МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
ВСЕРОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ ИНСТИТУТ
ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

3/1/10-88

Одобрено кафедрой
Высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Рабочая программа и контрольные задания № 1—6
для студентов-заочников I курса
инженерно-технических специальностей

Москва — 1993

Рабочая программа составлена на основе типовой программы по высшей математике для инженерно-технических специальностей, утвержденной 5 июля 1988 г. Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

Авторский коллектив: ст. преп. И. К. Барашкова, канд. техн. наук, доц. К. Н. Бубнова, ст. преп. Г. А. Вершинина, ст. преп. Г. В. Зайцева, ст. преп. З. П. Козлова, канд. техн. наук, ст. преп. А. А. Кудинова, ст. преп. А. В. Майоров, ст. преп. З. Г. Масленникова, Л. И. Павленко, ст. преп. Д. П. Полозков, д-р физ.-мат. наук, проф. А. А. Шестаков.

Под редакцией д-ра физ-мат. наук, проф. **А. А. Шестакова** и канд. техн. наук, доц. **К. Н. Бубновой**.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельное изучение дисциплины. Поэтому в начале программы приведен список рекомендуемой литературы, а в самой рабочей программе указаны разделы и параграфы учебников, соответствующих указанным вопросам. Приведены и номера задач, которые рекомендуется решить после изучения теоретического материала. Причем, указания по изучению рекомендуемой литературы и по решению задач даны в двух вариантах («а» и «б»).Студент может выбрать один из вариантов в зависимости от того, какие учебники он имеет. Если у студента нет рекомендуемых учебников, то он может подобрать любой другой по курсу высшей математики для инженерно-технических специальностей.

Для студентов-заочников в институте, его филиалах и учебно-консультационных пунктах организуются лекции и практические занятия, но они не могут охватить все вопросы программы и носят установочный характер. Поэтому основное значение в изучении предмета имеет самостоятельная работа студента-заочника и консультации преподавателей, которые в институте, его филиалах и УКП организованы регулярно.

В конце программы для каждого семестра дан перечень знаний и умений студента, которые он должен приобрести в процессе изучения приведенной программы. Обладая полученными знаниями, умениями и навыками, можно приступать к выполнению контрольных работ. Следует отметить, что навыки и умения приобретаются только при решении достаточного количества задач по изучаемым темам. Выполнение контрольных работ — это завершающий этап изучения соответствующих разделов высшей математики. Если студентом достаточно глубоко изучены разделы программы, то он в состоянии выполнить контрольную работу самостоятельно. В случае затруднений при изучении вопросов программы и выполнения контрольных работ студент всегда может получить консультацию преподавателя.

Каждую выполненную работу сдают (или высылают почтой) для проверки в институт (в Москве) или в учебно-консультационный пункт института (в другом городе). Преподаватель-рецензент проверяет правильность решения каждой задачи и отмечает ошибки решения или недостатки оформления контрольной работы. В конце работы пишется рецензия на ее выполнение, где отмечаются недостатки и достоинства решения задач, а также выносится окончательное заключение «Работа допущена к зачету» или «Работа не допущена к зачету». Во втором случае рецензент подробно указывает причины и дает рекомендации по исправлению ошибок. В той же тетради после рецензии преподавателя студент должен исправить решения указанных рецензентом задач и вновь отдать контрольную работу на проверку. Зачет по контрольной работе студент может получить лишь после беседы с преподавателем.

Каждую контрольную работу следует выполнять в тетради, оставив в ней поля для замечаний преподавателя-рецензента. На обложке тетради должна быть надпись, где указывается: дисциплина, номер контрольной работы, номер (или название) учебной группы, курс, фамилия, имя, отчество студента. Работа выполняется аккуратно, любыми чернилами, кроме красных. В ней должны быть даны четкие пояснения к решению задач. В конце работы студент ставит дату выполнения и свою подпись.

Ниже приводятся:

1. Список рекомендуемой литературы.
2. Рабочая программа по высшей математике для I курса (I и II семестры).
3. Задачи для контрольных работ № 1—6.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1984, 1987.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. I. М.: Наука, 1970—1985.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1980.
4. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики, Т. 1. М.: Высшая школа, 1978.
5. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1955—1987.
6. Шестаков А. А., Малышева И. А., Полозков Д. П. Курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1987.
7. Бугров Я. С., Никольский С. М. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Наука, 1978.
8. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1980.
9. Шипачев В. С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1985.

В первом семестре изучаются разделы:

I. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии.

II. Элементы линейной алгебры.

III. Введение в математический анализ.

После изучения каждого раздела студент выполняет соответствующую контрольную работу. Всего в первом семестре студент должен выполнить три контрольные работы: № 1—3.

Во втором семестре изучаются разделы:

IV. Производные функции одной переменной и ее приложения.

V. Неопределенный и определенный интегралы.

После изучения IV раздела студент выполняет контрольные работы № 4 и 5. После изучения V раздела студент выполняет контрольную работу № 6. Задачи для контрольных работ разбиты на 10 вариантов. Номера задач для контрольных работ № 1—6 для каждого из десяти вариантов указаны в табл. 1.

Номер варианта контрольных работ, которые выполняет студент, определяется последней цифрой учебного шифра, который стоит в зачетке.

Например: студент с шифром 93-АТС-841643 выполняет все шесть контрольных работ по варианту № 3. В контрольной работе № 1 это будут задачи № 3, 13, 23, 33, 43, 53, в контрольной работе № 2 это будут задачи № 63, 73, 83, 93, 103. По тому же принципу берутся задачи для остальных контрольных работ.

Таблица 1

Номер варианта	Номер контрольной работы		
	1	2	3
1	1 11 21 31 41 51	61 71 81 91 101	111 121 131 141 151 161
2	2 12 22 32 42 52	62 72 82 92 102	112 122 132 142 152 162
3	3 13 23 33 43 53	63 73 83 93 103	113 123 133 143 153 163
4	4 14 24 34 44 54	64 74 84 94 104	114 124 134 144 154 164
5	5 15 25 35 45 55	65 75 85 95 105	115 125 135 145 155 165
6	6 16 26 36 46 56	66 76 86 96 106	116 126 136 146 156 166
7	7 17 27 37 47 57	67 77 87 97 107	117 127 137 147 157 167
8	8 18 28 38 48 58	68 78 88 98 108	118 128 138 148 158 168
V 9	9 19 29 39 49 59	69 79 89 99 109	119 129 139 149 159 169
0	10 20 30 40 50 60	70 80 90 100 110	120 130 140 150 160 170

Окончание табл. 1

Номер варианта	Номер контрольной работы														
	4					5					6				
1	171	181	191	201	211	221	231	241	251	261	271	281	291	301	311
2	172	182	192	202	212	222	232	242	252	262	272	282	292	302	312
3	173	183	193	203	213	223	233	243	253	263	273	283	293	303	313
4	174	184	194	204	214	224	234	244	254	264	274	284	294	304	314
5	175	185	195	205	215	225	235	245	255	265	275	285	295	305	315
6	176	186	196	206	216	226	236	246	256	266	276	286	296	306	316
7	177	187	197	207	217	227	237	247	257	267	277	287	297	307	317
8	178	188	198	208	218	228	238	248	258	268	278	288	298	308	318
V 9	179	189	199	209	219	229	239	249	259	269	279	289	299	309	319
0	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

I. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Определители второго и третьего порядков, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Вычисление определителя разложением по элементам строки (столбца). Понятие об определителе n-го порядка ($n>3$).

