

Методические указания к выполнению контрольной работы.

Рассмотрим задачу о распределении ресурсов.

Условия задачи. Для производства двух видов продукции фирма использует два вида ресурсов: ресурс 1 – сырье, ресурс 2 – время изготовления продукции на оборудовании. Запасы ресурсов ограничены: в день может быть использовано не более 1000 кг сырья и суммарное время работы оборудования не может превосходить 25 часов. Нормы затрат каждого ресурса на изготовления единицы каждого продукта и их рыночные цены заданы в табл.1.1

Таблица 1.1

Ресурс	Нормы затрат на ед. продукции		Запас ресурса
	продукт1	продукт2	
сырье	$a_{11} = 5$	$a_{12} = 10$	$b_1 = 1000$
время	$a_{21} = 0,1$	$a_{22} = 0,3$	$b_2 = 25$
цена за ед.	$c_1 = 40$	$c_2 = 130$	

Задание1. Записать стандартную и каноническую формы.

Задание2. Записать двойственную задачу и дать ее экономический смысл.

Задание3. Решить симплекс-методом прямую задачу.

Задание4. Найти изменения оптимального плана и выручки прямой задачи, вызванное изменением запасов ресурсов. Определить интервалы устойчивости оптимального решения.

Задание5. Найти изменения оптимального плана двойственной задачи, вызванное изменением рыночных цен. Определить интервалы оптимальности.

1.1. Выполнение Задания1 Записать стандартную и каноническую формы

Обозначим:

x_1 – план выпуска продукции 1,

x_2 - план выпуска продукции 2.

Тогда затраты сырья и времени изготовления, необходимые для производства плана x_1, x_2 , будут равны соответственно:

$$5x_1 + 10x_2,$$

$$0,1x_1 + 0,3x_2.$$

План x_1, x_2 будет допустимым, если затраты каждого ресурса не превосходят их запасов т. е. выполняются неравенства:

$$5x_1 + 10x_2 \leq 1000,$$

$$0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 25.$$

Целевой функцией служит выручка от реализации допустимого плана x_1, x_2

$$Z = 40x_1 + 130x_2.$$

Таким образом, математически рассматриваемая задача является задачей линейного программирования в стандартной форме :

найти переменные x_1, x_2 , которые дают максимум целевой функции Z

$$\max Z = \max(40x_1 + 130x_2) \quad (1.1.1).$$

при ограничениях

$$5x_1 + 10x_2 \leq 1000$$

$$0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 25 \quad (1.1.2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Для решения задачи симплекс-методом необходимо записать ограничения (1.1.2) в канонической форме. Для этого введем две дополнительные переменные

s_1 - остаток от производства ресурса 1 (остаток сырья)

s_2 - остаток от производства ресурса 2 (остаток времени).

Тогда получим каноническую форму задачи:

найти переменные x_1, x_2, s_1, s_2 , которые дают максимум целевой функции Z

$$\max Z = \max(40x_1 + 130x_2 + 0s_1 + 0s_2) \quad (1.1.3).$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + s_1 &= 1000 \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 + s_2 &= 25 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

1.2. Выполнение Задания 2. Записать двойственную задачу и дать ее экономический смысл.

Запишем исходную (прямую) задачу:

найти переменные x_1, x_2, s_1, s_2 , которые дают максимум целевой функции Z

$$\max Z = \max(40x_1 + 130x_2 + 0s_1 + 0s_2) \quad (1.1.3).$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} y_1 &\rightarrow 5x_1 + 10x_2 + s_1 = 1000 \\ y_2 &\rightarrow 0,1x_1 + 0,3x_2 + s_2 = 25 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Правило построения двойственной задачи состоит в следующем. Каждому равенству прямой задачи соответствует двойственная переменная. Стрелки показывают, что первому равенству соответствует переменная y_1 , а второму - переменная y_2 .

