Ue^{-\alpha t} 1(t), \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 95</p> 	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{3}$ $S(t) = 0, \text{ если } \frac{\tau_u}{3} \leq t < \frac{2}{3}\tau_u$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{2}{3}\tau_u \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 96</p> 	$S(t) = -\frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$



<p>№ 97</p> 	$S(t) = -U\left(1 - \frac{t}{\tau_u}\right), \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 98</p> 	$S(t) = \frac{-U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 99</p> 	$S(t) = -U, \text{ если } 0 \leq t < \frac{2}{3}\tau_u$ $S(t) = -3U\left(1 - \frac{t}{\tau_u}\right), \text{ если } \frac{2}{3}\tau_u \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$
<p>№ 100</p> 	$S(t) = \frac{-2U}{\tau_u} \cdot t, \text{ если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \text{ если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \text{ если } t > \tau_u$

<p style="text-align: right;">№ 101</p> 	$S(t) = U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -2U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 102</p> 	$S(t) = -U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U + \frac{2U}{\tau_u} \cdot t, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 103</p> 	$S(t) = \frac{U}{2}, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = -U, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$
<p style="text-align: right;">№ 104</p> 	$S(t) = -U, \quad \text{если } 0 \leq t < \frac{\tau_u}{2}$ $S(t) = \frac{U}{2}, \quad \text{если } \frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \tau_u$ $S(t) = 0, \quad \text{если } t > \tau_u$

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ

### 1 Расчет переходной и импульсной характеристик

Переходной характеристикой цепи  $h(t)$  называется отклик цепи на воздействие единичного скачка  $1(t)$ .

Импульсной характеристикой цепи  $k(t)$  называется отклик цепи на воздействие единичного импульса  $1^\delta(t)$ . При выполнении расчетов  $1^\delta(t)$  задается ее математической моделью – дельта-функцией Дирака  $\delta(t)$ . Переходные  $h(t)$  и импульсные  $k(t)$  функции цепи связаны между собой следующими соотношениями:

$$h(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau;$$

$$k(t) = \begin{cases} h'(t) & \text{при } h(0) = 0 \\ h(0)\delta(t) + h'(t) & \text{при } h(0) \neq 0. \end{cases}$$

Расчет переходной и импульсной характеристики производится операторным методом. Для этого

- составляется операторная схема замещения цепи (рис.1).

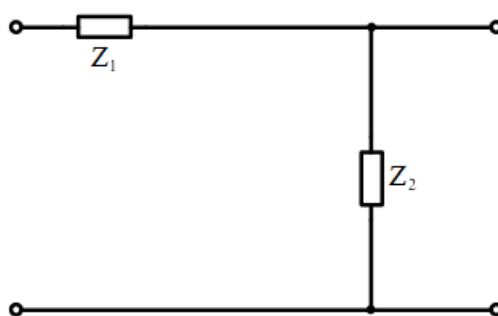


Рис. 1

Вычисляются операторные сопротивления  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$ .

- В операторной форме записывается входной сигнал. Так изображение единичного скачка  $1(t) \div \frac{1}{p}$ ; изображение дельта-функции  $\delta(t) \div 1$ .
- Находим операторный коэффициент передачи схемы:

$$K_u(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{Z_{\text{ВЫХ}}(p)}{Z_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}.$$

- Находим  $U_{\text{ВЫХ}}(p)$ :  $U_{\text{ВЫХ}}(p) = K_u(p) \cdot U_{\text{ВХ}}(p)$ .

В зависимости от значения входного сигнала  $U_{\text{ВЫХ}}(p)$  будет равен либо операторной переходной характеристике  $H(p)$ , либо операторной импульсной характеристике  $K_u(p)$ .  $H(p)$  называют также передаточной характеристикой цепи.

- Осуществляется переход во временную форму при помощи теоремы разложения:

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (1)$$

где  $p_k$  – корни характеристического уравнения,  
 $m$  – число корней характеристического уравнения.

Если  $H(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ , то  $F_2(p) = 0$  – характеристическое уравнение цепи.

Теорему разложения можно применять, если степень числителя  $F_1(p_k)$  меньше степени знаменателя  $F_2(p_k)$ . В противном случае необходимо выделить целую часть.

$$\text{Например, } K(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{CLR_1 p^2}{CL(R_1 + R_2)p^2 + R_1 R_2 Cp + R_2 C} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} +$$

$$+ \frac{-\frac{R_1^2 R_2 C}{R_1 + R_2} p - \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}}{CL(R_1 + R_2)p^2 + R_1 R_2 Cp + R_2 C}.$$

В данном случае переход во временную область осуществляется следующим образом:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} \div \frac{R_1}{R_1 + R_2} \delta(t); \quad \text{к выражению } \frac{-\frac{R_1^2 R_2 C}{R_1 + R_2} p - \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}}{CL(R_1 + R_2)p^2 + R_1 R_2 Cp + R_2 C} \quad \text{применяем}$$

теорему разложения.

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = k(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \delta(t) + \frac{-\frac{R_1^2 R_2 C}{R_1 + R_2} p_1 - \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}}{CL(R_1 + R_2)p_1^2 + R_1 R_2 Cp_1 + R_2 C} e^{p_1 t} +$$

$$+ \frac{-\frac{R_1^2 R_2 C}{R_1 + R_2} p_2 - \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}}{CL(R_1 + R_2)p_2^2 + R_1 R_2 Cp_2 + R_2 C} e^{p_2 t}.$$

Если один из корней равен нулю, то необходимо воспользоваться следующей формой теоремы разложения:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2)$$

По значениям корней характеристического уравнения необходимо сделать вывод о характере переходного процесса:

– если корни действительные отрицательные, то переходной процесс будет иметь затухающий аperiodический характер;

– если корни комплексно-сопряженные, то переходной процесс будет иметь колебательный характер, скорость затухания которого обратно-пропорциональна модулю действительной части корня.

По значению корней  $p_k$  определим постоянные времени  $\tau_{\text{ц}}$  цепи.

$$\text{Если } p_k = a_k + jb_k, \text{ то } \tau_{\text{ц}} = \frac{1}{|a_k|}.$$

Затухание переходного процесса в цепи будет определяться наибольшим значением  $\tau_{\text{ц}}$ .

Графики  $h(t)$  и  $k(t)$  необходимо построить в интервале  $t = [0; 3\tau_{\text{ц}}]$ .

### Пример

Рассчитать переходную характеристику  $h(t)$  для цепи, изображенной на рис. 2.

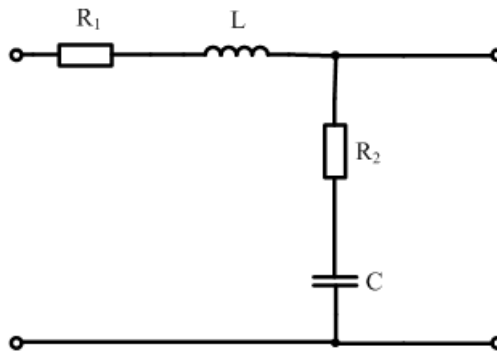


Рис. 2

- Найдем операторное сопротивление ветвей схемы замещения (рис. 1)

$$Z_1(p) = R_1 + Lp;$$

$$Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{pC} = \frac{R_2 pC + 1}{pC}.$$

- Входной сигнал для определения переходной характеристики:

$$U_{\text{вх}}(t) = 1(t).$$

Его изображение по Лапласу:  $U_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p}$ .

- Операторный коэффициент передачи:

$$K_u(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{\frac{R_2 p C + 1}{p C}}{\frac{R_2 p C + 1}{p C} + R_1 + L p} = \frac{R_2 p C + 1}{L C p^2 + p C (R_1 + R_2) + 1}.$$

- Находим  $U_{\text{вых}}(p) = H(p)$

$$H(p) = K_u(p) \cdot U_{\text{вх}}(p) = \frac{R_2 p C + 1}{p(L C p^2 + p C (R_1 + R_2) + 1)}.$$

- Перейдем во временную область с помощью теоремы разложения (2).  
Характеристическое уравнение цепи

$$p(L C p^2 + p C (R_1 + R_2) + 1) = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \frac{-(R_1 + R_2)C \pm \sqrt{(R_1 + R_2)^2 C^2 - 4LC}}{2LC}; \quad p_3 = 0;$$

$$F_1(p) = R_2 p C + 1; \quad F_3'(p) = 2LCp + C(R_1 + R_2).$$

Таким образом, переходная характеристика будет иметь вид:

$$h(t) = \frac{F_1(0)}{F_3'(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)} e^{p_2 t}.$$

Если корни  $p_1$  и  $p_2$  являются комплексно-сопряженными, то переходной процесс носит колебательный характер.

Обозначим  $p_1 = -a + jb$ ,  $p_2 = -a - jb$ .

$\frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)}$  и  $\frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)}$  также будут комплексно-сопряженными величинами, представим их в показательной форме:

$$\frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} = A e^{j\varphi}; \quad \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)} = A e^{-j\varphi}.$$

В рассматриваемом примере  $\frac{F_1(0)}{F_3(0)} = 1$ , поэтому

$$\begin{aligned} h(t) &= 1 + A e^{j\varphi} e^{(-a+jb)t} + A e^{-j\varphi} e^{(-a-jb)t} = \\ &= 1 + A e^{-at} (e^{j(bt+\varphi)} + e^{-j(bt+\varphi)}) = 1 + A e^{-at} 2 \cos(bt + \varphi). \end{aligned}$$

Если корни характеристического уравнения принимают действительные значения, т.е.  $p_1 = -\alpha_1$ ,  $p_2 = -\alpha_2$ ,  $p_3 = 0$ , то переходная характеристика будет иметь вид:

$$h(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)} e^{-\alpha_2 t}.$$

Для рассматриваемого примера:

$$\begin{aligned} h(t) &= 1 + \frac{R_2 p_1 C + 1}{p_1 (2LCp_1 + C(R_1 + R_2))} e^{p_1 t} + \frac{R_2 p_2 C + 1}{p_2 (2LCp_2 + C(R_1 + R_2))} e^{p_2 t} \\ h(t) &= 1 + A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \end{aligned}$$

где  $A_1 = \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)}$ ;  $A_2 = \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)}$ .

Возьмем данные одного из вариантов:  $R_1 = 1,2$  кОм,  $R_2 = 9$  кОм,  $L = 3$  мГн,  $C = 2$  мкФ.

Корни характеристического уравнения равны  $p_1 = -49,02$  с<sup>-1</sup>,  $p_2 = -3,4 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. Так как корни действительные и отрицательные, то характер переходного процесса аperiodический затухающий. Переходная характеристика имеет вид

$$h(t) = 1 - 0,9118 e^{-49,02t} - 0,08824 e^{-3,4 \cdot 10^6 t}, \text{ В.}$$

Определим постоянные времени цепи:

$$\tau_{ц1} = \frac{1}{|\alpha_1|} = \frac{1}{49,02} = 0,02 \text{ с}, \quad \tau_{ц2} = \frac{1}{|\alpha_2|} = \frac{1}{3,4 \cdot 10^6} = 0,2941 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Очевидно, что время окончания переходного процесса будет определяться величиной  $3\tau_{ц1} = 0,06$  с. Построим график переходной характеристики  $h(t)$ .