а) [1, гл. V, § 2; 3, гл. I, § 5, № 217, 218, 222—224];
б) [4, гл. II, § 1; 5, гл. IV, № 522—601].

2. Системы декартовых координат на плоскости и в пространстве. Векторы. Линейная комбинация векторов; линейно зависимые и линейно независимые векторы. Базис на плоскости и в пространстве.

3. Способы задания векторов в трехмерном базисе: начало и конец вектора, направляющие косинусы и модуль, проекции вектора на оси координат. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме.

4. Скалярное произведение векторов; основные свойства. Вычисление скалярного произведения векторов, заданных в координатной форме.

5. Угол между двумя векторами. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.

6. Векторное произведение двух векторов; основные свойства. Вычисление векторного произведения двух векторов, заданных в координатной форме.

7. Геометрический смысл векторного произведения. Приложения векторного произведения: момент сил, скорость точки вращающегося тела, сила, действующая на проводник с током в магнитном поле и др.

8. Смешанное произведение трех векторов; его основные свойства и вычисление. Геометрический смысл.

а) [1, гл. I, § 1, 2, 3; гл. II, № 243, 244, 248, 254, 255, 258, 259, 260, 261, 265, 272, 282];
б) [4, гл. II, § 3, 4, 5; 5, гл. II, № 391, 399, 400, 405—407, 423, 427, 434, 438].

9. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми; условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

а) [1, гл. II, § 2, 3; 3, гл. I, § 2, № 63—66, 70, 73, 74, 80—82, 85];
б) [4, гл. III, § 1; 5, гл. 1, № 61, 62, 64, 79, 82, 114, 134].

10. Полярные координаты на плоскости, их связь с декартовыми координатами. Уравнение линии в полярной системе координат.

а) [1, гл. 1, § 2; 3, гл. I, § 1, № 26, 28, 34, 35, 39, 40];
б) [4, гл. 1, § 2].

11. Кривые второго порядка: окружность и эллипс, их канонические уравнения. Эксцентриситет и директрисы эллипса.

12. Кривые второго порядка: гипербола и парабола, их канонические уравнения, эксцентриситет и директрисы.

а) [1, гл. III, § 3; 3, гл. I, § 3, № 128, 130, 136, 144, 146, 149, 154, 155, 162, 167, 169];
б) [4, гл. III, § 2]; 5, гл. I, № 141, 142, 149, 165, 166, 168, 174, 199, 204, 214, 215, 217, 219].

13. Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости.

14. Уравнения пространственной прямой в канонической форме. Уравнения прямой, проходящей через две точки.

15. Угол между плоскостями; угол между прямыми; угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности.

16. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

а) [1, гл. II, § 2, 3]; 3, гл. III, № 288, 289, 293, 294, 297. 305, 308, 314, 320, 321, 326];
б) [4, гл. IV, § 1—3]; 5, гл. III, № 450—453, 467, 472, 474, 480, 494, 501, 515, 522].

17. Поверхности второго порядка: сфера, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды.

18. Уравнение поверхности в пространстве. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения.

19. Цилиндрические и сферические координаты, их связь с декартовыми координатами.

а) [1, гл. III, § 4]; [3, гл. III, § 2, № 345, 348, 349, 353, 356, 366, 371, 372];

б) [4, гл. IV, § 4]; [5, гл. III, № 568, 570, 580].

II. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

20. Матрицы, основные определения. Алгебра матриц: сложение, умножение на число, произведение матриц.

21. Обратная матрица. Решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

а) [1, гл. V, § 1, 4, 6]; 3, гл. IV, § 2, 4, № 394—396, 406];

б) [4, гл. II, § 6].

22. Решение системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера: в случае однородных и неоднородных уравнений.

а) [1, гл. V, § 3];

б) [4, гл. II, § 2; 5, гл. IV, № 616—623, 629].

23. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса в случае, когда число уравнений равно числу неизвестных.

24. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса в случае, когда число неизвестных больше числа уравнений.

а) [1, гл. V, § 5];

б) [4, гл. II, § 7].

25. Геометрический смысл линейного неравенства. Решение системы линейных неравенств.

[5, гл. I, № 71, 72].

26. Линейные преобразования, их матрицы. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования.

27. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

а) [1, гл. VI, § 4; 3, гл. III, § 2, § 3, № 403, 404,405, 406, 409, 410];

б) [4, гл. II, § 8].

III. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

28. Комплексные числа, геометрическое истолкование комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Формулы Эйлера.

29. Алгебраические действия с комплексными числами. Корни из комплексных чисел.

а) [1, гл. V, § 7] или [2, гл. VII, § 1—5];

б) [5, гл. IV, № 630—633, 640, 643—645, 658].

30. Формулировка основной теоремы алгебры. Теорема

Безу. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители.

а) [2, гл. VIII, § 6, 7, 8];

б) [5, гл. IV, № 660, 661].

31. Предмет математического анализа. Рациональные и иррациональные числа. Геометрическое истолкование действительных чисел. Функции и графики. Область определения и область значений функции. Способы задания функции. Основные элементарные функции и их свойства.

32. Обратные функции. Сложные функции.

а) [2, гл. I, § 1—9, гл. III, § 13];

б) [4, гл. I, § 1, 4; 5, гл. V, № 675, 683, 684, 700].

33. Числовая последовательность, предел числовой последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.

34. Предел функции на бесконечности.

35. Односторонние пределы функции. Предел функции в точке.

а) [2, гл. II, § 1—3, упр. к гл. II, № 11—26];

б) [4, гл. V, § 1; 5, гл. V, № 702, 703, 734—756, 763—767].

36. Непрерывность функций в точке. Непрерывность основных элементарных функций.

37. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений.

а) [2, гл. II, § 10, упр. № 57—59];

б) [4, гл. V, § 2]; 5, гл. V, № 814—816, 820, 836—839].

38. Основные теоремы о пределах.

39. Сравнение бесконечно малых функций: бесконечно малые одного порядка, эквивалентные.

а) [2, гл. II, § 1; упр. к гл. II, № 60—62];

б) [4, гл. V, § 1; 5, гл. V, № 805, 806].

В результате изучения программы первого семестра студент должен уметь:

1. Вычислять определители второго и третьего порядков разложением по элементам строки или столбца, а также используя свойства определителей.

2. Найти модуль и направляющие косинусы вектора, если заданы координаты начальной и конечной точек вектора или его проекции на оси координат, т. е. координаты вектора.

3. Найти сумму и разность векторов, заданных в координатной форме, а также умножить вектор на число.

4. Найти векторное и скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме.

5. Найти угол между двумя векторами (с помощью скалярного произведения).

6. Найти смешанное произведение трех векторов, заданных в координатной форме, определить компланарность трех векторов.

7. Уметь записать уравнение прямой на плоскости в различных формах: в общем виде, проходящей через две точки, проходящей через одну точку с заданным угловым коэффициентом, в отрезках.

8. Найти угловой коэффициент плоской прямой из ее уравнения; найти угловой коэффициент перпендикулярной и параллельной прямой.