Для определения целевой функции W двойственной задачи двойственные переменные y_1 и y_2 умножаются на правые части равенств (1.1.4) и складываются:

$$W = 1000y_1 + 25y_2.$$

Каждой переменной прямой задачи x_1, x_2, s_1, s_2 соответствует ограничение двойственной задачи. Левые части этих ограничений для переменной x_1 записываются следующим образом. Двойственные переменные y_1 и y_2 умножаются на коэффициенты перед переменной x_1 в (1.1.4) и складываются:

$$5y_1 + 0,1y_2.$$

Аналогично, записываются левые части ограничений для переменной x_2 . Двойственные переменные y_1 и y_2 умножаются на коэффициенты перед переменной x_2 в (1.1.4) и складываются:

$$10y_1 + 0,3y_2.$$

Левая часть ограничений для переменной s_1 равна y_1 , а для переменной s_2 - y_2 .

Правые части ограничений равны 40, 130, 0, 0 - коэффициентам целевой функции Z перед переменными x_1, x_2, s_1, s_2 . Левые и правые части ограничений соединяются знаком \geq .

В результате двойственная задача имеет вид:

найти двойственные переменные y_1 и y_2 , при которых целевая функция W минимальна

$$\min W = 1000 y_1 + 25 y_2 \quad (1.2.1)$$

при ограничениях

$$x_1 \rightarrow 5y_1 + 0,1y_2 \geq 40 \quad (1.2.2)$$

$$x_2 \rightarrow 10y_1 + 0,3y_2 \geq 130 \quad (1.2.3)$$

$$s_1 \rightarrow y_1 \geq 0 \quad (1.2.4)$$

$$s_2 \rightarrow y_2 \geq 0 \quad (1.2.5)$$

Переменные y_1, y_2 , называются **допустимым решением двойственной задачи**, если они удовлетворяют всем ограничениям (1.2.2)- (1.2.5) и **оптимальными**, если они допустимые и на них целевая функция W достигает минимума.

Экономический смысл двойственной задачи:

двойственная переменная y_1 определяет теневую цену 1 кг сырья, а **двойственная переменная y_2** определяет теневую цену 1 часа работы оборудования.

Тогда **целевая функция**

$$W = 1000 y_1 + 25 y_2$$

задает стоимость запасов сырья и времени работы оборудования в теневых ценах.

Выражение

$$z_1 = 5y_1 + 0,1y_2$$

определяет стоимость 5 кг сырья и 0,1 часа времени, затраченных на изготовление единицы продукции 1 в теневых ценах, а выражение

$$z_2 = 10y_1 + 0,3y_2$$

определяет стоимость 10 кг сырья и 0,3 часа времени, затраченных на изготовление единицы продукции 2 в теневых ценах.

Для определения прибыльности производства продукции сравним стоимость (в теневых ценах) ресурсов, на него затраченных, с выручкой от продажи продукции. Для этого определим величины приведенных стоимостей

$$\Delta_1 = 5y_1 + 0,1y_2 - 40 \quad (1.2.6)$$

$$\Delta_2 = 10y_1 + 0,3y_2 - 130 \quad (1.2.7)$$

Если величина Δ_j положительна, то стоимость ресурсов больше рыночной цены этого продукта. В этом случае производство продукта убыточно и выгоднее продать ресурсы по рыночным ценам. Если величина Δ_j отрицательна, то стоимость ресурсов меньше рыночной цены этого продукта. В этом случае производство прибыльно и выгоднее производить продукцию. Если величина Δ_j равна 0, то стоимость ресурсов равна рыночной цене. В этом случае одинаково выгодно продать ресурсы и производить продукцию. Ограничения двойственной задачи

$$5y_1 + 0,1y_2 \geq 40 \quad (1.2.2)$$

$$10y_1 + 0,3y_2 \geq 130 \quad (1.2.3)$$

можно теперь записать

$$\Delta_1 \geq 0 \quad (1.2.9)$$

$$\Delta_2 \geq 0 \quad (1.2.10)$$

Отсюда следует, что на допустимых теневых ценах y_1, y_2 производство обоих продуктов неприбыльно.