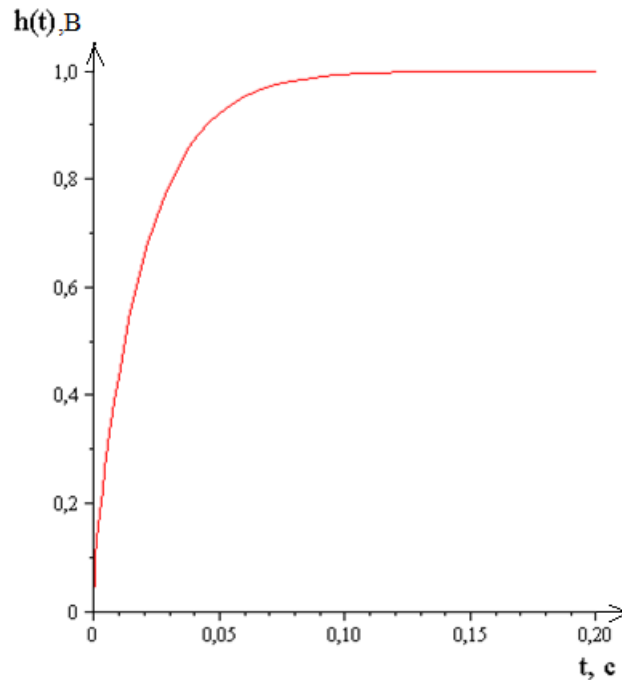


Рис. 3. График переходной характеристики

Найдем импульсную характеристику  $k(t)$ .

Операторный коэффициент передачи уже найден:

$$K_u(p) = \frac{R_2 p C + 1}{LCp^2 + pC(R_1 + R_2) + 1}.$$

Перейдем во временную область при помощи теоремы разложения (1). Корни характеристического уравнения  $p_1$  и  $p_2$  имеют те же значения, что и для переходной характеристики.

$$F_1(p) = R_2 p C + 1; \quad F_2'(p) = 2LCp + C(R_1 + R_2).$$

Тогда формула импульсной характеристики имеет вид:

$$k(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{R_2 p_1 C + 1}{2LCp_1 + C(R_1 + R_2)} e^{p_1 t} + \frac{R_2 p_2 C + 1}{2LCp_2 + C(R_1 + R_2)} e^{p_2 t}.$$

Проверим правильность вычисления переходной и импульсной характеристики, используя связь:

$$k(t) = h(0)\delta(t) + h'(t),$$

где  $\delta(t)$  – дельта функция Дирака.

В рассматриваемом примере  $h(0) = 0$ , поэтому



$$k(t) = h'(t) = \frac{(R_2 p_1 C + 1)p_1}{p_1(2LCp_1 + C(R_1 + R_2))} e^{p_1 t} + \frac{(R_2 p_2 C + 1)p_2}{p_2(2LCp_2 + C(R_1 + R_2))} e^{p_2 t}.$$

Произведя сокращения, получим

$$k(t) = \frac{R_2 p_1 C + 1}{2LCp_1 + C(R_1 + R_2)} e^{p_1 t} + \frac{R_2 p_2 C + 1}{2LCp_2 + C(R_1 + R_2)} e^{p_2 t}.$$

Выражение для  $k(t)$  совпадает с выражением, полученным ранее.

Подставив численные значения номиналов элементов схемы, получим

$$k(t) = 44,7e^{-49,02t} + 3 \cdot 10^5 e^{-3,4 \cdot 10^6 t}, \text{ В.}$$

Построим график импульсной характеристики.

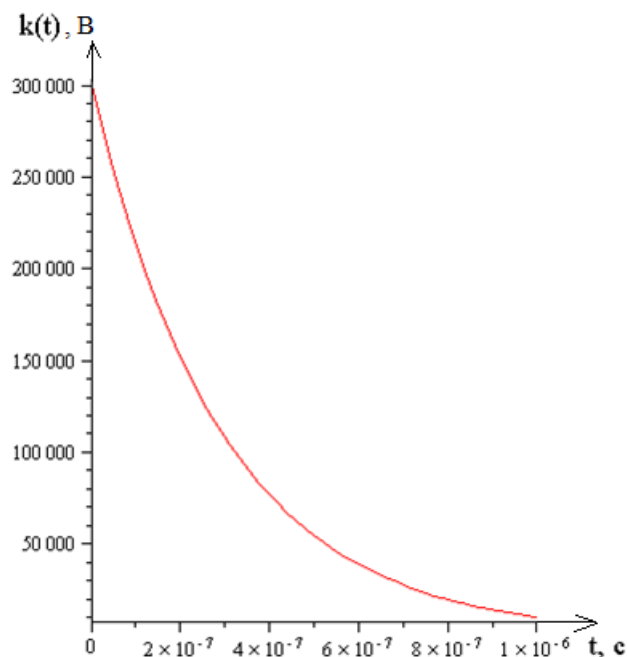


Рис. 4. График импульсной характеристики

## 2 Определение отклика на заданный сигнал методом интеграла Дюамеля

Метод интеграла Дюамеля позволяет рассчитать отклик цепи  $S(t)_{\text{вых}}$  на воздействие заданного сигнала  $S_{\text{вх}}(t)$ , если известна переходная функция цепи  $h(t)$ .

Наиболее часто используются две формы интеграла Дюамеля:

$$S_{\text{вых}}(t) = S_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t S'_{\text{вх}}(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad - \quad \text{1-я форма,}$$

$$S_{\text{вых}}(t) = S_{\text{вх}}(t)h(0) + \int_0^t S_{\text{вх}}(\tau)h'(t-\tau)d\tau \quad - \text{2-я форма.}$$

Выбор для расчета 1-й или 2-ой формы интеграла Дюамеля производится исходя из удобства вычислений.

При использовании интеграла Дюамеля необходимо учитывать следующие особенности:

- 1) скачок функции  $S_{\text{вх}}(t)$  нужно учитывать только на левой границе каждого интеграла;
- 2) значение скачка функции  $S_{\text{вх}}(t)$  берётся со знаком «+», если функция  $S_{\text{вх}}(t)$  при этом возрастает, со знаком «-», если функция  $S_{\text{вх}}(t)$  убывает;
- 3) после окончания входного импульса, т.е. при  $S_{\text{вх}}(t) = 0$ , переходной процесс на выходе цепи продолжается:  $S_{\text{вых}}(t) \neq 0$  при  $t \geq \tau_{\text{и}}$ . Поэтому необходимо рассчитывать  $S_{\text{вых}}(t)$  при  $t \geq \tau_{\text{и}}$ ;
- 4) верхний предел последнего интеграла в сумме всегда равен  $t$ .

### Пример

Пусть задан сигнал  $S_{\text{вх}}(t)$  (рис. 5).

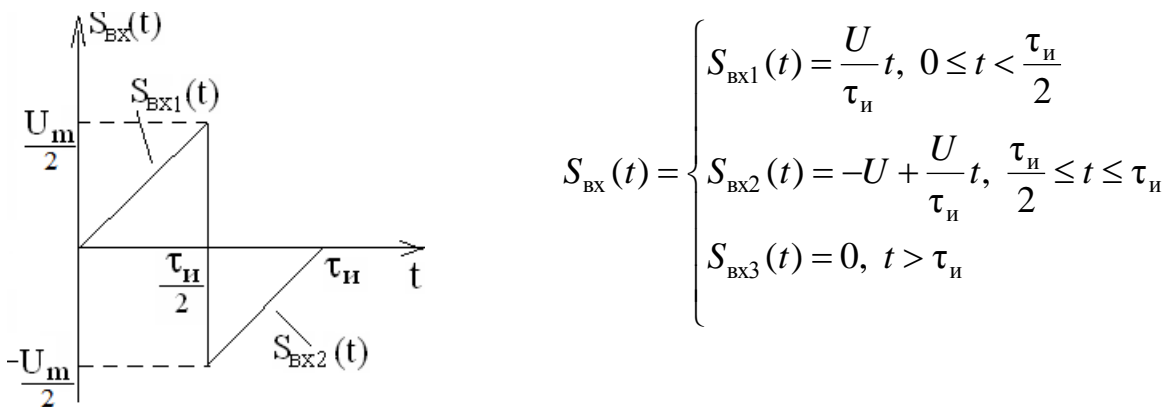


Рис. 5. График входного сигнала

Выберем следующую формулу интеграла Дюамеля:

$$S_{\text{вых}}(t) = S_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t S'_{\text{вх}}(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Отклик  $S_{\text{вых}}(t)$  необходимо определять на трёх временных интервалах, соответствующих изменению характера входного сигнала  $S_{\text{вх}}(t)$ .

1) Определим  $S_{\text{ВЫХ1}}(t)$  на интервале  $0 \leq t < \frac{\tau_{\text{И}}}{2}$

$$S_{\text{ВХ}}(t) = S_{\text{ВХ1}}(t); S'_{\text{ВХ}}(t) = S'_{\text{ВХ1}}(t) = \frac{U}{\tau_{\text{И}}}; S_{\text{ВХ1}}(0) = 0;$$

$$S_{\text{ВЫХ1}}(t) = S_{\text{ВХ1}}(0)h(t) + \int_0^t S'_{\text{ВХ1}}(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t S'_{\text{ВХ1}}(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

$$S_{\text{ВЫХ1}}(t) = \frac{U_m}{\tau_{\text{И}}} \int_0^t (1 + A_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} + A_2 e^{-\alpha_2(t-\tau)})d\tau =$$

$$= \frac{U_m}{\tau_{\text{И}}} \left\{ t - \frac{A_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} - \frac{A_2}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t} + \frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} \right\}.$$

2) определим  $S_{\text{ВЫХ2}}(t)$  на интервале  $\frac{\tau_{\text{И}}}{2} \leq t < \tau_{\text{И}}$

$$S_{\text{ВХ}}(t) = S_{\text{ВХ2}}(t); S'_{\text{ВХ}}(t) = S'_{\text{ВХ2}}(t) = \frac{U}{\tau_{\text{И}}}; S_{\text{ВХ}}\left(\frac{\tau_{\text{И}}}{2}\right) = -U_m;$$

$$S_{\text{ВЫХ2}}(t) = S_{\text{ВХ1}}(0)h(t) + \int_0^{\frac{\tau_{\text{И}}}{2}} S'_{\text{ВХ1}}(\tau)h(t-\tau)d\tau + S_{\text{ВХ2}}\left(\frac{\tau_{\text{И}}}{2}\right)h\left(t - \frac{\tau_{\text{И}}}{2}\right) + \int_{\frac{\tau_{\text{И}}}{2}}^t S'_{\text{ВХ2}}(\tau)h(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^{\frac{\tau_{\text{И}}}{2}} S'_{\text{ВХ1}}(\tau)h(t-\tau)d\tau - U_m h\left(t - \frac{\tau_{\text{И}}}{2}\right) + \int_{\frac{\tau_{\text{И}}}{2}}^t S'_{\text{ВХ2}}(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

$$S_{\text{ВЫХ2}}(t) = \frac{U_m}{\tau_{\text{И}}} \int_0^{\frac{\tau_{\text{И}}}{2}} (1 + A_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} + A_2 e^{-\alpha_2(t-\tau)})d\tau - U_m \left( 1 + A_1 e^{-\alpha_1\left(t - \frac{\tau_{\text{И}}}{2}\right)} + A_2 e^{-\alpha_2\left(t - \frac{\tau_{\text{И}}}{2}\right)} \right) +$$

$$+ \frac{U_m}{\tau_{\text{И}}} \int_{\frac{\tau_{\text{И}}}{2}}^t (1 + A_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} + A_2 e^{-\alpha_2(t-\tau)})d\tau =$$

$$= \frac{U_m}{\tau_{\text{И}}} \left\{ t + \frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} - \frac{A_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} - \frac{A_2}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t} \right\} - U_m \left\{ 1 + A_1 e^{-\alpha_1\left(t - \frac{\tau_{\text{И}}}{2}\right)} + A_2 e^{-\alpha_2\left(t - \frac{\tau_{\text{И}}}{2}\right)} \right\}.$$