9. Записать координаты точки в полярной системе координат, если они даны в декартовой системе координат, и наоборот. Записать уравнение линии в декартовой системе координат, если оно дано в полярной системе координат, и наоборот.

10. Узнавать линии второго порядка (окружность, эллипс, гиперболу, параболу) по их уравнениям.

11. Уметь записать уравнение плоскости, проходящей через три точки и в случае, когда известна одна точка плоскости и вектор, перпендикулярный к ней.

12. Записать уравнения пространственной прямой, проходящей через две точки. Найти угол между двумя прямыми.

13. Найти угол между плоскостями и угол наклона прямой к плоскости.

14. Уметь найти сумму и произведение двух матриц, а также произведение матрицы на число.

15. Найти обратную матрицу.

16. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы (матричным методом).

17. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

18. Применить метод Гаусса к решению систем линейных уравнений в случае, когда число уравнений равно числу неизвестных, и когда число уравнений меньше числа неизвестных.

19. Уметь перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической и показательной, и обратно.

20. Уметь выполнять алгебраические действия с комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

21. Уметь строить графики основных элементарных функций, используя приемы: «растяжение», «сжатие» и «сдвиг».

22. Находить предел функции на бесконечности и в точке.

23. Находить односторонние пределы функции в точке.

24. Знать значения первого и второго замечательных пределов и уметь их использовать при нахождении пределов более сложных выражений.

25. Использовать понятие бесконечно малых и эквивалентных бесконечно малых при определении пределов функций.

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

IV. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Связь дифференцируемости и непрерывности функции.

2. Производные основных элементарных функций. Дифференцирование суммы, разности произведения и частного.

а) [2, гл. III, § 1—3, 5—7, 10, 11];
б) [4, гл. VI, § 1; 5, гл. VI, № 849—873, 905—909, 937, 939, 972, 974].

3. Производные обратных функций.

4. Производные обратных тригонометрических функций.

5. Производные сложных функций.

6. Дифференцирование неявных функций.

а) [2, гл. III, § 9, 13; упр. к гл. III, № 1—70, 116—130, 142—150];
б) [4, гл. VI, § 1; 5, гл. VI, № 874—903].

7. Дифференциал функции, его геометрический и механический смысл. Приближенное вычисление значений функции с помощью дифференциала. Линеаризация.

8. Правило нахождения дифференциала. Инвариантность формы дифференциала.

а) [2, гл. III, § 20, 21];
б) [4, гл. VI, § 3; 5, гл. VI, № 1064—1068, 1070].

9. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

а) [2, гл. III, упр. 152—156];
б) [4, гл. VI, § 4; 5, гл. VI, № 1079, 1080].

10. Производные и дифференциалы высших порядков.

а) [2, гл. III, § 22, 23, 25, упр. 172—182, 203, 204];
б) [4, гл. VI, § 2].

11. Теоремы о дифференцируемых функциях: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа.

12. Теорема Лопиталя. Правило Лопиталя для вычисления предела отношения двух функций.

а) [2, гл. IV, § 1—5, упр. 1—10, 18—35];
б) [4, гл. VI, § 6; 5, гл. VII, № 1122—1130, 1148—1152].

13. Теоремы о монотонных функциях (условия возрастания и убывания функций).

14. Экстремумы функции, локальные и глобальные. Необходимые условия существования экстремумов.

15. Достаточные условия существования экстремумов (критерий первой и второй производных).

16. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

а) [2, гл. V, § 1, 2, 4—6, упр. 1—9, 32—36];

б) [4, гл. VI, § 7; 5, гл. VII, № 1164, 1167, 1176, 1222, 1223].

17. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия существования точек перегиба.

а) [2, гл. V, § 9, упр. 62—71];

б) [4, гл. VI, § 7; 5, гл. VII, № 1247].

18. Асимптоты кривых: вертикальные и наклонные.

а) [2, гл. V, § 10, упр. 72—80];

б) [4, гл. VI, § 7; 5, гл. V, № 827, 828, 835].

19. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

а) [2, гл. V, § 11, упр. 81—86];

б) [4, гл. VI, § 7; 5, гл. VII, № 1247].

20. Векторная функция скалярного аргумента. Производная, ее геометрический и механический смысл.

21. Кривизна плоской и пространственной кривой.

а) [2, гл. IX, § 1—4];

б) [4, гл. VIII, § 4; 5, гл. X, № 1778, 1779, 1783, 1812, 1829].

V. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

22. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов.

23. Интегрирование путем замены переменной.

24. Интегрирование по частям.

25. Интегрирование квадратного трехчлена.

26. Интегрирование рациональных функций.

27. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций.

28. Интегрирование некоторых классов иррациональных функций.

29. Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.

а) [2, гл. X, § 1—13, упр. к гл. X, № 1—40, 127—134, 147—156, 160, 189—195, 170—172, 176];

б) [4, гл. VII, § 1—6; 5, гл. VIII, № 1264—1288, 1299, 1300, 1307, 1308, 1311, 1318, 1340, 1342, 1360—1365, 1383, 1387, 1419, 1420].

30. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Его геометрический и механический смысл и свойства.

31. Теорема о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.

32. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

33. Приближенное вычисление определенных интегралов: формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

а) [2, гл. XI, § 1—6, 8];

б) [4, гл. VIII, § 1, 2, 6; 5, гл. IX, № 1593—1600, 1616—1621].

34. Геометрические и физические приложения определенного интеграла: площадь, объем, длина, энергия, работа:

а) [2, гл. XII, § 1, 3, 5, 7, 8];

б) [4, гл. VIII, § 3; 5, гл. IX, № 1625, 1627, 1629, 1635, 1670, 1683].

35. Несобственные интегралы: в бесконечных пределах и от разрывных функций. Признаки сходимости.

а) [2, гл. XI, § 7, упр. 29—34];

б) [4, гл. VIII, § 5; 5, гл. IX, № 1748, 1750, 1753, 1754].

В результате изучения программы второго семестра студент должен уметь:

1. Находить производную любой функции.

2. Применять основные теоремы о дифференцируемых функциях, необходимых и достаточных условиях существования экстремумов и точек перегиба для построения графика функции (т. е. уметь найти экстремумы, точки перегиба, асимптоты, интервалы монотонности, интервалы выпуклости и вогнутости графика функции).

3. Находить пределы функции, используя правило Лопиталя (там, где это возможно).

4. Уметь сформулировать и применить при решении задач геометрический и физический смысл первой и второй производных.

5. Знать определение первоообразной функции и неопределенного интеграла.

6. Знать и уметь использовать таблицу основных неопределенных интегралов.

7. Уметь пользоваться методом замены переменной при интегрировании.

8. Уметь использовать метод интегрирования по частям.

9. Уметь пользоваться справочником по высшей математи-

ке для отыскания первообразной функции и неопределенного интеграла.

10. Знать определение, геометрический и физический смысл определенного интеграла.

11. Уметь использовать формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенных интегралов, в том числе и в случае замены переменной и интегрирования по частям.

12. Уметь использовать формулы приближенного вычисления определенных интегралов с применением стандартных программ для ПМК и ЭВМ.

13. С помощью определеного интеграла уметь вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками известных функций.