Можно дать следующую экономическую интерпретацию двойственной задачи. Некоторая фирма предлагает производителю продукции продать ей все запасы ресурсов по теневым ценам y_1, y_2 . Неравенства (1.2.2) и (1.2.3)

означают, что в предлагаемых теневых ценах производство обоих видов продукции неприбыльно. При этом (1.2.1) означает, что стоимость приобретаемых ресурсов должна быть минимальна. Таким образом, решение двойственной задачи определяет минимальный уровень рыночных цен y_1, y_2 , при котором производить продукцию неприбыльно.

1.3. Выполнение Задания 3. Решить симплекс-методом прямую задачу.

Симплекс-метод состоит в построении последовательности базисных решений прямой задачи, которая приводит к оптимальному базисному решению. Переход от одного базисного решения к другому производится, если хотя бы одно из производств является прибыльным. Так продолжается до тех пор, пока не будут найдены такие теневые цены за ресурсы y_1, y_2 , при которых все производства будут неприбыльными.

Построение начального базисного плана. Пусть x_1, x_2 - свободные переменные (т.е. $x_1 = x_2 = 0$). Тогда из (1.1.4) следует, что базисные переменные $s_1 = 1000$ и $s_2 = 25$. Двойственные переменные, соответствующие этому плану, определяются из (1.2.4) и (1.2.5) заменой \geq на $=$ и будут равны $y_1 = 0, y_2 = 0$, а приведенные стоимости:

$$\Delta_1 = 5y_1 + 0,1y_2 - 40 = -40,$$

$$\Delta_2 = 10y_1 + 0,3y_2 - 100 = -100$$

В симплекс-методе удобно использовать симплекс-таблицы. Рассмотрим построение первой симплекс-таблицы для выбранного начального базисного решения (табл. 1.3.1). В первом столбце симплекс-таблицы поместим обозначения базисных переменных s_1 и s_2 , а во втором – их числовые значения 1000 и 25. Остальные столбцы состоят из коэффициентов перед переменными x_j в левых частях ограничений (1.1.4), (1.1.5). Последняя строка симплекс-таблицы состоит из значения целевой функции $Z = 0$ и величин $y_1 = 0, y_2 = 0$ $\Delta_1 = -40$ $\Delta_2 = -130$

Таблица 1.3.1

базис	значение	x_1	x_2	s_1	s_2
s_1	1000	5	10	1	0
s_2	25	0,1	0,3	0	1
z	0	-40	-130	0	0
		Δ_1	Δ_2	y_1	y_2

Переход от одного базисного плана к другому сопровождается переходом симплексных таблиц.

Итерация 1.

1) **Проверка критерия оптимальности.** Если в последней строке симплекс-таблицы нет отрицательных значений, то получено оптимальное решение.

В нашем примере значения, расположенные в последней строке симплекс-таблицы в столбцах переменных x_1 и x_2 отрицательны. Поэтому эта таблица не определяет оптимального плана.

2) **Определение новой базисной переменной.** Отрицательные значения в последней строке показывают, что производства обоих продуктов являются прибыльными и единица первого продукта увеличивает выручку на 40, а единица второго продукта – на 130. Поэтому следует вводить в базис один из них. Выберем x_2 в качестве новой базисной переменной т.е. вводим в базис производство второго продукта. Соответствующий переменной x_2 столбец назовем **ведущим столбцом** (в таблице этот столбец выделен).

3) **Определение новой свободной переменной.** Для определения новой свободной переменной составим отношения столбца значений базисных переменных (второго столбца) к положительным элементам ведущего столбца и найдем среди них минимальное:

$$\lambda = \min \left\{ \frac{1000}{10}, \frac{25}{0,3} \right\} = \frac{250}{3}.$$

Так как минимальное значение достигается на втором отношении, то базисная переменная s_2 переходит в свободные. Вторую строку назовем

ведущей (в таблице эта строка выделена). Число на пересечении ведущей строки и ведущего столбца назовем **ведущим элементом**.