3) определим  $S_{\text{ВЫХ3}}(t)$  в интервале  $t \geq \tau_{\text{И}}$

$$S_{\text{BX}}(t) = S_{\text{BX3}}(t) = 0; S'_{\text{BX3}}(t) = 0; S_{\text{BX3}}\tau_{\text{и}} = 0.$$

$$S_{\text{ВЫХ3}}(t) = S_{\text{BX1}}(0)h(t) + \int_0^{\frac{\tau_{\text{и}}}{2}} S'_{\text{BX1}}(\tau)h(t-\tau)d\tau + S_{\text{BX2}}\left(\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)h\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right) + \int_{\frac{\tau_{\text{и}}}{2}}^{\tau_{\text{и}}} S'_{\text{BX2}}(\tau)h(t-\tau)d\tau + \\ + S_{\text{BX3}}(\tau_{\text{и}})h(t-\tau_{\text{и}}) + \int_{\tau_{\text{и}}}^t S'_{\text{BX3}}(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Два последних слагаемых в выражении для  $S_{\text{ВЫХ3}}(t)$  равны нулю.

$$S_{\text{ВЫХ3}}(t) = \frac{U_m}{\tau_{\text{и}}} \left\{ \frac{\tau_{\text{и}}}{2} + \frac{A_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)} - \frac{A_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + \frac{A_2}{\alpha_2} e^{-\alpha_2\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)} - \frac{A_2}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t} \right\} - \\ - U_m \left( 1 + A_1 e^{-\alpha_1\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)} + A_2 e^{-\alpha_2\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)} \right) + \\ + \frac{U_m}{\tau_{\text{и}}} \left\{ \tau_{\text{и}} - \frac{\tau_{\text{и}}}{2} + \frac{A_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)} - \frac{A_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)} + \frac{A_2}{\alpha_2} e^{-\alpha_2(t-\tau_{\text{и}})} - \frac{A_2}{\alpha_2} e^{-\alpha_2\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)} \right\} = \\ = \frac{U_m}{\tau_{\text{и}}} \left\{ -\frac{A_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} - \frac{A_2}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t} \right\} - U_m \left( 1 + A_1 e^{-\alpha_1\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)} + A_2 e^{-\alpha_2\left(t-\frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)} \right) + \\ + \frac{U_m}{\tau_{\text{и}}} \left\{ \tau_{\text{и}} + \frac{A_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1(t-\tau_{\text{и}})} + \frac{A_2}{\alpha_2} e^{-\alpha_2(t-\tau_{\text{и}})} \right\}.$$

Для построения графика выходного сигнала необходимо использовать формулы для каждого временного интервала:

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} S_{\text{ВЫХ1}}(t), & 0 \leq t < \frac{\tau_{\text{и}}}{2} \\ S_{\text{ВЫХ2}}(t), & \frac{\tau_{\text{и}}}{2} \leq t < \tau_{\text{и}} \\ S_{\text{ВЫХ3}}(t), & t \geq \tau_{\text{и}} \end{cases}.$$

Пусть  $U_m = 1$  В. Параметр  $\tau_{\text{и}}$  определим как  $2\tau_{\text{и1}} = 0,04$  с.

Тогда  $S_{\text{ВЫХ1}}(t) = 0,465e^{-49,02t} + 6,4882 \cdot 10^{-7} e^{-3,4 \cdot 10^6 t} + 25t - 0,465$ , В,

$$S_{\text{ВЫХ2}}(t) = -1,465 + 0,465e^{-49,02t} + 6,4882 \cdot 10^{-7} e^{-3,4 \cdot 10^6 t} + 0,9118e^{-49,02t+0,9804} +$$

$$+ 0,08824e^{-3,4 \cdot 10^6 t+68000} + 25t, \text{ В,}$$

$$S_{\text{ВЫХ3}}(t) = 0,465e^{-49,02t} + 6,4882 \cdot 10^{-7} e^{-3,4 \cdot 10^6 t} + 0,9118e^{-49,02t+0,9804} +$$

$$+ 0,08824e^{-3,4 \cdot 10^6 t+68000} - 0,465e^{-49,02t+1,9608} - 6,4882 \cdot 10^{-7} e^{-3,4 \cdot 10^6 t+1,36 \cdot 10^5}, \text{ В.}$$

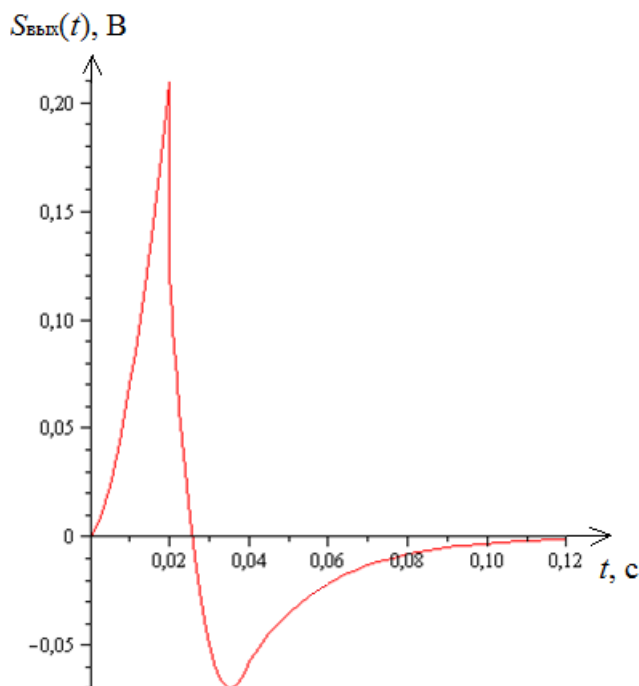


Рис. 6. График выходного сигнала

### 3 Определение комплексного коэффициента передачи, АЧХ, ФЧХ и ГВЗ

Комплексным коэффициентом передачи цепи  $K(j\omega)$  называется отношение комплексной амплитуды напряжения (тока) на выходе  $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$  цепи к комплексной амплитуде напряжения (тока) на входе  $\dot{U}_{\text{ВХ}}$ :

$$K_u(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}};$$

$K_u(j\omega) = |K_u(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$  (в дальнейшем  $u$  – опускаем).

Зависимость модуля комплексного коэффициента передачи  $|K(j\omega)|$  от частоты называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ); зависимость аргумента комплексного коэффициента передачи  $\varphi(\omega)$  – *фазо-частотной характеристикой* (ФЧХ).

Значение модуля комплексного коэффициента передачи, выраженное в децибелах, будет равно  $K_{дБ} = 20 \lg |K(j\omega)|$ , [дБ].

Производная аргумента комплексного коэффициента передачи по частоте  $\tau_3 = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$  называется *групповым временем запаздывания* (ГВЗ). ГВЗ показывает время задержки сигнала с частотой  $\omega$  при прохождении его через цепь.

Оценка полосы пропускания:

Границы полосы пропускания  $\omega_b \div \omega_n$  определяются точками, в которых

$$|K(j\omega)| = 0,7 |K(j\omega)|_{\max}.$$

### Пример

Комплексный коэффициент передачи по напряжению для цепи, изображенной на рис. 2.

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\dot{U}_{\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{Z_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{Z_{\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)};$$

$$Z_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} + R_2; \quad Z_{\text{ВХ}}(j\omega) = R_1 + R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C};$$

$$K(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C} + R_2}{R_1 + R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{jR_2\omega C + 1}{-\omega^2 LC + j\omega C(R_1 + R_2) + 1}.$$

Представим комплексный коэффициент передачи в показательной форме:

$$K(j\omega) = \frac{\sqrt{(R_2\omega C)^2 + 1} \cdot e^{j \arctg(R_2\omega C)}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega C(R_1 + R_2))^2} \cdot e^{j \arctg \frac{\omega C(R_1 + R_2)}{1 - \omega^2 LC}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(R_2 \omega C)^2 + 1}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega C(R_1 + R_2))^2}} e^{j \left( \arctg R_2 \omega C - \arctg \frac{\omega C(R_1 + R_2)}{1 - \omega^2 LC} \right)}.$$

Модуль комплексного коэффициента передачи:

$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{(R_2 \omega C)^2 + 1}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega C(R_1 + R_2))^2}}.$$

Подставив значения номиналов элементов цепи, получим

$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{3,24 \cdot 10^{-4} \omega^2 + 1}}{\sqrt{4,16 \cdot 10^{-4} \omega^2 + (6 \cdot 10^{-9} \omega^2 - 1)^2}}.$$

Построим график амплитудно-частотной характеристики цепи.

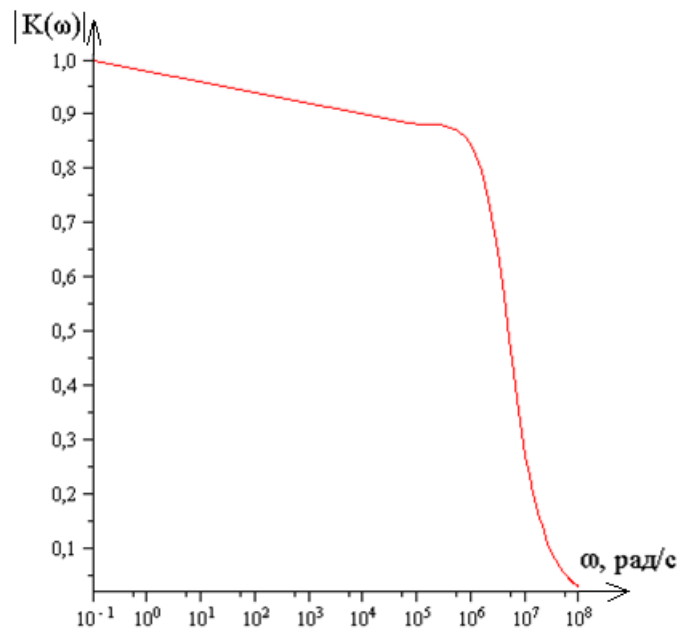


Рис. 7. График амплитудно-частотной характеристики цепи

Аргумент комплексного коэффициента передачи:

$$\varphi(\omega) = \arctg R_2 \omega C - \arctg \frac{\omega C(R_1 + R_2)}{1 - \omega^2 LC}.$$

Подставив значения номиналов элементов схемы, получим

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} 0,018\omega - \operatorname{arctg} \frac{\omega 2,04 \cdot 10^{-2}}{1 - \omega^2 6 \cdot 10^{-9}}, \text{ рад.}$$

Построим график ФЧХ.