14. Уметь вычислить с помощью определенного интеграла объем тела вращения и длину дуги.

15. Уметь устанавливать сходимость несобственного интеграла и вычислять его в случае, когда он существует (сходится).

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ № 1—6

I. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1—10. Даны векторы: $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$, $\bar{c}(c_1;\ c_2;\ c_3)$ и $\bar{d}(d_1;\ d_2;\ d_3)$ в прямоугольной декартовой системе координат. Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

1. $\bar{a}(4, 5, 2)$, $\bar{b}(3, 0, 1)$, $\bar{c}(-1, 4, 2)$, $\bar{d}(5, 7, 8)$.
2. $\bar{a}(3, -5, 2)$, $\bar{b}(4, 5, 1)$, $\bar{c}(-3, 0, -4)$, $\bar{d}(-4, 5, -16)$.
3. $\bar{a}(-2, 3, 5)$, $\bar{b}(1, -3, 4)$, $\bar{c}(7, 8, -1)$, $\bar{d}(1, 20, 1)$.
4. $\bar{a}(1, 3, 5)$, $\bar{b}(0, 2, 0)$, $\bar{c}(5, 7, 9)$, $\bar{d}(0, 4, 16)$.
5. $\bar{a}(2, 4, -6)$, $\bar{b}(1, 3, 5)$, $\bar{c}(0, -3, 7)$, $\bar{d}(3, 2, 52)$.
6. $\bar{a}(4, 3, -1)$, $\bar{b}(5, 0, 4)$, $\bar{c}(2, 1, 2)$, $\bar{d}(0, 12, -6)$.
7. $\bar{a}(3, 4, -3)$, $\bar{b}(-5, 5, 0)$, $\bar{c}(2, 1, -4)$, $\bar{d}(8, -16, 17)$.
8. $\bar{a}(-2, 1, 7)$, $\bar{b}(3, -3, 8)$, $\bar{c}(5, 4, -1)$, $\bar{d}(18, 25, 1)$.
9. $\bar{a}(1, 0, 5)$, $\bar{b}(3, 2, 7)$, $\bar{c}(5, 0, 9)$, $\bar{d}(-8, 2, -16)$.
10. $\bar{a}(2, 1, 0)$, $\bar{b}(4, 3, -3)$, $\bar{c}(-6, 5, 7)$, $\bar{d}(34, 5, -26)$.

11—15. Даны координаты точек A_1, A_2, A_3, A_4.
Найти:

1) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$;
2) площадь треугольника $A_1A_2A_3$;
3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
4) уравнение перпендикуляра к плоскости $A_1A_2A_3$, проходящего через точку A_4;
5) убедиться, что точка A_4 принадлежит плоскости $A_1A_2A_3$.

11. $A_1(3;\ 7;\ 7)$, $A_2(8;\ 5;\ 6)$, $A_3(8;\ 5;\ 3)$, $A_4(8;\ 5;\ 8)$.
12. $A_1(2;\ 2;\ 7)$, $A_2(7;\ 7;\ 5)$, $A_3(1;\ 3;\ 5)$, $A_4(-1;\ 5;\ 1)$.
13. $A_1(2;\ 8;\ 1)$, $A_2(6;\ 2;\ 5)$, $A_3(4;\ 7;\ 5)$, $A_4(6;\ 4;\ 7)$.
14. $A_1(4;\ 5;\ 3)$, $A_2(0;\ 8;\ 5)$, $A_3(4;\ 2;\ 1)$, $A_4(8;\ 8;\ 5)$.
15. $A_1(5;\ 2;\ 2)$, $A_2(1;\ 5;\ 2)$, $A_3(5;\ 0;\ 4)$, $A_4(5;\ 4;\ 0)$.

16—20. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4.
Найти:

1) длину ребра A_1A_4;
2) угол между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
4) уравнения прямой A_1A_2;
5) объем пирамиды.

16. $A_1(4;\ 6;\ 8)$, $A_2(5;\ 5;\ 10)$, $A_3(8;\ 6;\ 4)$, $A_4(7;\ 10;\ 8)$.
17. $A_1(5;\ 6;\ 6)$, $A_2(5;\ 9;\ 4)$, $A_3(11;\ 6;\ 4)$, $A_4(1;\ 9;\ 6)$.
18. $A_1(6;\ 6;\ 5)$, $A_2(2;\ 8;\ 5)$, $A_3(8;\ 9;\ 5)$, $A_4(6;\ -2;\ -1)$.
19. $A_1(5;\ 6;\ 4)$, $A_2(4;\ 6;\ 6)$, $A_3(10;\ 10;\ 2)$, $A_4(7;\ 4;\ 5)$.
20. $A_1(5;\ 2;\ 4)$, $A_2(2;\ 6;\ 0)$, $A_3(7;\ 2;\ 1)$, $A_4(3;\ 0;\ 3)$.

21. Даны эллипс $x^2/25+y^2/16=1$ и прямая $3x+4y-7=0$. Найти уравнение прямой, проходящей через правый фокус эллипса, перпендикулярно данной прямой.

22. Найти уравнение прямой, проходящей через левый фокус эллипса $x^2/25+y^2/9=1$, перпендикулярно прямой $4x-3y+5=0$.

23. Написать уравнение прямой, проходящей через правый фокус эллипса $9x^2+16y^2=144$ параллельно прямой $7x-y+9=0$.

24. Написать уравнения прямых, проходящих через фокус гиперболы $x^2/16-y^2/9=1$ перпендикулярно ее асимптотам.

25. Написать уравнение прямой, проходящей через левый фокус эллипса $x^2/169+y^2/144=1$ и вершину параболы $y=1-x^2$.

26. Написать уравнение прямой, проходящей через левый фокус гиперболы $x^2/25-y^2/24=1$ и вершину параболы $y=x^2+4x+5$.

27. Написать уравнения прямых, проходящих через вершину параболы $y=x^2+10x+7$ перпендикулярно асимптотам гиперболы $x^2/49-y^2/25=1$.

28. Написать уравнение прямой, проходящей через левый

фокус эллипса $9x^2+16y^2=144$ и центр окружности $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

29. Написать уравнение прямой, проходящей через правый фокус эллипса $9x^2+25y^2=225$ и вершину параболы $y=x^2+4x+5$.

30. Написать уравнение прямой, проходящей через правый фокус гиперболы $16x^2-9y^2=144$ перпендикулярно прямой $7x+9y-11=0$.

31. Найти угол наклона прямой, проходящей через точки $M_0(-1;\ 7;\ 3)$ и $M_1(2;\ 5;\ -3)$, к плоскости $3x-4y+10=0$.

32. Написать уравнения прямой, проходящей через центр сферы $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$, и начало координат. Найти угол наклона этой прямой к плоскости $3x+2y-6z+7=0$.

33. Средствами векторной алгебры найти объем пирамиды, образованной пересечением координатных плоскостей с плоскостью $2x+3y-z+4=0$. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из начала координат.

34. Найти угол наклона прямой, проходящей через точки $M_0(3;\ -6;\ 2)$ и $M_1(7;\ -8;\ -2)$ к плоскости $3x-2y-6z+5=0$.

35. Средствами векторной алгебры найти объем пирамиды с вершинами: $A(6;\ 6;\ 5)$, $B(4;\ 9;\ 5)$, $C(4;\ 6;\ 4)$ и $D(6;\ 9;\ 3)$.