4) **Пересчет симплекс- таблицы.** Теперь для нового базиса s_1, x_2 составим новую симплекс- таблицу (табл. 1.3.2). Ее можно получить из старой симплекс- таблицы следующим образом. Все элементы ведущей (второй) строки, разделенные на ведущий элемент 0,3, образуют вторую строку новой таблицы. Например, элементу второй строки 25 первой симплекс- таблицы будет соответствовать элемент второй строки новой симплекс- таблицы

$$\frac{25}{0,3} = \frac{250}{3} = 83\frac{1}{3}.$$

Остальные элементы новой таблицы получаются из соответствующих элементов старой таблицы. Каждому элементу соответствует один элемент в ведущей строке и один элемент в ведущем столбце. Используя эти элементы формулы для пересчета можно сформулировать следующим образом:

$$\text{новый элемент} = \text{старый элемент} - \frac{(\text{элемент ведущего столбца}) \cdot (\text{элемент ведущей строки})}{\text{ведущий элемент}}$$

Приведем пример пересчета элемента 1000 в первой строке. Заметим, что пересчитываемому элементу $b_1 = 1000$ соответствуют элемент 10 ведущего столбца и элемент 25 в ведущей строке. Тогда элементу 1000 соответствует элемент в новой таблице

$$1000 - \frac{10 \cdot 25}{0,3} = 1000 - \frac{250}{3} = \frac{500}{3} = 166\frac{2}{3}$$

Аналогично пересчитывается последняя строка. Например, первому элементу 0 последней строки соответствует элемент 25 в ведущей строке и элемент -130 в ведущем столбце. Тогда первый элемент последней строки новой таблицы будет равен

$$0 - \frac{25 \cdot (-130)}{0,3} = \frac{32500}{3} = 10833\frac{1}{3}.$$

В результате пересчета получаем симплекс-таблицу, соответствующую базисным переменным s_1, x_2

Таблица 1.3.2

Базис	значение	x_1	x_2	s_1	s_2
s_1	166 $\frac{2}{3}$	1 $\frac{2}{3}$	0	1	-33 $\frac{1}{3}$
x_2	83 $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	3 $\frac{1}{3}$
Z	10833 $\frac{1}{3}$	3 $\frac{1}{3}$	0	0	433 $\frac{1}{3}$
		Δ_1	Δ_2	y_1	y_2

Для полученной симплекс-таблицы повторяем все действия в итерации 1.

Итерация 2.

1) **Критерий оптимальности.** Среди значений последней строки симплекс-таблицы нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план, т.е. получено решение задачи.

Замечание. Пересчет симплекс-таблиц можно проводить в Excel (табл. 1.3.3). Начальную симплекс-таблицу расположим в ячейках A2:F6. В качестве ведущего столбца выбираем столбец x_2 . В ячейках G3:G4 вычислим отношения столбца “значения” к соответствующим элементам ведущего столбца. Ведущей строкой будет строка s_2 , т.к. второе отношение наименьшее.

Таблица 1.3.3

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	базис	значение	x_1	x_2	s_1	s_2	отношения
3	s_1	1000	5	10	1	0	100
4	s_2	25	0,1	0,3	0	1	83 $\frac{1}{3}$
5	z	0	-40	-130	0	0	
6			Δ_1	Δ_2	y_1	y_2	
7							
8							
9	базис	значение	x_1	x_2	s_1	s_2	
10	s_1	166 $\frac{2}{3}$	1 $\frac{2}{3}$	0	1	-33 $\frac{1}{3}$	
11	x_2	83 $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	3 $\frac{1}{3}$	
12	z	10833 $\frac{1}{3}$	3 $\frac{1}{3}$	0	0	433 $\frac{1}{3}$	
13			Δ_1	Δ_2	y_1	y_2	
14							

Для вычисления первой строки новой симплекс-таблицы в ячейку B10 введем формулу: $=B3 - B4 * \$D\$3 / \$D\4 и скопируем ее в ячейки C10:F10.

Для вычисления второй строки новой симплекс-таблицы в ячейку B11 введем формулу: =B4/\$D\$4 и скопируем ее в ячейки C11:F11.

Для вычисления третьей строки новой симплекс-таблицы в ячейку B12 введем формулу: =B5- B4*\$D\$5/\$D\$4 и скопируем ее в ячейки C12:F12.