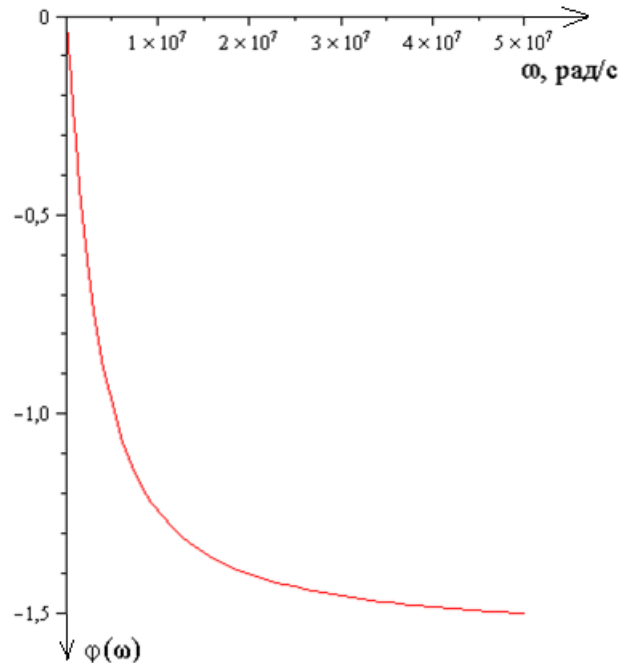


Рис. 8. График фазо-частотной характеристики цепи

Групповое время запаздывания определяется как производная от аргумента комплексного коэффициента передачи по частоте:

$$\tau_3(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}; \quad \frac{d(\operatorname{arctg} y(\omega))}{d\omega} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{dy(\omega)}{d\omega};$$

$$\tau_3(\omega) = \frac{1}{1+(R_2\omega C)^2} \cdot R_2 C - \frac{1}{1+\left(\frac{\omega C(R_1+R_2)}{1-\omega^2 LC}\right)^2} \times$$

$$\times \left( \frac{C(R_1+R_2)(1-\omega^2 LC) + 2\omega^2 LC^2(R_1+R_2)}{(1-\omega^2 LC)^2} \right).$$

$$\tau_3(\omega) = - \frac{0,5(-4,06 \cdot 10^{15} \omega^2 + 1,84 \cdot 10^8 \omega^4 + 1,11 \cdot 10^{19})}{(\omega^2 + 3080) (3,12 \cdot 10^{14} \omega^2 + 27\omega^4 + 7,5 \cdot 10^{17})}, \text{ с.}$$

Построим график зависимости ГВЗ от частоты.



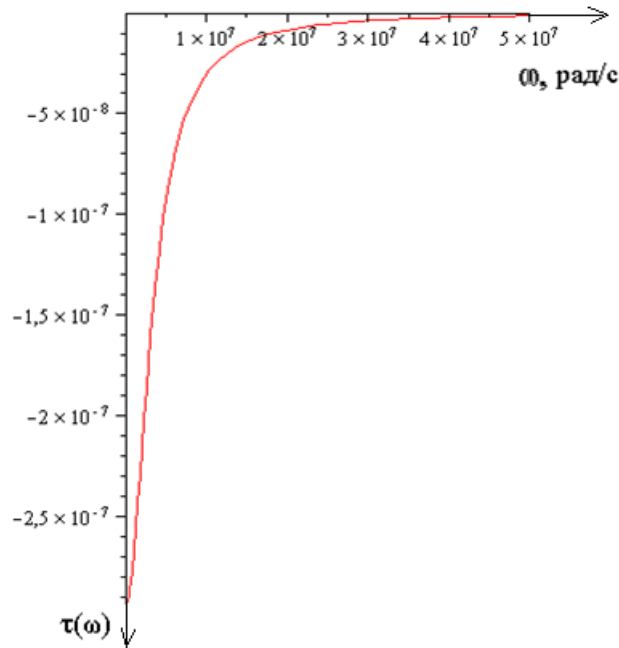


Рис. 9. График зависимости группового времени запаздывания от частоты

Графики АЧХ, ФЧХ и ГВЗ необходимо строить в одном масштабе, располагая их один под другим.

#### 4 Определение А-параметров заданной цепи

Для 4-полюсника (рис. 1) связь между  $I_1, U_1; I_2, U_2$  в А-параметрах устанавливается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2 \end{cases}.$$

Таким образом, А-параметры четырёхполюсника являются коэффициентами в системе уравнений, связывающей входные и выходные токи и напряжения.

Рассмотрим пример определения А-параметров 4х-полюсника (рис. 1).

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}; \quad A_{21} = \frac{1}{Z_2}; \quad A_{12} = Z_1; \quad A_{22} = 1.$$

**Проверка**      Определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  обратимого четырёхполюсника должен быть равным единице.

$$\text{В самом деле, } A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot 1 - \left(\frac{1}{Z_2}\right)Z_1 = 1.$$

Таблицу параметров типовых 4-х-полюсников см. в приложении.

### Пример

Определим А-параметры для схемы, изображенной на рис. 2.

$$A_{11} = 1 + \frac{R_1 + j\omega L}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = 1 + \frac{j\omega CR_1 - \omega^2 LC}{j\omega CR_2 + 1}, \quad A_{21} = \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{j\omega CR_2 + 1},$$

$$A_{12} = R_1 + j\omega L, \quad A_{22} = 1.$$

**Проверка** Определитель А-матрицы равен:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \left(1 + \frac{j\omega CR_1 - \omega^2 LC}{j\omega CR_2 + 1}\right) - (R_1 + j\omega L) \frac{j\omega C}{j\omega CR_2 + 1} = 1.$$

## 5 Получение выражений для $K(j\omega)$ , АЧХ, ФЧХ, ГВЗ цепи при заданной нагрузке $Z_H$ через А-параметры

Комплексный коэффициент передачи  $K(j\omega)$  выражается через А-параметры следующим образом:

$$K(j\omega) = \frac{Z_H}{A_{11}Z_H + A_{12}}.$$

*Условие неискаженной передачи сигнала* формулируется следующим образом: для неискаженной передачи сигнала с полосой, ограниченной в интервале  $\omega_H \div \omega_B$ , модуль комплексного коэффициента передачи 4-х-полюсника  $|K(j\omega)|$  в заданном интервале должен быть постоянным  $K_0$ ; ФЧХ  $\varphi(\omega)$  должна изменяться пропорционально частоте  $\varphi(\omega) = \omega t_0$ , т.е. быть линейной; ГВЗ должно быть постоянным.

### Пример

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{Z_H}{A_{11}Z_H + A_{12}} = \frac{Z_H}{\left(1 + \frac{j\omega CR_1 - \omega^2 LC}{j\omega CR_2 + 1}\right)Z_H + R_1 + j\omega L} = \\ &= \frac{Z_H(1 + j\omega CR_2)}{\left(Z_H - \omega^2 LC(Z_H + R_1)\right) + j\omega(C(R_1 + R_2)Z_H + CR_1R_2 + L)}. \end{aligned}$$

Получим модуль комплексного коэффициента передачи:

$$|K(j\omega)| = \frac{Z_H \sqrt{1 + (\omega CR_2)^2}}{\sqrt{(R_1 + Z_H - \omega^2 LC(Z_H + R_2))^2 + \omega^2 (Z_H C(R_1 + R_2) + CR_1 R_2 + L)^2}}$$

Пусть  $Z_H = 1$  кОм. Построим амплитудно-частотную характеристику цепи.

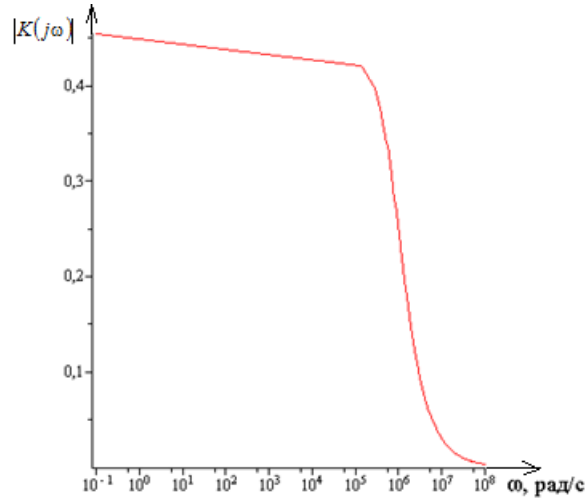


Рис. 10. График амплитудно-частотной характеристики нагруженного четырехполюсника

Аргумент комплексного коэффициента передачи:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(\omega CR_2) - \text{arctg} \frac{\omega(C(R_1 + R_2)Z_H + CR_1 R_2 + L)}{R_1 + Z_H - \omega^2 LC(Z_H + R_2)}$$

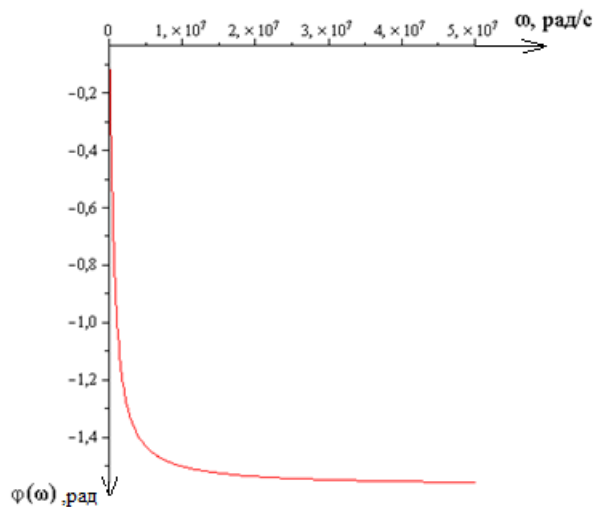


Рис. 11. График фазо-частотной характеристики нагруженного четырёхполюсника

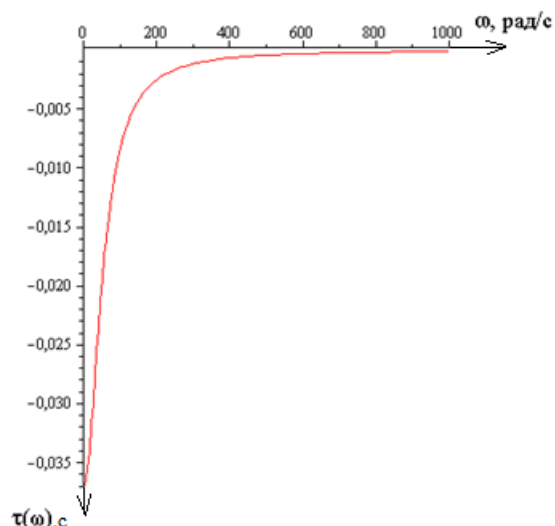


Рис. 12. График зависимости группового времени запаздывания от частоты нагруженного четырехполюсника

Графики АЧХ, ФЧХ и ГВЗ необходимо построить в одном масштабе по частоте, располагая их один под другим, и сравнить их с полученными в пункте 3 для схемы на холостом ходу.

По кривой АЧХ определим полосу пропускания четырехполюсника на уровне  $0.7 K(j\omega)_{\max}$ . Интервал частот, в котором частотные характеристики заданной схемы удовлетворяют условиям неискаженной передачи:  $\omega_B = 100$  рад/с,  $\omega_H = 0$  рад/с.

Неравномерность АЧХ в полосе пропускания  $\omega_H \div \omega_B$  определяется как разность  $|K(j\omega)_{\max}| - |K(j\omega)_{\min}| = \Delta K$ , при этом  $\Delta K$  может быть выражено в разгах или в дБ ( $20 \lg \Delta k'$ ).