36. Написать уравнение плоскости, которой принадлежит прямая $(x-1)/3=(y+2)/2=z/0$, и точка $M_0(7;\ -2;\ 1)$.

37. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $5x-3y+6z+11=0$, содержащей точку $M_0(11;\ -2;\ 8)$.

38. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $(x-1)/2=(y+3)/9=z/3$, и точку $M_0(9;\ 8;\ -2)$. Найти угол между искомой плоскостью и плоскостью $3x+4y-z+8=0$.

39. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $5x+3y+6z+11=0$ и проходящей через центр сферы $(x-11)^2+(y+2)^2+(z-8)^2=100$.

40. Написать уравнение плоскости, проходящй через точку $M_0(2;\ 7;\ 3)$ перпендикулярно прямой, которая проходит через точки $M_1(2;\ 5;\ 4)$ и $M_2(-3;\ 1;\ 0)$.

41—50. Записать уравнения прямой в канонической форме:

41. $2x+y+z-2=0;\ \ 2x-y-3z+6=0.$
42. $x-3y+2z+2=0;\ \ x+3y+z+14=0.$
43. $x+y+z-2=0;\ \ x-y+2z+2=0.$
44. $x+5y+2z+11=0;\ \ x-y-z-1=0.$
45. $5x+y-3z+4=0;\ \ x-y+2z+2=0.$
46. $4x+y-3z+2=0;\ \ 2x-y+z-8=0.$
47. $6x-7y-4z-2=0;\ \ x+7y-z-5=0.$

48. $6x-5y-4z+8=0;\ \ 6x+5y+3z+4=0.$
49. $2x-3y+z+6=0;\ \ x-3y-2z+3=0.$
50. $4x+y+z+2=0;\ \ 2x-y-3z-8=0.$

51—60. Линия задана уравнением $z=z(\varphi)$ в полярной системе координат.

Требуется:

1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ и придавая φ значения через промежуток $\dfrac{\pi}{8}$;

2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс — с полярной осью;

3) назвать линию.

51. $r=\dfrac{9}{5+4\cos\varphi}$.
52. $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$.
53. $r=\dfrac{2}{1-\cos\varphi}$.
54. $r=\dfrac{16}{5-3\cos\varphi}$.
55. $r=\dfrac{18}{4+5\cos\varphi}$.
56. $r=\dfrac{3}{1+\cos\varphi}$.
57. $r=\dfrac{5}{3+2\cos\varphi}$.
58. $r=\dfrac{6}{2-\cos\varphi}$.
59. $r=\dfrac{4}{1-\cos\varphi}$.
60. $r=\dfrac{3}{1-2\cos\varphi}$.

II. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

61—70. Дана невырожденная матрица A. Найти обратную матрицу A^{-1}; проверить, что $AA^{-1}=E$, где E — единичная матрица.

61. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
66. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
62. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
67. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
63. $A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
68. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

64. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 69. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

65. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 70. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

71—80. Данную систему линейных уравнений записать в матричной форме и решить матричным методом. Сделать проверку найденного решения.

71. $\begin{cases} 2x-y+z=3, \\ 3x+2y+2z=4, \\ x-y+4z=-2. \end{cases}$ 76. $\begin{cases} 3x+2y+2z=3, \\ 2x-y+z=1, \\ 4x+3y+3z=5. \end{cases}$

72. $\begin{cases} 3x+2y-3z=1, \\ 2x+3y-z=-1, \\ x+3y-2z=-2. \end{cases}$ 77. $\begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x-3y-2z=0, \\ 3x+y+2z=0. \end{cases}$

73. $\begin{cases} 2x+3y+z=-3, \\ x-2y+3z=1, \\ 3x-y-z=-7. \end{cases}$ 78. $\begin{cases} 3x+4y+z=1, \\ 2x-y-z=2, \\ x+2y+2z=-4. \end{cases}$

74. $\begin{cases} 2x+3y-2z=0, \\ x+2y+z=-1, \\ 3x+4y+2z=1. \end{cases}$ 79. $\begin{cases} 2x-2y-3z=3, \\ x+y+2z=-1, \\ 2x-y+z=2. \end{cases}$

75. $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 2x-y+2z=6, \\ x+y+5z=-1. \end{cases}$ 80. $\begin{cases} x-2y+3z=-1, \\ 2x+y-z=-7, \\ x-5y+2z=2. \end{cases}$

81—90. Решить систему линейных уравнений методом исключения неизвестных (метод Гаусса). Сделать проверку найденного решения.

81. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=15, \\ 3x_1+4x_2-2x_3+x_4=17, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=8, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=14. \end{cases}$ 86. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4=14, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0, \\ 3x_1-4x_2+x_3+x_4=-2. \end{cases}$

82. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3-5x_4=14, \\ 2x_1+2x_2-x_3+4x_4=8, \\ -x_1+5x_2-2x_3-x_4=-4, \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$ 87. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+6x_4=10, \\ x_1-3x_2-2x_3-x_4=-1, \\ 7x_1 \quad -7x_3+4x_4=-32, \\ 9x_1-7x_2 \quad = 48 \end{cases}$

83. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+6x_4=6, \\ x_1-3x_2-2x_3-x_4=-21, \\ 9x_1-7x_2 \quad =-32, \\ -9x_1+8x_2-11x_3+2x_4=-30. \end{cases}$ 88. $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2 \quad -6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

84. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=3, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=2, \\ x_1 \quad -2x_3-3x_4=1. \end{cases}$ 89. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases}$

85. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3. \end{cases}$ 90. $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4=4, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+x_2+2x_3+4x_4=2, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=3. \end{cases}$

91—100. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A.

91. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ 96. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

92. $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -8 & -5 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ 97. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

93. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 98. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

94. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 99. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

95 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 100. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

101—110. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, используя теорию квадратных форм и параллельный перенос системы координат. Сделать чертеж.

101. $\cancel{6xy}+8y^2-12x-26y+11=0.$

102. $x^2-\cancel{6xy}+y^2-4x-4y+12=0.$

103. $3x^2-\cancel{4xy}-2x+4y-5=0.$

—462

104. $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$.
105. $x^2-4xy+4y^2-2x-6=0$.
106. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.
107. $x^2-xy+y^2-2x-2y-2=0$.
108. $3x^2-4xy+x-3y+49/16=0$.
109. $5x^2-2\sqrt{3}xy+7y^2-4\sqrt{3}x-4y-12=0$.
110. $x^2+2xy+y^2+2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=0$.

III. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

111—120. В области действительных чисел выполнить следующие действия:
а) доказать неравенства;
б) вычислить первые четыре значащие цифры.

111. а) $\frac{x+1}{x} \leqslant 2$ при $x>0$; б) $\frac{1}{7}+\sqrt{3}$.

112. а) $\frac{x+1}{x} \leqslant -2$ при $x<0$; б) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$.

113. а) $\left|\frac{x+1}{x}\right| \geqslant 2$ при $x \neq 0$; б) $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$.

114. а) $x^2+xy+y^2 \geqslant 0$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

115. а) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$; б) $\frac{1}{3}+\sqrt{5}$.