Проведем анализ оптимальной симплекс-таблицы (табл. 1.3.2)

Во втором столбце симплекс-таблицы значения базисных переменных

$$s_1 = 166 \frac{2}{3}, \quad x_2 = 83 \frac{1}{3}.$$

Все переменные, не входящие в первый столбец, являются свободными и поэтому равны 0

$$x_1 = 0, \quad s_2 = 0.$$

Таким образом, в оптимальном решении прямой задачи

$$X^* = \{ x_1 = 0, x_2 = 83 \frac{1}{3}, s_1 = 166 \frac{2}{3}, s_2 = 0 \}$$

первый продукт не производится, второй продукт производится в количестве $83 \frac{1}{3}$ единиц, в производстве не используется $166 \frac{2}{3}$ кг сырья, в производстве используется все 25 часов ($s_2 = 0$).

Значения в последней строке симплекс-таблицы определяют значение целевой функции $Z = 10833 \frac{1}{3}$ и оптимальное решение двойственной задачи.

Значение приведенной стоимости $\Delta_1 = 3 \frac{1}{3}$ в столбце x_1 означает, что производство первого продукта убыточно (выпуск одной его единицы уменьшает выручку на $\Delta_1 = 3 \frac{1}{3}$). Значение $\Delta_2 = 0$ в столбце x_2 означает, что производство второго продукта рентабельно.

Значение 0 в столбце s_1 означает, что $y_1 = 0$: теневая цена 1 кг сырья равна 0.

Значение в столбце s_2 означает, что теневая цена $y_2 = 433 \frac{1}{3}$: теневая цена 1 часа работы оборудования равна $433 \frac{1}{3}$.

Таким образом, оптимальное решение двойственной задачи

$$Y^* = \{ y_1 = 0, y_2 = 433 \frac{1}{3}, \Delta_1 = 3 \frac{1}{3}, \Delta_2 = 0 \},$$

1.4. Выполнение Задания 4. Найти изменения оптимального плана и выручки прямой задачи, вызванные изменением запасов ресурсов. Определить интервалы устойчивости оптимального решения.

Рассмотрим влияние запасов ресурсов на оптимальное решение прямой задачи.

Изменение запаса ресурса вызывает изменение оптимального плана выпуска продукции. Для его определения можно использовать некоторые элементы оптимальной симплекс-таблицы (табл. 1.3.2).

Таблица 1.3.2

Базис	значение	x_1	x_2	s_1	s_2
s_1	166 $\frac{2}{3}$	1 $\frac{2}{3}$	0	1	-33 $\frac{1}{3}$
x_2	83 $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	3 $\frac{1}{3}$
Z	10833 $\frac{1}{3}$	3 $\frac{1}{3}$	0	0	433 $\frac{1}{3}$
		Δ_1	Δ_2	y_1	y_2

Пусть изменяется запас сырья на величину Δb_1 . Для определения новых значений базисных переменных нужно к их старым значениям (второй столбец) прибавить соответствующие значения столбца s_1 , умноженные на Δb_1 :

$$s_1 = 166 \frac{2}{3} + \Delta b_1, \quad x_2 = 83 \frac{1}{3}.$$

Все значения свободных переменных не изменяются $x_1 = 0, s_2 = 0$.

Таким образом, при новом запасе сырья оптимальный план прямой задачи

$$X^* = \{x_1 = 0, x_2 = 83 \frac{1}{3}, s_1 = 166 \frac{2}{3} + \Delta b_1, s_2 = 0\}. \quad (1.4.1)$$

Решение двойственной задачи остается неизменным

$$Y^* = \{y_1 = 0, y_2 = 433 \frac{1}{3}, \Delta_1 = 3 \frac{1}{3}, \Delta_2 = 0\}. \quad (1.4.2)$$

Найдем изменение выручки, вызванное изменением запаса сырья на величину Δb_1 . Допустим, что запас сырья изменился на величину Δb_1 так, что новый запас лежит в интервале устойчивости. Так как теневая цена этого ресурса $y_1 = 0$, то выручка не изменится на величину

$$\Delta Z = y_1 \Delta b_1 = 0. \quad (1.4.3)$$

Это объясняется тем, что изменение запаса на величину Δb_1 приводит только к изменению его остатка

$$s_1 = 166 \frac{2}{3} + \Delta b_1$$

и не влияет на план выпуска продукции.