## 6 Вычисление характеристических и рабочих параметров четырехполюсника

*Собственные (характеристические) параметры 4-х-полюсника.*

*Характеристическими сопротивлениями* четырёхполюсника называется пара сопротивлений  $Z_{C1}$  и  $Z_{C2}$ , которые выбраны таким образом, что при подключении к выходным зажимам сопротивления нагрузки  $Z_H = Z_{C2}$ , входное сопротивление четырёхполюсника равно  $Z_{C1}$ , а при подключении к входным зажимам сопротивления  $Z_i = Z_{C1}$ , выходное сопротивление четырёхполюсника равно  $Z_{C2}$ . Сопротивления  $Z_{C1}$  и  $Z_{C2}$  называются соответственно входным и выходным сопротивлениями четырёхполюсника.

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \quad Z_{C2} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}.$$

Режим четырёхполюсника, когда он нагружен на характеристические сопротивления, называется *режимом согласованной нагрузки*.

*Характеристическая постоянная* (мера передачи)  $g_c$  определяет отношение входного тока или напряжения к выходному току или напряжению при согласованной нагрузке.

Характеристические сопротивления 4-х-полюсника зависят от его параметров и определяются следующим образом:

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \quad Z_{c2} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}; \quad Z_{вх} = \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}}.$$

Здесь  $Z_{c1}$  – характеристическое сопротивление со стороны входа;

$Z_{c2}$  – характеристическое сопротивление со стороны выхода;

$Z_{вх}$  – входное сопротивление четырёхполюсника, нагруженного со стороны выхода на сопротивление  $Z_H$ .

Собственная (характеристическая) постоянная передачи:

$$g = a + jb,$$

где  $a$  – собственная постоянная затухания четырёхполюсника,  $b$  – собственная постоянная фазы.

$$g = \ln\left(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}\right), \quad a = \operatorname{Re}(g), \quad b = \operatorname{Im}(g).$$

$$a = \ln\left|\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}\right|.$$

*Рабочие параметры 4-х-полюсника*

Необходимо вычислить рабочее и вносимое затухания:

– при  $Z_i = Z_{c1}$ ,  $Z_H = Z_{c2}$ ;

– при заданных значениях  $Z_i$  и  $Z_H$ ,

где  $Z_i$ ,  $Z_H$  – сопротивления источника сигнала и нагрузки соответственно.

*Рабочее затухание*  $a_p$  четырехполюсника определяется как  $1/2$  натурального логарифма отношения максимальной мощности, которую может отдать источник сигнала с внутренним сопротивлением  $Z_i$  на согласованную нагрузку, к мощности, фактически выделяемой на заданной нагрузке,  $Z_H$  через четырёхполюсник.

Рабочее затухание 4-х-полюсника равно

$$a_p = a + \ln \left| \frac{Z_i + Z_{c1}}{2\sqrt{Z_i Z_{c1}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_H + Z_{c2}}{2\sqrt{Z_H \cdot Z_{c2}}} \right| + \ln |1 - P_i P_H e^{-2g}|,$$

где  $P_i = \frac{Z_i - Z_{c1}}{Z_i + Z_{c1}}$ ;  $P_H = \frac{Z_H - Z_{c2}}{Z_H + Z_{c2}}$  – коэффициенты несогласованности на входе и выходе 4-х-полюсника соответственно.

*Вносимое затухание*  $a_{вн}$  четырехполюсника определяется как 1/2 натурального логарифма отношения мощности, которую может отдать источник с внутренним сопротивлением  $Z_i$  в заданную нагрузку  $Z_H$  непосредственно (минуя четырехполюсник) к мощности, выделяемой на заданной нагрузке  $Z_H$  через четырехполюсник.

Вносимое затухание 4-х-полюсника равно

$$a_{вн} = a + \ln \left| \frac{Z_i + Z_{c1}}{2\sqrt{Z_i Z_{c1}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_H + Z_{c2}}{2\sqrt{Z_H Z_{c2}}} \right| + \ln |1 - P_i P_H e^{-2g}| - \ln \left| \frac{Z_i + Z_H}{2\sqrt{Z_i Z_H}} \right|.$$

Вычисление затуханий при согласованной нагрузке

$$Z_{вн} = Z_{c1}, \text{ Ом}; \quad Z_H = Z_{c2}, \text{ Ом}.$$

В этом случае коэффициенты несогласованности соответственно равны нулю:

$$P_i = 0, \quad P_H = 0.$$

Рабочее затухание при согласованной нагрузке равно собственному затуханию четырёхполюсника:

$$a_p = a, \text{ Неп.}$$

Вносимое затухание

$$a_{вн} = a_p - \ln \left| \frac{Z_i + Z_H}{2\sqrt{Z_i Z_H}} \right|, \text{ Неп.}$$

Вычисление затуханий при заданных  $Z_{вн}$  и  $Z_H$ .

$$P_i = \frac{Z_i - Z_{c1}}{Z_i + Z_{c1}}, \quad P_H = \frac{Z_H - Z_{c2}}{Z_H + Z_{c2}},$$

Рабочее затухание

$$a_p = a + \ln \left| \frac{Z_i + Z_{c1}}{2\sqrt{Z_i Z_{c1}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_H + Z_{c2}}{2\sqrt{Z_H Z_{c2}}} \right| + \ln |1 - P_i P_H e^{-2g}|, \text{ Неп.}$$

Вносимое затухание

$$a_{\text{вн}} = a_p - \ln \left| \frac{Z_i + Z_H}{2\sqrt{Z_i Z_H}} \right|, \text{ Неп.}$$

Численный расчёт собственных и рабочих параметров производится на средней частоте  $\omega_0$  в полосе пропускания.

## 7 Определение спектра периодического сигнала

Представим заданный сигнал как периодический с периодом  $T = Q\tau_{\text{и}}$ .

Например, пусть  $Q = 3$  (рис. 13).

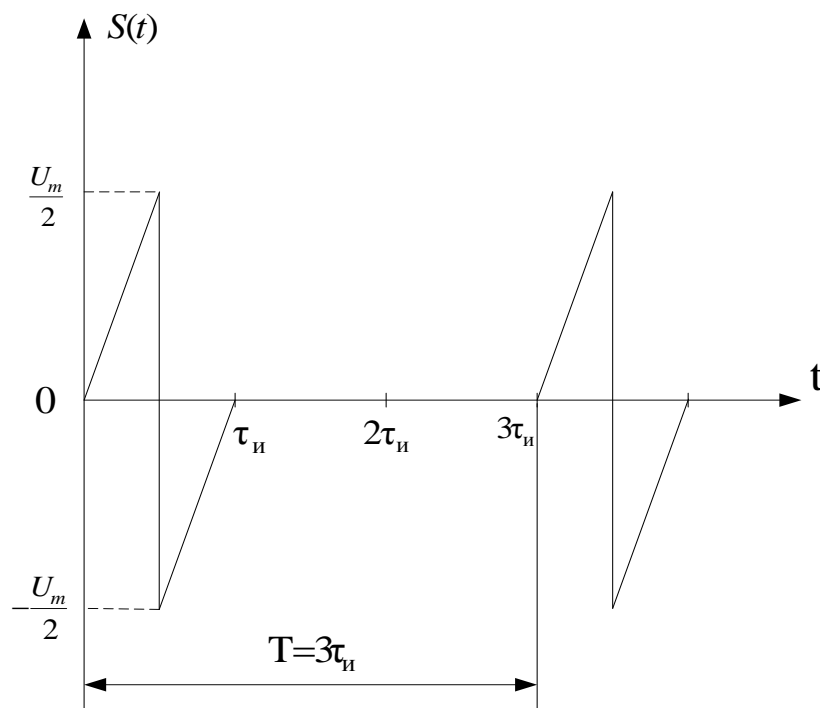


Рис. 13. График временной зависимости периодического сигнала

Чтобы получить спектр периодического сигнала, необходимо разложить его в ряд Фурье по тригонометрическим или экспоненциальным базисным функциям.

Экспоненциальный ряд Фурье имеет вид:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\Omega t},$$

где  $\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-jn\Omega t} dt$  – коэффициент экспоненциального ряда,  $T$  – период функции  $S(t)$ ,  $\Omega$  – частота первой гармоники,  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  [рад/с].

Тригонометрический ряд Фурье:

$$S(t) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\Omega t + \varphi_n).$$

Используя связь между коэффициентами экспоненциального и тригонометрического ряда Фурье, найдём  $C_n$  и  $\varphi_n$ :

$$\dot{C}_n = C_n e^{j\varphi_n}, \text{ т. е. } C_n = \left| \dot{C}_n \right|, \quad C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt, \quad \varphi = \arg \dot{C}_n.$$

Определим коэффициенты экспоненциального ряда Фурье для сигнала, изображенного на рис. 13.

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T S_{\text{вх}}(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau_{\text{и}}} S_{\text{вх}}(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{\tau_{\text{и}}}{2}} \frac{U_m}{\tau_{\text{и}}} t e^{-jn\Omega t} dt - \\ &- \frac{1}{T} \int_{\frac{\tau_{\text{и}}}{2}}^{\tau_{\text{и}}} U_m e^{-jn\Omega t} dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{\tau_{\text{и}}}{2}}^{\tau_{\text{и}}} \frac{U_m}{\tau_{\text{и}}} t e^{-jn\Omega t} dt. \end{aligned}$$

Проинтегрировав и подставив пределы, получим:

$$\dot{C}_n = \frac{U_m}{T\Omega n} \left( 1 - \frac{\sin \frac{n\Omega\tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{n\Omega\tau_{\text{и}}}{2}} \right) e^{-j\left(\frac{n\Omega\tau_{\text{и}}}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{U_m}{2\pi n} \left( 1 - \frac{\sin \frac{n\Omega\tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{n\Omega\tau_{\text{и}}}{2}} \right) e^{-j\left(\frac{n\Omega\tau_{\text{и}}}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Коэффициенты тригонометрического ряда будут иметь вид:

$$C_n = \frac{U_m}{\pi n} \left( 1 - \frac{\sin \frac{n\Omega\tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{n\Omega\tau_{\text{и}}}{2}} \right), \quad \varphi_n = -\frac{n\Omega\tau_{\text{и}}}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Пусть  $U_m = 1\text{В}$ . По условию задания  $\tau_{\text{и}} = 2\tau_{\text{г}} = 0,04$  с. Частота первой гармоники  $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{Q\tau_{\text{и}}} = \frac{2\pi}{3\tau_{\text{и}}} = 52,33$  [рад/с],  $\frac{\Omega\tau_{\text{и}}}{2} = \frac{\pi}{3}$ .



Для рассматриваемого примера

$$C_n = \frac{1}{\pi n} \left( 1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\frac{n\pi}{3}} \right), \quad \varphi_n = -\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье будет иметь вид

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left( 1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\frac{n\pi}{3}} \right) \cos \left( n\Omega t + -\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Подставляя значения номеров гармоник  $n$  в выражения для  $C_n$  и  $\varphi_n$ , получим значения  $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$  и  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots$ . Число членов ряда необходимо ограничить величиной, когда  $C_B \approx 0,1 C_1$ . По значениям  $C_n$  и  $\varphi_n$  построим спектральные диаграммы амплитуд и фаз. Спектр периодического сигнала является дискретным, поэтому огибающая спектра амплитуд и спектра фаз должна быть показана пунктирной линией.