116. а) $|x-y| \geqslant |x|-|y|$; б) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

117. а) $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$; б) $\frac{1}{6}+\sqrt{7}$.

118. а) $\sqrt{(x-y)^2} \leqslant \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(y-1)^2}$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$.

119. а) $x^2+3x+10>0$; б) $\frac{1}{7}+\sqrt{11}$.

120. а) $-x^2-5x-20<0$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{11}$.

121—130. Даны два комплексных числа. В случае а) выполнить действия в алгебраической форме; в случае б) найти корни уравнения $\omega^3+z=0$ и отметить их на комплексной плоскости.

121. а) $\left(\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}{3-i}\right)^3$, б) $z=-1+\sqrt{3}i$.

122. а) $\left(\frac{-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}i}{\frac{3}{2}+5i}\right)^{-2}$, б) $z=\sqrt{3}-i$.

123. а) $\left(\frac{-2-8i}{4-i}\right)^5$, б) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

124. а) $\left(\frac{3-i}{-2-6i}\right)^3$, б) $z=1+\sqrt{3}i$.

125. а) $\left(\frac{2-8i}{-4-i}\right)^7$, б) $z=-1-i$.

126. а) $\left(\frac{-1+4i}{2+\frac{1}{2}i}\right)^2$, б) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

127. а) $\left(\frac{-1+\frac{1}{4}i}{\frac{1}{2}+2i}\right)^{-3}$, б) $z=-2+2\sqrt{3}i$.

128. а) $\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$, б) $z=2-2\sqrt{3}i$.

129. а) $\left(\frac{-6+2i}{1+3i}\right)^3$, б) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

130. а) $\left(\frac{-2+7i}{\frac{7}{2}+i}\right)^5$, б) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

131—140. Задана трансцендентная функция $f(x)$. Вычислить с точностью до 0,1 нуль функции графическим методом, представив уравнение $f(x)=0$ в виде $g(x)=h(x)$.

Указание. Нулем функции $f(x)$ будет абсцисса точки пересечения графиков функций $g(x)$ и $h(x)$.

131. $f(x)=2^x+5x$.	132. $f(x)=x^2-6e^x$.
133. $f(x)=x^3+5e^x$.	134. $f(x)=\ln x-5x$.
135. $f(x)=x\ln x-8$.	136. $f(x)=e^x-2x^2$.
137. $f(x)=\ln x-6+7x$.	138. $f(x)=3^x+4x$.
139. $f(x)=4^x+2x$.	140. $f(x)=5^x+3x$.

141—150. Траектория движения точки на плоскости задана параметрическими уравнениями. Построить траекторию движения точки в декартовой системе координат, исключив параметр t. Указать такой промежуток изменения параметра t, на котором параметрические уравнения определяют явную функцию $y=f(x)$.

141. $x=t,\ y=t^2$ при $0\leqslant t\leqslant\infty$.

142. $x=5\cos^2 t,\ y=3\sin^2 t$ при $-\infty<t<\infty$.

143. $x=10\cos t,\ y=\sin t$ при $0\leqslant t<\infty$.

144. $x=\sqrt[t+1]{t},\ \ y=\sqrt[t]{t+1}$ при $0<t<\infty$.

145. $x=5(t-\sin t),\ y=5(1-\cos t)$ при $-\infty<t<\infty$.

146. $x=e^t,\ \ y=e^{2t}$ при $-\infty<t<\infty$.

147. $x=2\cos t,\ y=3\sin t$ при $0\leqslant t<\infty$.

148. $x=3\cos t,\ y=3\sin t$ при $0\leqslant t<\infty$.

149. $x=\cos^2 t,\ y=\sin^2 t$ при $0\leqslant t\leqslant\infty$.

150. $x=\ln t,\ y=\frac{1}{2}t^2$ при $t\geqslant 1$.

151—160. Найти пределы функций.

151. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ при $x_0=2,\ x_0=3,\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-2}$.

152. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ при $x_0=0,\ x_0=2,\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}3x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+5}$.

153. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ при $x_0=3,\ x_0=-3,\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$; 3) $\lim\frac{\cos x-\cos^3 x}{2x\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3}{x-2}}$.

154. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$ при $x_0=-3,\ x_0=-2,\ x=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{7-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}3x}{\operatorname{ctg}6x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5}{x-3}\ln(2x-5)$.

155. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$ при $x_0=2,\ x_0=4,\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x-2}\right)^{2x-3}$.

156. 1) $\lim\frac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$ при $x_0=2,\ x_0=5;\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-2}\right)^{5x-2}$.

157. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$ при $x_0=1,\ x_0=-4,\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{5}{x^2-4}}$.

158. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$ при $x_0=5,\ x_0=-5,\ x=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x\operatorname{tg}2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^{5x+3}$.

159. 1) $\lim \frac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ при $x_0=-2$, $x_0=1$, $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos x-\cos^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{7}{x-3}\ln(3x-8)$.

160. 1) $\lim \frac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ при $x_0=-2$, $x_0=-1$, $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 6x\,\mathrm{ctg}\,2x$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+5}\right)^{2x+7}$.

161—170. Найти точки разрыва функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$; указать характер точек разрыва. Построить схематически графики этих функций.

161. а) $f_1(x)=\frac{2x^2-9x+4}{x-4}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}1-x \text{ при } x\leqslant 1,\\ (1-x)^2 \text{ при } 1<x\leqslant 3,\\ x \text{ при } x\geqslant 3.\end{cases}$

162. а) $f_1(x)=\frac{3x^2+2x-16}{x-2}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\cos x \text{ при } x<0,\\ x \text{ при } 0\leqslant x<3,\\ x^2-6 \text{ при } x\geqslant 3.\end{cases}$

163. а) $f_1(x)=\frac{4x^2+3x-7}{x-1}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\sin x \text{ при } x\leqslant 0,\\ 2x^2 \text{ при } 0<x<2,\\ 3x-2 \text{ при } x\geqslant 2.\end{cases}$

164. а) $f_1(x)=\frac{5x^2-9x-18}{x-3}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}2\cos x \text{ при } x\leqslant 0,\\ 2-x \text{ при } 0<x<3,\\ x^2-6x+10 \text{ при } x\geqslant 3.\end{cases}$

165. а) $f_1(x)=\frac{2x^2-9x-18}{x-6}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}1-2x \text{ при } x<0,\\ 2\,\mathrm{tg}\,x+1 \text{ при } 0\leqslant x<\frac{\pi}{4},\\ x-3 \text{ при } x\geqslant\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

166. а) $f_1(x)=\frac{-2x^2+13x+7}{x-7}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}3\sin x \text{ при } x<0,\\ 2x^2 \text{ при } 0\leqslant x<2,\\ x-3 \text{ при } x\geqslant 2.\end{cases}$

167. а) $f_1(x)=\frac{-5x^2+6x+8}{x-2}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}3\cos x \text{ при } x\leqslant 0,\\ 2-x \text{ при } 0<x<3,\\ x^2-6x+8 \text{ при } x\geqslant 3.\end{cases}$

168. а) $f_1(x)=\frac{-2x^2+5x+12}{x-4}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}x^2+1 \text{ при } x<0,\\ \frac{3}{4}\pi\,\mathrm{tg}\,x \text{ при } 0\leqslant x<\frac{\pi}{4},\\ \pi-x \text{ при } x\geqslant\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

169. а) $f_1(x)=\frac{-x^2+7x+8}{x-8}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases} 2\sin x \text{ при } x\leqslant 0, \\ 3x^2 \text{ при } 0<x<1, \\ 3-2x \text{ при } x\geqslant 1. \end{cases}$

170. а) $f_1(x)=\dfrac{-3x^2+13x+126}{x-9}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases} 4\sin x \text{ при } x\leqslant 0, \\ 3-x \text{ при } 0<x\leqslant 2, \\ x^2-4x+5 \text{ при } x>2. \end{cases}$

IV. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

171—180. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ функций, заданных в явном и неявном виде.

171. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$;

в) $y=\ln\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}$; г) $y=(\arcsin x)^{\sin x}$;

д) $x+\sqrt{xy}+y=a$.

172. а) $y=\sqrt[3]{2x^2+x-1}$; б) $y=e^{-x}(\cos x+\sin x)$;

в) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$; г) $y=(\operatorname{arctg} 4x)^x$;

д) $x^2-2xy+y^3=1$.

173. а) $y=(a+b\sqrt{x})^4$; б) $y=3^{\sin^2\frac{x}{2}}$;

в) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$; г) $y=(e^x+e^{-x})^x$;

д) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$.

174. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$; б) $y=e^x\sin x-\ln x\operatorname{tg} x$;

в) $y=\ln\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^x$;

д) $\sqrt{2x}-\sqrt[3]{y}=1$.

175. а) $y=\sqrt[5]{\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}}$; б) $y=e^{-x}2^x$;

в) $y=x^3\ln\dfrac{1}{x}$; г) $y=\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}\right)^{x^2}$;

д) $x^2+3xy+y^2+1=0$.

176. а) $y=\sqrt{\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}}$; б) $y=\dfrac{e^{2x}+\sin x}{x}$;

в) $y=\sin x^2 e^{\cos x}$; г) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

д) $e^y+xy=e$.

177. а) $y=\dfrac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{x^3}$; б) $y=2\cos(3x-1)\sin 2x$;

в) $y=e^{-x^2}\cos 2x$; г) $y=x^{\sin x}$;

д) $x+y=e^{x-y}$.

178. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}$; б) $y=x\sin(x^2+1)$;

в) $y=e^{2x}\sin x^2$; г) $y=(\operatorname{tg} x)^x$; д) $x^2-1+\cos xy=0$.

179. а) $y=\dfrac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$; б) $y=\cos(3x^2-1)$;

в) $y=\sqrt{4x-x^2}+4\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}$; г) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$;

д) $x^3+4y^3-3yx^2=2$.

180. а) $y=\dfrac{9}{\sqrt[6]{x^2-4x-5}}$;

б) $y=\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}$;

в) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$; г) $y=x^{\ln x}$;

д) $x^2+2xy+y^2-4x+2y=2$.

181—190. Найти первую и вторую производные $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически.

181. $x=\cos t$, $y=t+\sin t$.

182. $x=a\cos^2\varphi$, $y=b\sin^2\varphi$.

183. $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$.

184. $x=\varphi(1-\sin\varphi)$, $y=\varphi\cos\varphi$.

185. $x=e^t(\cos t+\sin t)$, $y=e^t(\cos t-\sin t)$.

186. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$.

187. $x=a\left(\cos t-\ln\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}\right)$, $\quad y=a\sin t$.

188. $x=\ln(t+\sqrt{1+t^2})$, $\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

189. $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$.

190. $x=t^2$, $y=\ln\sin t-t\operatorname{ctg} t$.

191—200. Найти экстремумы функции, используя вторую производную.

191. $y=\dfrac{2-x^3}{2x}$. 192. $y=\ln(x^2+2x+2)$.

193. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+3$. 194. $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^4$.

195. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$. 196. $y=x+\dfrac{1}{x}$.

197. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$. 198. $y=x^2e^{-x}$.

199. $y=e^{-x}+e^x$. 200. $y=x\ln x$.

201—210. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

201. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\operatorname{tg}\pi x$.

202. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x$.

203. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\ln x$.

204. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}\varphi-\sec\varphi)$.

205. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

206. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\operatorname{tg}5x$.

207. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}-\operatorname{cosec}\dfrac{x}{3}\right)$.

208. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\ln(x+e^x)$.

209. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

210. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\operatorname{arctg}5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{7}{x^7-1}\right)$.

211—220. Вычислить приближенно с помощью дифференциала, сохраняя два верных знака после запятой.

211. а) $y=\sqrt[3]{x}$ при $x=7,76$; б) $\sin 29°$.

212. а) $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$ при $x=1,012$; б) $\sin 33°$.

213. а) $y=\sqrt{5-x^2}$ при $x=0,98$; б) $\cos 61°$.

214. а) $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$ при $x=0,97$; б) $\cos 57°$.

215. а) $y=\sqrt{x^2+x+3}$ при $x=1,97$; б) $\operatorname{tg}46°$.

216. а) $y=\sqrt[3]{x^2}$ при $x=1,03$; б) $\operatorname{tg}39°$.

217. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x=4,16$; б) $\operatorname{ctg}43°$.

218. а) $y=\sqrt{4x-3}$ при $x=2,87$; б) $\operatorname{ctg}47°$.

219. а) $y=\sqrt{x^3}$ при $x=0,98$; б) $\ln 0,9$.

220. а) $y=\sqrt[5]{x^2}$ при $x=1,03$; б) $\ln 1,1$.

V. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

221—230. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

221. $f(x)=x^3-12x+7;\ [-3;\ 0]$.
222. $f(x)=3x^4-16x^3+2;\ [0;\ 3]$.
223. $f(x)=\sin 3x-3\sin x;\ \left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.
224. $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x;\ \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
225. $f(x)=x^4-2x^2+3;\ [-2;\ 1]$.
226. $f(x)=x^4-8x^2+3;\ [-2;\ 1]$.
227. $f(x)=x^5-\frac{5}{3}x^2+2\ \ [0;\ 2]$.
228. $f(x)=x-\sin x;\ \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
229. $f(x)=x-\sin x;\ \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.
230. $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x,\ \left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

231. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y=x^2-4x$ в точке $A(1;\ -3)$.

232. Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $y^2-2x^2=1$ в точках, где $x=2$.

233. Найти углы, под которыми пересекаются линии: $9y=x^3$ и $x-y=0$.

234. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ в точке $t_0=\frac{\pi}{2}$.

235. Найти углы, под которыми пересекаются линии: $y=\cos x$ и $2y=1$.

236. Найти углы, под которыми пересекаются линии: $y=\sin x$ и $y=\sin 2x$.

237. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ в точке $t_0=\frac{\pi}{4}$.

238. Найти углы, образованные параболой $y=2x-x^2$ и хордой, соединяющей ее точки с абсциссами 1 и 4.

239. Найти углы, под которыми пересекаются линии $y=e^x$ и $y=e^{3x}$.

240. Найти углы, под которыми пересекаются прямая $x+y-4=0$ и парабола $2y=8-x^2$.

241—250. Исследовать функцию с помощью производных и по результатам исследования построить ее график.