Найдем теперь интервал устойчивости запаса сырья.

Изменение первого ресурса на величину Δb_1 будет допустимым, если значения базисных переменных будут неотрицательны т.е. выполняются неравенства

$$s_1 = 166 \frac{2}{3} + \Delta b_1 \geq 0, \quad (1.4.4)$$

$$x_2 = 83 \frac{1}{3} \geq 0. \quad (1.4.5)$$

Исходя из этих неравенств, найдем максимальное увеличение и максимальное уменьшение первого ресурса.

Найдем максимальное уменьшение первого ресурса Δb_1^- .

Если запас первого ресурса **уменьшается** на Δb_1 ($\Delta b_1 < 0$), то остаток первого ресурса s_1 **уменьшается** на Δb_1 , а выпуск второго продукта не изменяется. Из (1.4.4) следует, что при максимальном уменьшении остаток первого ресурса будет равен 0:

$$s_1 = 166 \frac{2}{3} + \Delta b_1 = 0, \quad \Delta b_1 = -166 \frac{2}{3}, \quad \Delta b_1^- = -166 \frac{2}{3}.$$

Найдем максимальное увеличение первого ресурса Δb_1^+ .

Если запас первого ресурса **увеличивается** на Δb_1 ($\Delta b_1 > 0$), то остаток первого ресурса s_1 **увеличивается** на величину Δb_1 , а выпуск второго продукта не изменяется. Из (1.4.4) следует, что остаток первого ресурса s_1 допускает неограниченное увеличение первого ресурса. Следовательно, максимальное увеличение первого ресурса будет равно $\Delta b_1^+ = +\infty$.

Таким образом, нижняя граница интервала устойчивости

$$b_1^H = b_1 - \Delta b_1^- = 1000 - 166 \frac{2}{3} = 833 \frac{1}{3},$$

верхняя граница интервала устойчивости

$$b_1^B = +\infty$$

Интервал устойчивости будет равен $[b_1^H, b_1^B] = \left[833 \frac{1}{3}, +\infty \right]$.

Пусть изменяется время работы оборудования на величину Δb_2 . Для определения новых значений базисных переменных нужно к их старым значениям (второй столбец) прибавить соответствующие значения столбца s_2 , умноженные на Δb_2 :

$$s_1 = 166 \frac{2}{3} - 33 \frac{1}{3} \Delta b_2$$

$$x_2 = 83 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{3} \Delta b_2,$$

Все свободные переменные не изменяются $x_1 = 0, s_2 = 0$.

Таким образом, оптимальный план решения прямой задачи

$$X^* = \{ x_1 = 0, x_2 = 83 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{3} \Delta b_2, s_1 = 166 \frac{2}{3} - 33 \frac{1}{3} \Delta b_2, s_2 = 0 \}. \quad (1.4.6)$$

Решение двойственной задачи остается неизменным

$$Y^* = \{ y_1 = 0, y_2 = 433 \frac{1}{3}, \Delta_1 = 3 \frac{1}{3}, \Delta_2 = 0 \}. \quad (1.4.7)$$

Найдем изменение выручки, вызванное изменением времени работы оборудования. Допустим, что время работы оборудования изменилось на величину Δb_2 . Так как теневая цена этого ресурса $y_2 = 433 \frac{1}{3}$, то выручка изменится на величину

$$\Delta Z = y_2 \Delta b_2 = 433 \frac{1}{3} \Delta b_2. \quad (1.4.8)$$

Отсюда следует, что увеличение времени работы оборудования на 1 час приводит к увеличению выручки на $433\frac{1}{3}$.

Найдем теперь интервал устойчивости времени работы.

Изменение второго ресурса на величину Δb_2 будет допустимым, если значения базисных переменных будут неотрицательны т.е. выполняются неравенства

$$s_1 = 166\frac{2}{3} - 33\frac{1}{3} \Delta b_2 \geq 0, \quad (1.4.9)$$

$$x_2 = 83\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} \Delta b_2 \geq 0. \quad (1.4.10)$$

Исходя из этих неравенств, найдем максимальное увеличение и максимальное уменьшение второго ресурса.