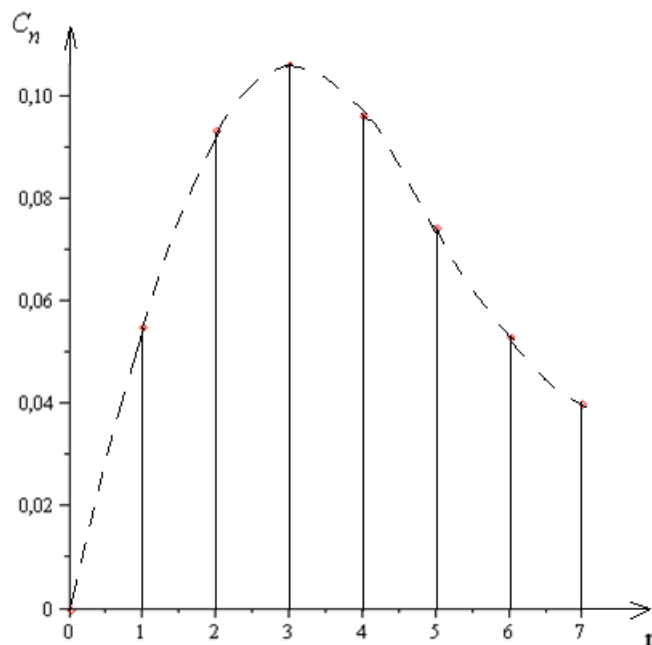


Рис. 14. Спектральная диаграмма амплитуд заданного периодического сигнала

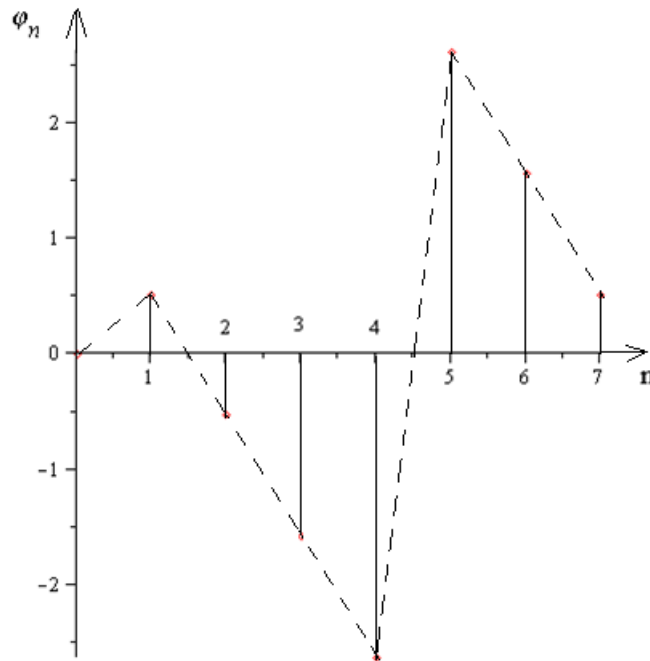


Рис. 15. Спектральная диаграмма фаз заданного периодического сигнала

## 8 Определение спектра непериодического сигнала

Чтобы найти спектральную плотность заданного непериодического сигнала, необходимо найти преобразование Фурье от него:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau_{\text{H}}} S_{\text{BX}}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

### Пример

Найдём спектральную плотность сигнала, изображенного на рис. 5.

Способ 1

$$S(j\omega) = \int_0^{\tau_{\text{H}}} S_{\text{BX}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\frac{\tau_{\text{H}}}{2}} \frac{U_m}{\tau_{\text{H}}} t e^{-j\omega t} dt + \int_{\frac{\tau_{\text{H}}}{2}}^{\tau_{\text{H}}} \frac{U_m}{\tau_{\text{H}}} t e^{-j\omega t} dt - \int_{\frac{\tau_{\text{H}}}{2}}^{\tau_{\text{H}}} U_m e^{-j\omega t} dt.$$

Справка:  $\int t e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \left( \frac{t}{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2} \right).$

$$S(j\omega) = \frac{U_m}{\tau_{\text{H}}} \left\{ e^{-j\omega t} \left( \frac{t}{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2} \right) \Big|_0^{\frac{\tau_{\text{H}}}{2}} + e^{-j\omega t} \left( \frac{t}{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2} \right) \Big|_{\frac{\tau_{\text{H}}}{2}}^{\tau_{\text{H}}} \right\} + \frac{U_m}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{\frac{\tau_{\text{H}}}{2}}^{\tau_{\text{H}}}.$$

Подставив пределы и приведя подобные, получим:

$$S(j\omega) = \frac{U_m}{\tau_n} \left\{ \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{j\omega\tau_n}{2}} \left( e^{-\frac{-j\omega\tau_n}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau_n}{2}} \right) + e^{-\frac{j\omega\tau_n}{2}} \frac{\tau_n}{j\omega} \right\} =$$

$$= \frac{U_m}{\tau_n(j\omega)} \left( \tau_n - \frac{2 \sin \frac{\omega\tau_n}{2}}{\omega} \right) e^{-\frac{j\omega\tau_n}{2}} = \frac{U_m}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\omega\tau_n}{2}}{\frac{\omega\tau_n}{2}} \right) e^{-j\left(\frac{\omega\tau_n}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Способ 2

Представим исходный сигнал (рис. 5) как сумму трёх прямых

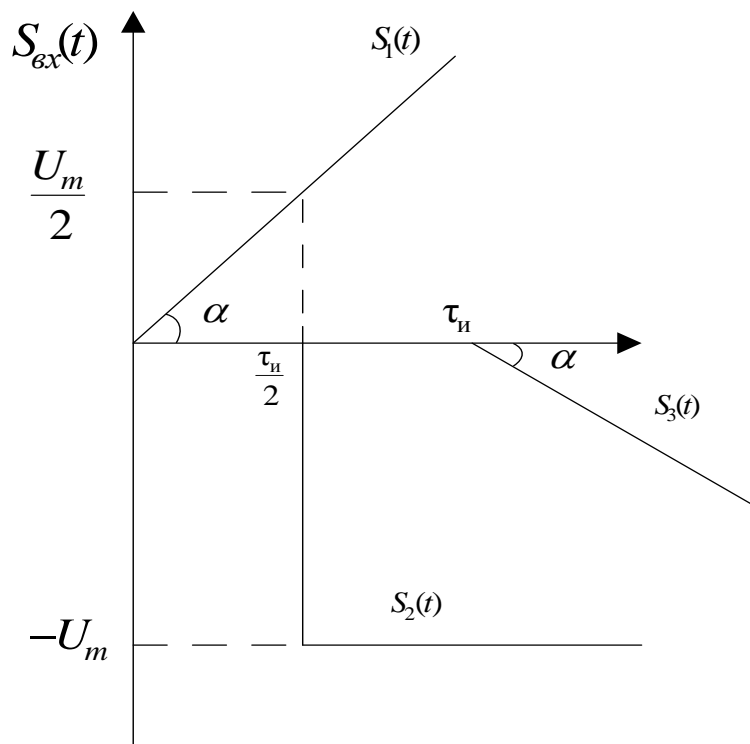


Рис. 16. Разложение заданного неперiodического сигнала на сумму трёх прямых

$$S_{ex}(t) = S_1(t) + S_2(t) + S_3(t),$$

где  $S_1(t) = \frac{U_m}{\tau_n} t$ ;  $S_2(t) = -U_m 1\left(t - \frac{\tau_n}{2}\right)$ ;  $S_3(t) = -\frac{U_m}{\tau_n} (t - \tau_n)$ .

Найдём преобразование Лапласа  $L(S_{ex}(t))$ .

По теореме о сумме сигналов:

$$S_{\text{ex}}(p) = S_1(p) + S_2(p) + S_3(p),$$

$$S_1(p) = \frac{U_m}{\tau_n} \cdot \frac{1}{p^2}; \quad S_2(p) = -U_m \frac{1}{p} e^{-\frac{p\tau_n}{2}}; \quad S_3(p) = -\frac{U_m}{\tau_n} \cdot \frac{1}{p^2} e^{-p\tau_n}.$$

Для определения  $S_1(p)$ ,  $S_2(p)$ ,  $S_3(p)$  использовались таблицы перехода в область изображений по Лапласу, а также теорема запаздывания.

$$\begin{aligned} S_{\text{ex}}(p) &= U_m \frac{1}{p} \left( \frac{1}{\tau_n p} - e^{-\frac{p\tau_n}{2}} - \frac{1}{\tau_n p} e^{-p\tau_n} \right) = \frac{U_m}{p} \left( -e^{-\frac{p\tau_n}{2}} + \frac{1}{\tau_n p} (1 - e^{-p\tau_n}) \right) = \\ &= \frac{U_m}{p} \left( -e^{-\frac{p\tau_n}{2}} + \frac{1}{\tau_n p} \left( e^{\frac{p\tau_n}{2}} - e^{-\frac{p\tau_n}{2}} \right) e^{-\frac{p\tau_n}{2}} \right) = \frac{U_m}{p} e^{-\frac{p\tau_n}{2}} \left( \frac{1}{\tau_n p} \left( e^{\frac{p\tau_n}{2}} - e^{-\frac{p\tau_n}{2}} \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Перейдём в область изображений по Фурье, заменив  $p$  на  $j\omega$ :

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{U_m}{j\omega} e^{-\frac{j\omega\tau_n}{2}} \left( \frac{1}{\tau_n j\omega} \left( e^{\frac{j\omega\tau_n}{2}} - e^{-\frac{j\omega\tau_n}{2}} \right) - 1 \right) = \frac{U_m}{j\omega} e^{-\frac{j\omega\tau_n}{2}} \left( \frac{2}{\tau_n \omega} \sin \frac{\omega\tau_n}{2} - 1 \right) = \\ &= \frac{U_m}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\omega\tau_n}{2}}{\frac{\omega\tau_n}{2}} \right) e^{-j\left(\frac{\omega\tau_n}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Способ 3.

Пусть сигнал  $V(t) = \frac{dS_{\text{вх}}(t)}{dt}$ .

Тогда:

$$V(t) = \begin{cases} V_1(t) = \frac{U_m}{\tau_n}, & 0 \leq t < \frac{\tau_n}{2} \\ V_2(t) = -U_m \delta\left(t - \frac{\tau_n}{2}\right) + \frac{U_m}{\tau_n}, & \frac{\tau_n}{2} \leq t < \tau_n \\ V_2(t) = 0, & t \geq \tau_n \end{cases}$$

Найдём спектральную плотность сигнала  $V(t)$

$$V(j\omega) = \frac{U_m}{\tau_n} \int_0^{\frac{\tau_n}{2}} e^{-j\omega t} dt - U_m \int_{\frac{\tau_n}{2}}^{\tau_n} \delta\left(t - \frac{\tau_n}{2}\right) e^{-j\omega t} dt + \frac{U_m}{\tau_n} \int_{\frac{\tau_n}{2}}^{\tau_n} e^{-j\omega t} dt.$$

В силу фильтрующего свойства дельта-функции второй интеграл будет равен  $e^{\frac{-j\omega\tau_u}{2}}$ .

$$V(j\omega) = \frac{U_m}{\tau_u(-j\omega)} \left( e^{\frac{-j\omega\tau_u}{2}} - 1 \right) - U_m e^{\frac{-j\omega\tau_u}{2}} + \frac{U_m}{\tau_u(-j\omega)} \left( e^{-j\omega\tau_u} - e^{\frac{-j\omega\tau_u}{2}} \right).$$

В результате несложных преобразований получим:

$$V(j\omega) = U_m \left\{ \frac{1}{\tau_u(-j\omega)} \left( -2j \sin \frac{\omega\tau_u}{2} \right) - 1 \right\} e^{\frac{-j\omega\tau_u}{2}} = U_m \left( \frac{\sin \frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}} - 1 \right) e^{\frac{-j\omega\tau_u}{2}}.$$

Исходный сигнал  $S_{\text{вх}}(t) = \int_0^t V(t) dt$ .