241. $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$. 242. $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.
243. $y=\frac{x^2-x-6}{x-2}$. 244. $y=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$.
245. $y=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$. 246. $y=-\frac{x^2+8}{x^2-4}$.
247. $y=\frac{x^2+3}{x+1}$. 248. $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.
249. $y=\frac{9x}{x^2+9}$. 250. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$.

251—260. Найти уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости к пространственной линии $\bar r=\bar r(t)$ в точке t_0. В этой же точке вычислить кривизну линии.

251. $\bar r(t)=(\sin t-1)\bar i+(\cos t-t)\bar j+3\sin t\bar k;\ t_0=\frac{\pi}{2}$.
252. $\bar r(t)=\ln(t-2)\bar i+t\bar j+(t^2-9)\bar k;\ t_0=3$.
253. $\bar r(t)=(t+1)\bar i+\sqrt{t^2+1}\,\bar j-(t^2-1)\bar k;\ t_0=0$.
254. $\bar r(t)=(t^2+1)\bar i+(3t-2)\bar j-\sqrt{2-t^2}\,\bar k;\ t_0=1$.
255. $\bar r(t)=2(\ln\operatorname{tg} t)\bar i-2t\bar j+2t\bar k;\ t_0=\frac{\pi}{4}$.
256. $\bar r(t)=2\ln t\bar i+(2-t^2)\bar j+(t^3+1)\bar k;\ t_0=1$.
257. $\bar r(t)=(t^2+2t)\bar i+(1-t^2)\bar j+(t^3+3t)\bar k;\ t_0=0$.
258. $\bar r(t)=(t+1)\bar i-e^{-t}\bar j+e^t\bar k;\ t_0=0$.
259. $\bar r(t)=2\sin 2t\bar i-2\sin^2 t\bar j-2\cos^2 t\bar k;\ t_0=\frac{\pi}{4}$.
260. $\bar r(t)=4\sin t\bar i+\operatorname{tg} t\bar j-2\cos t\bar k;\ t_0=\frac{\pi}{4}$.

261. Представить число a в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

262. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R так, что одна из его сторон лежит на диаметре окружности.

263. Из всех цилиндров заданного объема найти радиус цилиндра с наименьшей полной поверхностью.

264. Найти высоту прямого круглого конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

265. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

266. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полусферы радиуса R (центр основания конуса совпадает с центром сферы).

267. Какое положительное число при сложении с обратным ему числом даст наименьшую сумму?

268. Электрическая цепь составлена из двух параллельных сопротивлений r_1 и r_2. При каком соотношении между r_1 и r_2 сопротивление цепи будет наименьшим, если при последовательном их соединении оно равно R?

269. Населенный пункт A расположен в 3 км от автомагистрали и в 5 км от пункта B, который находится на этой магистрали. Скорость движения по магистрали $v_1=90$ км/ч, по проселочной дороге $v_2=45$ км/ч. Под каким углом к магистрали нужно построить проселочную дорогу из пункта A, чтобы затраты времени на перевозку грузов были наименьшими?

270. Имеется электрическая цепь с внутренним сопротивлением r и внешним R. При каком внешнем сопротивлении R на нем будет выделяться наибольшая мощность?

VI. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

271—280. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием в пп. а), б), в).

271. а) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}\,dx$; б) $\int \sin^3 x \cos x\,dx$;

в) $\int \ln x\,dx$; г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}-1}$;

д) $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

272. а) $\int \frac{dx}{(x+2)^3}$; б) $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+4}$;

в) $\int x \exp\{4x\}\,dx$; г) $\int \sin x \sqrt[3]{\cos x}\,dx$;

д) $\int \frac{(2x+4)}{x+3}\,dx$.

273 а) $\int (\sqrt{x}+2)^2\,dx$; б) $\int \frac{x^2\,dx}{3+x^3}$;

в) $\int \sin^2 2x\,dx$; г) $\int x \cos 3x\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$.

274. а) $\int \frac{\sqrt{x}-5x^2}{x}\,dx$; б) $\int \cos 2x \cos x\,dx$;

в) $\int x \exp\{x^2\}\,dx$; г) $\int x \sin 2x\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

275. а) $\int (1+2\sqrt{x})^2\,dx$; б) $\int \frac{x^4\,dx}{3-x^5}$;

в) $\int \cos^2 3x\,dx$; г) $\int x e^{\frac{x}{2}}\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

276. а) $\int \frac{(x^2+1)^2\,dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{(1-4x)^2}$;

в) $\int \sin^3 x\,dx$; г) $\int (x+2)\cos x\,dx$;

д) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx$.

277. а) $\int (\sqrt{2})^x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

в) $\int (2x+1)\cos x\,dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3}$;

д) $\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$.

278. а) $\int \left(2\sqrt[4]{3} - x\right) dx$; б) $\int x^2 \exp\{x^3\}\, dx$;

в) $\int (x+2) \exp\{x\}\, dx$; г) $\int \sin^4 x\, dx$;

д) $\int \frac{x+1}{x(x+1)} dx$.

279. а) $\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$; б) $\int x 5^{x^2} dx$;

в) $\int \cos^2 3x\, dx$; г) $\int x \exp\{2x\}\, dx$;

д) $\int \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} dx$.

280. а) $\int \left(3^x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$; б) $\int \frac{dx}{5x-3}$;

в) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$; г) $\int x \ln x\, dx$;

д) $\int \frac{2x+3}{x^2 - 7x + 12} dx$.

281—290. Вычислить определенный интеграл.

281. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x} dx$. 282. $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}\, dx}{4+x}$.

283. $\int_0^3 \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} dx$. 284. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} dx$.

285. $\int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}\, dx}{x-6}$. 286. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{2x+7}}$.

287. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$. 288. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$.

289. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$. 290. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

291—300. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

291. $\int_1^2 \frac{dx}{x-1} dx$. 292. $\int_0^\infty x \exp\{-x^2\}\, dx$.

293. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} dx$. 294. $\int_1^3 \frac{dx}{x-2}$.

295. $\int_2^\infty \frac{\ln x\, dx}{x}$. 296. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

297. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$. 298. $\int_{-\infty}^0 \exp(x/2)\, dx$.

299. $\int_1^2 \frac{x\, dx}{x-1}$. 300. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

301—310. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать рисунок области.

301. $3x^2 - 4y = 0$, $2x - 4y + 1 = 0$.
302. $3x^2 + 4y = 0$, $2x - 4y - 1 = 0$.
303. $2x + 3y^2 = 0$, $2x + 2y + 1 = 0$.
304. $3x^2 - 4y = 0$, $2x + 4y - 1 = 0$.
305. $3x^2 + 4y = 0$, $2x + 4y + 1 = 0$.
306. $2x - 3y^2 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.
307. $3x^2 - 2y = 0$, $2x - 2y + 1 = 0$.
308. $4x + 3y^2 = 0$, $4x + 2y + 1 = 0$.
309. $3x^2 - 2y = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.
310. $4x - 3y^2 = 0$, $4x + 2y - 1 = 0$.

311—320. Вычислить приближенно по формуле Симпсона значение определенного интеграла $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ с точностью до двух знаков после запятой.

311. $a = 1$. 312. $a = 2$. 313. $a = 3$. 314. $a = 4$.
315. $a = 5$. 316. $a = 6$. 317. $a = 7$. 318. $a = 8$.
319. $a = 9$. 320. $a = 10$.