p.429

Решите следующие дифференциальные уравнения применив принцип суперпозиций. Например, в 33, решите три дифференциальных уравнения, в которых правая часть уравнения равно трем разным скобкам. Необходимо иметь в виду, что члены с одинаковым экспоненциальным множителем должны находится вместе, таким образом полиномы каждой степени будут находится в одной скобке.

Номера: 33-34-36-38

33. $y'' + y = [x^3 - 1] + [2\cos x] + [(2 - 4x)e^x]$

34. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x + 6x - 5$

35. $(D^2 - 1)y = \sinh x$

36. $(D^2 + 1)y = 2\sin x + 4x\cos x$

37. $(D - 1)^2 y = 4e^x + (1 - x)(e^{2x} - 1)$

38. $y'' - 2y' = 9xe^{-x} - 6x^2 + 4e^{2x}$

p.438

2. Используя L2 проверить L7 и L8 таблице преобразований Лапласа (см. Ниже).
3. Используя L2 или L3 и L4, проверить L9 и L10.
4. Продифференцировав соответствующую формулу относительно a, проверить L12
5. Проинтегрировав соответствующую формулу относительно a, проверить L19.

p.442

Используя преобразования Лапласа, решить следующие дифференциальные уравнения.

2. $y' - y = 2e^t, \qquad y_0 = 3$

3. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t},$ $y_0 = 0,\ y_0' = 4$

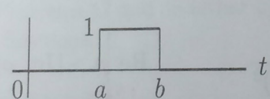
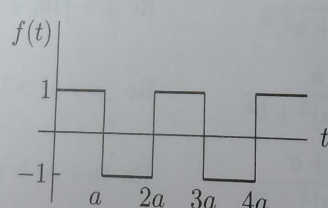
4. $y'' + y = \sin t,$ $y_0 = 1,\ y_0' = 0$

5. $y'' + y = \sin t,$ $y_0 = 0,\ y_0' = -\frac{1}{2}$

6. $y'' - 6y' + 9y = te^{3t},$ $y_0 = 0,\ y_0' = 5$

7. $y'' - 4y' + 4y = 4,$ $y_0 = 0,\ y_0' = -2$

	$y = f(t),\ t > 0$ $[y = f(t) = 0,\ t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$	
L1	1	$\frac{1}{p}$	Re $p > 0$
L2	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	Re $(p+a) > 0$
L3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$
L4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$
L5	$t^k,\ k > -1$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$	Re $p > 0$
L6	$t^k e^{-at},\ k > -1$	$\frac{k!}{(p+a)^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{(p+a)^{k+1}}$	Re $(p+a) > 0$
L7	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	Re $(p+a) > 0$ Re $(p+b) > 0$
L8	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	Re $(p+a) > 0$ Re $(p+b) > 0$
L9	$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	Re $p > \lvert \text{Re } a \rvert$
L10	$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	Re $p > \lvert \text{Re } a \rvert$
L11	$t \sin at$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$
L12	$t \cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$
L13	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	Re $(p+a) > \lvert \text{Im } b \rvert$
L14	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	Re $(p+a) > \lvert \text{Im } b \rvert$
L15	$1 - \cos at$	$\frac{a^2}{p(p^2+a^2)}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$
L16	$at - \sin at$	$\frac{a^3}{p^2(p^2+a^2)}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$
L17	$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$

	$y = f(t),\ t > 0$ $[y = f(t) = 0,\ t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$	
L18	$e^{-at}(1 - at)$	$\dfrac{p}{(p+a)^2}$	Re $(p+a) > 0$
L19	$\dfrac{\sin at}{t}$	$\arctan \dfrac{a}{p}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$
L20	$\dfrac{1}{t} \sin at \cos bt$, $a > 0,\ b > 0$	$\dfrac{1}{2}\left(\arctan \dfrac{a+b}{p} + \arctan \dfrac{a-b}{p}\right)$	Re $p > 0$
L21	$\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\ln \dfrac{p+b}{p+a}$	Re $(p+a) > 0$ Re $(p+b) > 0$
L22	$1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right),\quad a > 0$ (See Chapter 11, Section 9)	$\dfrac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$	Re $p > 0$
L23	$J_0(at)$ (See Chapter 12, Section 12)	$(p^2 + a^2)^{-1/2}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$; or Re $p \geq 0$ for real $a \neq 0$
L24	$u(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$ (unit step, or Heaviside function)	$\dfrac{1}{p} e^{-pa}$	Re $p > 0$
L25	$f(t) = u(t-a) - u(t-b)$ 	$\dfrac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$	All p
L26		$\dfrac{1}{p} \tanh\left(\frac{1}{2}ap\right)$	Re $p > 0$
L27	$\delta(t-a),\ a \geq 0$ (See Section 11)	e^{-pa}	
L28	$f(t) = \begin{cases} g(t-a), & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$ $= g(t-a)u(t-a)$	$e^{-pa} G(p)$ $[G(p)$ means $L(g)$.]	
L29	$e^{-at} g(t)$	$G(p+a)$	

$y = f(t),\ t > 0$ $[y = f(t) = 0,\ t < 0]$		$Y = L(y) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$
L30	$g(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a} G\left(\frac{p}{a}\right)$
L31	$\frac{g(t)}{t}$	$\int_p^\infty G(u)\, du$
L32	$t^n g(t)$	$(-1)^n \frac{d^n G(p)}{dp^n}$
L33	$\int_0^t g(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{p} G(p)$
L34	$\int_0^t g(t-\tau)h(\tau)\, d\tau = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$	$G(p)H(p)$
L35		

$$\begin{aligned}
L(y') &= pY - y_0 \\
L(y'') &= p^2 Y - p y_0 - y_0' \\
L(y''') &= p^3 Y - p^2 y_0 - p y_0' - y_0'', \text{ etc.} \\
L(y^{(n)}) &= p^n Y - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y_0' - \cdots - y_0^{(n-1)}
\end{aligned}$$