По теореме об интегрировании оригиналов

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{j\omega}.$$

Таким образом,

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U_m}{j\omega} \left( \frac{\sin \frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}} - 1 \right) e^{\frac{-j\omega\tau_u}{2}} = \frac{U_m}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}} \right) e^{-j \left( \frac{\omega\tau_u}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Определим спектральную плотность амплитуд – модуль от комплексной спектральной плотности:

$$|S_{\text{вх}}(j\omega)| = \frac{U_m}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}} \right).$$

Спектральная плотность фаз определяется как аргумент комплексной спектральной плотности

$$\varphi_S(\omega) = -\frac{\omega\tau_u}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Подставим численные значения:

$$|S_{ex}(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin 0,02\omega}{0,02\omega} \right), \quad \varphi_S(\omega) = -0,02\omega + \frac{\pi}{2}.$$

Построим графики спектральной плотности амплитуд и фаз заданного сигнала.

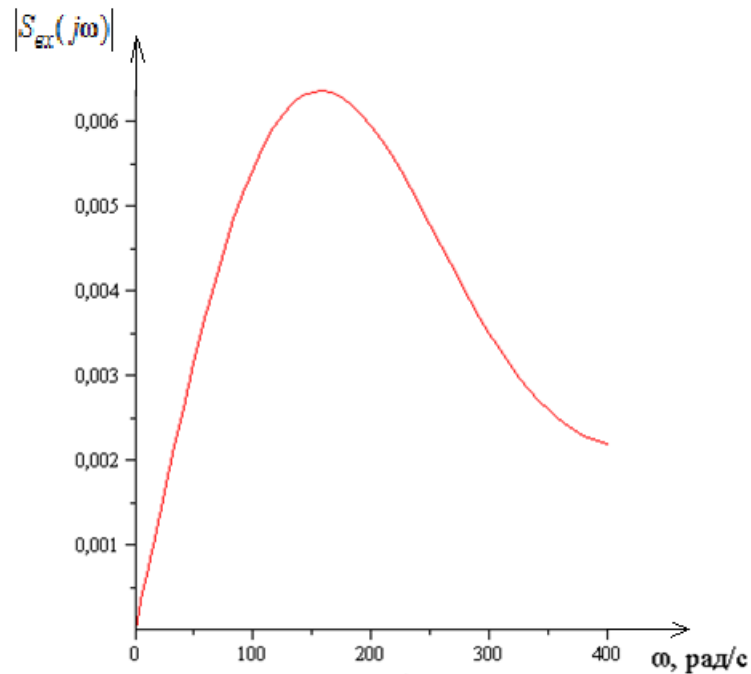


Рис. 17. График спектральной плотности амплитуд заданного неперiodического сигнала

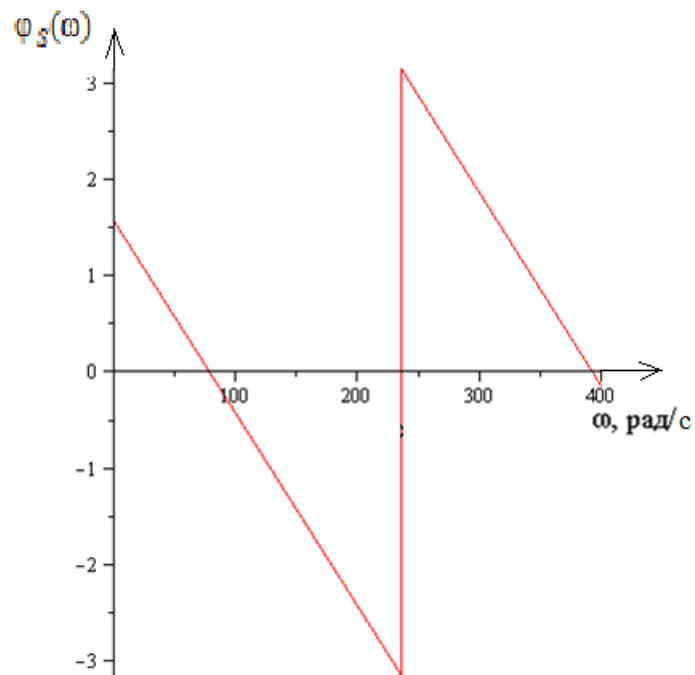


Рис. 18. График спектральной плотности фаз заданного неперiodического сигнала

## 9 Определение отклика цепи на заданный непериодический сигнал спектральным методом

Этот метод позволяет определить спектральную функцию отклика  $S_{\text{вых}}(j\omega)$  линейной цепи, заданной комплексным коэффициентом передачи  $K(j\omega)$  при известной спектральной функции входного сигнала  $S_{\text{вх}}(j\omega)$

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) \cdot K(j\omega).$$

### Пример

Спектральная плотность входного сигнала (рис. 3) определена в пункте 9:

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = |S_{\text{вх}}(j\omega)| e^{j\varphi_S(\omega)} = \frac{U_m}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}} \right) e^{-j\left(\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Комплексный коэффициент передачи  $K(j\omega)$  схемы, изображенной на рис. 2, определен в пункте 3:

$$K_u(j\omega) = |K_u(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{\sqrt{(R_2\omega C)^2 + 1}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega C(R_1 + R_2))^2}} e^{j\left(\arctg R_2\omega C - \arctg \frac{\omega C(R_1 + R_2)}{1 - \omega^2 LC}\right)}.$$

Согласно спектральному методу спектральная плотность выходного сигнала будет равна:

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(j\omega) &= |S_{\text{вх}}(j\omega)| |K_u(j\omega)| e^{j(\varphi_S(\omega) + \varphi(\omega))}, \\ S_{\text{вых}}(j\omega) &= \frac{U_m}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}} \right) \frac{\sqrt{(R_2\omega C)^2 + 1}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega C(R_1 + R_2))^2}} \times \\ &\quad \times e^{j\left(\arctg R_2\omega C - \arctg \frac{\omega C(R_1 + R_2)}{1 - \omega^2 LC} - \frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Модуль спектральной плотности отклика

$$|S_{\text{вых}}(j\omega)| = \frac{U_m}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}} \right) \frac{\sqrt{(R_2\omega C)^2 + 1}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega C(R_1 + R_2))^2}}.$$

Подставим численные данные

$$|S_{\text{вых}}(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin 0,02\omega}{0,02\omega} \right) \frac{\sqrt{3,24 \cdot 10^{-4} \omega^2 + 1}}{\sqrt{4,16 \cdot 10^{-4} \omega^2 + (6 \cdot 10^{-9} \omega^2 - 1)^2}}.$$

Построим график модуля спектральной плотности отклика

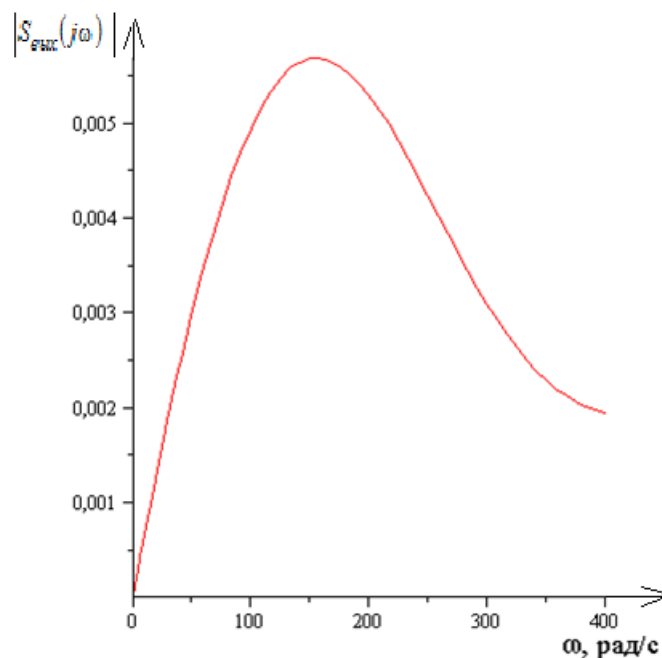


Рис. 19. График спектральной плотности амплитуд выходного сигнала

### Библиографический список

- 1 **Попов, В.П.** Основы теории цепей : учебник для вузов / В. П. Попов. – М. : Высш. школа, 2007. – 575 с.
- 2 **Волков, Е.А.** Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи / Е.А. Волков, Э.И. Санковский, Д.Ю. Сидорович – М. : Маршрут, 2005. – 509 с.
- 3 **Гоноровский, И.С.** Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский. – 5-е изд. – М. : Дрофа, 2006. – 719 с.
- 4 **Баскаков, С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. – 5-е изд. – М. : Высш. шк., 2005. – 462 с.
- 5 **Шебес, М.Р.** Задачник по теории линейных электрических цепей / М.Р. Шебес, М.В. Каплунова. – М.: Высшая школа, 1990.



## Некоторые математические соотношения

### 1 Формулы Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j},$$

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{j} \frac{e^{j2x} - 1}{e^{j2x} + 1}.$$

### 2 Вычисление корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x^2 + px + g = 0,$$

$$x_{1,2} = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - g}.$$

### 3 Неопределенные интегралы

$$\int \cos x dx = \sin x,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x,$$

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x,$$

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x,$$

$$\int x e^{ax} dx = e^{ax} \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right),$$

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \sin nx - n \cos nx),$$

$$\int e^{ax} \cos nx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \cos nx + n \sin nx).$$

## 4 Производные:

$$\frac{d\left(\frac{U}{V}\right)}{dx} = \frac{V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}}{V^2}, \quad V = f(x); \quad U = f(x);$$

$$\frac{d(VU)}{dx} = U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx};$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \quad \frac{de^{ax}}{dx} = ae^x;$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2};$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x;$$

$$\frac{d \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}; \quad \frac{d \operatorname{arccos} \frac{x}{a}}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\frac{d(\operatorname{arctg} y)}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{1 + y^2}, \quad y = f(x).$$

## Приложение II

**Основные свойства преобразования Фурье**

Прямое преобразование Фурье (интеграл Фурье):

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \sum \operatorname{Res} F(p) e^{pt}.$$

Взаимозаменяемость независимых переменных:

$$f(\omega) \div \frac{1}{2\pi} F(-jt).$$

Линейность преобразования Фурье:

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \div \sum_{i=1}^n a_i F_i(j\omega).$$

Дифференцирование функции времени:

двустороннее преобразование

$$\frac{d}{dt} f(t) \div j\omega F(j\omega);$$

одностороннее преобразование

$$\frac{d}{dt} f(t) \div j\omega F(j\omega) - f(0).$$

Интегрирование функции времени:

двустороннее преобразование

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt \div \frac{F(j\omega)}{j\omega};$$

одностороннее преобразование

$$\int_0^t f(t) dt \div \frac{F(j\omega)}{j\omega}.$$

Дифференцирование спектральной характеристики:

$$\frac{d}{d\omega} F(j\omega) \div (-jt)f(t).$$

Интегрирование спектральной характеристики:

$$\int_{-\infty}^{\omega} F(j\omega) d\omega \div \frac{f(t)}{-jt}.$$

Изменение масштаба независимого переменного:

$$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(j\frac{\omega}{a}\right).$$

Смещение функции времени:

$$f(t \pm t_0) \div e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega).$$

Смещение спектральной характеристики:

$$f(t) \cdot e^{\pm j\omega_0 t} \div F[j(\omega \mp \omega_0)].$$

Умножение спектральных характеристик:

двустороннее преобразование

$$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \div \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau;$$

одностороннее преобразование

$$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \div \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau.$$

Произведение функций времени:

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \div \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\Omega) \cdot F_2[j(\omega - \Omega)] d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\Omega) \cdot F_1[j(\omega - \Omega)] d\Omega.$$

Умножение функции времени на косинус:

$$f(t) \cdot \cos \omega_0 t \div \frac{1}{2} \{F[j(\omega - \omega_0)] + F[j(\omega + \omega_0)]\}.$$

Умножение функции времени на синус:

$$f(t) \cdot \sin \omega_0 t \div \frac{1}{2j} \{F[j(\omega - \omega_0)] - F[j(\omega + \omega_0)]\}.$$

Интегрирование произведения функций времени:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) \cdot F_2^*(j\omega) d\omega.$$

Равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega.$$

Нахождение спектральной характеристики отрезка периодической функции при одностороннем преобразовании

$$F_1(j\omega) = (1 - e^{-j\omega n T}) F(j\omega),$$

где  $n$  – целое число,  $T$  – период.

Нахождение функции времени по спектральной характеристике (формулы включения) при одностороннем преобразовании:

$$\frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)} \div \sum_{k=1}^n \frac{F_1(j\omega_k)e^{j\omega_k t}}{\left[ \frac{d}{d\omega} F_2(j\omega) \right]_{\omega=\omega_k}};$$

$$\frac{F_1(j\omega)}{j\omega F_3(j\omega)} \div \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_1(j\omega_k)e^{j\omega_k t}}{\omega_k \left[ \frac{d}{d\omega} F_3(j\omega) \right]_{\omega=\omega_k}}.$$

## Приложение III

### Основные операторные преобразования (по Лапласу)

Прямое преобразование (изображение):

$$F(p) = \int f(t)e^{-pt} dt.$$

Обратное преобразование (оригинал):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_0 - j\infty}^{c_0 + j\infty} F(p)e^{pt} dp = \sum \text{Res} F(p)e^{pt}.$$

Дифференцирование оригинала:

$$f'(t) \div pF(p) - f(0);$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(0)p^{n-k}.$$

Интегрирование оригинала:

$$\int_0^t f(t) dt \div \frac{F(p)}{p};$$

$$\int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^n \div \frac{F(p)}{p^n}.$$

Дифференцирование изображения:

$$F^{(n)}(p) \div (-t)^n f(t).$$

Интегрирование изображения:

$$\int_p^\infty F(p) dp \div \frac{f(t)}{t}.$$

Дифференцирование по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \div \frac{\partial}{\partial x} F(p, x).$$

Интегрирование по параметру:

$$\int_{x_0}^x f(t, x) dx \div \int_{x_0}^x F((p, x)) dx.$$

Теорема подобия (изменение масштаба независимого переменного):

$$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{P}{a}\right).$$

Теорема запаздывания (смещения в области действительного переменного):

$$f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p).$$

Теорема смещения (смещение в области комплексного переменного):

$$e^{\mp \lambda t} f(t) \div F(p \pm \lambda).$$

Предельные соотношения:

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p);$$

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

Теорема свертки (умножение изображений):

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau.$$

Следствие теоремы свертки (интеграл Дюамеля):

$$pF_1(p) \cdot F_2(p) \div \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau;$$

$$pF_1(p) \cdot F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) f'_{2(t)}(t - \tau) d\tau + f_1(t) \cdot f_2(0) = \int_0^t f_2(\tau) f'_{1(t)}(t - \tau) d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t).$$

Умножение оригиналов:

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \div \frac{1}{2\pi j} \int_{C_0-j\infty}^{C_0+j\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq = \sum \operatorname{Re} s F_1(q)F_2(p-q).$$

Умножение оригинала на косинус или синус:

$$\cos \omega_0 t \cdot f(t) \div \frac{1}{2} [F(p - j\omega_0) + F(p + j\omega_0)];$$

$$\sin \omega_0 t \cdot f(t) \div \frac{1}{2} [F(p - j\omega_0) - F(p + j\omega_0)].$$

Интегрирование произведения оригиналов:

$$\int_0^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_0-j\infty}^{C_0+j\infty} F_1(p) \times F_2(-p) dp = \sum \operatorname{Res} F_1(p) \cdot F_2(-p).$$

Аналог равенства Парсеваля:

$$\int_0^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_0-j\infty}^{C_0+j\infty} F(p) \cdot F(-p) dp = \sum \operatorname{Res} F(p) F(-p).$$

Теорема разложения (случай простых корней):

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \div \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{F_2'(p_k)};$$

$$\frac{F_1(p)}{p F_3(p)} \div \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{p_k F_3'(p_k)}.$$

Теорема разложения (случай кратных корней):

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \div \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \times \left[ \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \frac{F_1(p)(p - p_k)^{m_k} k e^{p_k t}}{F_2(p)} \right]_{p=p_k}.$$

## Оригиналы и изображения по Лапласу

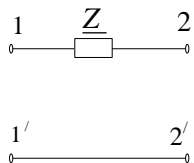
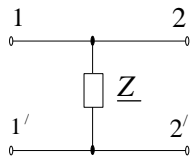
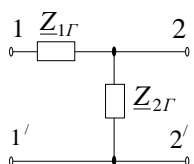
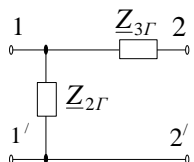
$F(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^2}$	$t$
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ( $n$ – целое положительное число)
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^3}$	$t\left(1-\frac{a}{2}t\right)e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \cdot e^{-at}$ ( $n$ – целое положительное число)
$\frac{p^n}{(p+a)^{n+1}}$	$e^{-at} \sum_{k=0}^n \frac{n!(-a)^k}{(n-k)!(k!)^2} \cdot t^k \cdot e^{-at}$ ( $n$ – целое положительное число)
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$

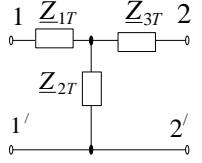
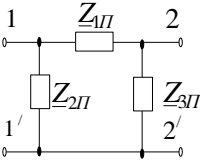


$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{(b-a)} \left( \frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{ae^{-at}}{(c-a)(a-b)} + \frac{be^{-bt}}{(a-b)(b-c)} + \frac{ce^{-ct}}{(b-c)(c-a)}$
$\frac{p^2}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{a^2 e^{-at}}{(c-a)(a-b)} + \frac{b^2 e^{-bt}}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2 e^{-ct}}{(b-c)(c-a)}$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt} [1 - (a-b)t]}{(a-b)^2}$
$F(p)$	$F(t)$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{[a - b(a-b)t] e^{-bt} - ae^{-at}}{(a-b)^2}$
$\frac{1}{(p+a) + b^2}$	$\frac{e^{-at}}{b} \sin bt$
$\frac{(p+a)}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
$\frac{p}{(p+a)^2 + b^2}$	$\left( \cos bt - \frac{a}{b} \sin bt \right) e^{-at}$
$\frac{(p+a)}{(p+a)^2 - b^2}$	$e^{-at} \operatorname{ch} bt$
$\frac{b}{(p+a)^2 - b^2}$	$e^{-at} \operatorname{sh} bt$
$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{p^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$

$\frac{p \cos b - a \sin b}{p^2 + a^2}$	$\cos(at + b)$
$\frac{p \sin b - a \cos b}{p^2 + a^2}$	$\sin(at + b)$
$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{ch} at$
$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a}(1 - \cos at)$
$\frac{1}{p^2(p^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^3}(at - \sin at)$
$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$
$\frac{p}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}t \sin at$
$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at + at \cos at)$
$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$F(p)$	$F(t)$
$\frac{1}{p(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{a^4(1 - \cos at) - \frac{1}{2a^3}t \sin at}$
$\frac{1}{p^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{sh} at - \sin at)$
$p^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$p^{-\frac{3}{2}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$

## А-параметры типовых 4-полюсников

№ п/п	Схема и наименование 4-х-полюсника	А-параметры			
		$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{21}$	$A_{22}$
1	 <p>Одноэлементный последовательный</p>	1	$\underline{Z}$	0	1
2	 <p>Одноэлементный параллельный</p>	1	0	$\frac{1}{\underline{Z}}$	1
3	 <p>Г-образный с Т-входом</p>	$1 + \frac{\underline{Z}_{1r}}{\underline{Z}_{2r}}$	$\underline{Z}_{1r}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{2r}}$	1
4	 <p>Г-образный с П-входом</p>	1	$\underline{Z}_{3r}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{2r}}$	$1 + \frac{\underline{Z}_{3r}}{\underline{Z}_{2r}}$

5	 <p style="text-align: center;">Т-образный</p>	$1 + \frac{Z_{1T}}{Z_{2T}}$	$\frac{Z_{1T} + Z_{3T}}{Z_{2T}} + \frac{Z_{1T} Z_{3T}}{Z_{2T}}$	$\frac{1}{Z_{2T}}$	$1 + \frac{Z_{3T}}{Z_{2T}}$
6	 <p style="text-align: center;">П-образный</p>	$1 + \frac{Z_{1П}}{Z_{3П}}$	$Z_{1П}$	$\frac{1}{Z_{2П}} + \frac{1}{Z_{3П}} + \frac{Z_{1П}}{Z_{2П} Z_{3П}}$	$1 + \frac{Z_{1П}}{Z_{2П}}$

## Содержание

Задание на курсовую работу .....	3
Номера вариантов и числовые данные задания .....	4
Варианты схем .....	11
Варианты сигналов.....	24
Методические указания по выполнению задания .....	51
1 Расчет переходной и импульсной характеристик .....	51
2 Определение отклика на заданный сигнал методом интеграла Дюамеля.....	57
3 Определение комплексного коэффициента передачи, АЧХ, ФЧХ и ГВЗ .....	61
4 Определение A-параметров заданной цепи .....	65
5 Получение выражений для $K(j\omega)$ , АЧХ, ФЧХ, ГВЗ цепи при заданной нагрузке $Z_H$ через A-параметры .....	66
6 Вычисление характеристических и рабочих параметров четырёхполюсника .....	68
7 Определение спектра периодического сигнала.....	71
8 Определение спектра непериодического сигнала .....	74
9 Определение отклика цепи на заданный непериодический сигнал спектральным методом.....	79
Библиографический список.....	80
Приложения.....	81

*Учебное издание*

**Нечес Игорь Олегович  
Пирогова Наталья Дмитриевна**

## **АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Учебно-методическое пособие

Редактор Т.М. Чеснокова

Корректор Т.М. Чеснокова

Подписано в печать 18.09.2013. Формат 60x84/16.

Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 5,3.

Уч.-изд.л. 5,06. Тираж экз. Изд. № 199. Заказ № .

Ростовский государственный университет путей сообщения.

Ризография РГУПС.

---

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового  
Полка Народного Ополчения, 2.