Найдем максимальное уменьшение второго ресурса Δb_2^- . Если запас второго ресурса уменьшается на Δb_2 ($\Delta b_2 < 0$), то остаток первого ресурса увеличивается на $33\frac{1}{3} \Delta b_2$, а выпуск второго продукта уменьшается на $3\frac{1}{3} \Delta b_2$.

Из (1.4.10) следует, что при максимальном уменьшении план второго продукта будет равен 0:

$$x_2 = 83\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} \Delta b_2 = 0, \quad \Delta b_2 = -25, \quad \Delta b_2^- = 25$$

Найдем максимальное увеличение второго ресурса Δb_2^+ . Если запас второго ресурса увеличивается на Δb_2 ($\Delta b_2 > 0$), то остаток первого ресурса уменьшается на $33\frac{1}{3} \Delta b_2$, а выпуск второго продукта увеличивается на $3\frac{1}{3} \Delta b_2$.

Из (1.4.9) следует, что при максимальном увеличении остаток первого ресурса будет равен 0:

$$s_1 = 166\frac{2}{3} - 33\frac{1}{3} \Delta b_2 = 0, \quad \Delta b_2 = \frac{166\frac{2}{3}}{33\frac{1}{3}} = 5, \quad \Delta b_2^+ = 5$$

Таким образом, нижняя граница интервала устойчивости

$$b_2^H = b_2 - \Delta b_2^- = 25 - 25 = 0,$$

верхняя граница интервала устойчивости

$$b_2^B = b_2 + \Delta b_2^+ = 25 + 5 = 30$$

Интервал устойчивости будет равен $[b_2^H, b_2^B] = [0, 30]$.

1.5. Выполнение Задания 5. Найти изменения оптимального плана двойственной задачи, вызванное изменением рыночных цен. Определить интервалы оптимальности.

Рассмотрим влияние рыночных цен на оптимальные решения прямой и двойственной задач.

Таблица 1.3.2

Базис	значение	x_1	x_2	s_1	s_2
s_1	166 2/3	1 2/3	0	1	-33 1/3
x_2	83 1/3	1/3	1	0	3 1/3
Z	10833 1/3	3 1/3	0	0	433 1/3
		Δ_1	Δ_2	y_1	y_2

Пусть рыночная цена первого продукта $c_1=40$ изменяется на величину Δc_1 .

Так как переменная x_1 - небазисная (первый продукт не входит в оптимальную программу), то в этом случае на величину Δc_1 изменяется приведенная стоимость этого производства Δ_1 :

$$\Delta_1 = 3\frac{1}{3} - \Delta c_1.$$

На все остальные величины последней строки изменение рыночной цены не влияет:

$$\Delta_2 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 433\frac{1}{3}$$

Таким образом, **оптимальное решение двойственной задачи** имеет вид

$$Y^* = \{ \Delta_1 = 3\frac{1}{3} - \Delta c_1, \Delta_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 433\frac{1}{3} \}. \quad (1.5.1)$$

Оптимальный план прямой задачи не изменяется

$$X^* = \{ x_1 = 0, x_2 = 83\frac{1}{3}, s_1 = 166\frac{2}{3}, s_2 = 0 \} \quad (1.5.2)$$

Изменение рыночной цены первого продукта на Δc_1 будет допустимым, если все элементы последней строки будут неотрицательны, т.е. выполняется неравенство

$$\Delta_1 = 3\frac{1}{3} - \Delta c_1 \geq 0 \quad (1.5.3)$$

Из этого неравенства найдем максимальное увеличение и максимальное уменьшение рыночной цены.

Если рыночная цена **уменьшается** на Δc_1 ($\Delta c_1 < 0$), то убыточность первого продукта **увеличивается**. Из (1.5.3) следует, что $\Delta c_1^- = +\infty$. Величина Δc_1 может уменьшить рыночную цену этого продукта до 0, т.к. рыночная цена не может принимать отрицательное значение. Отсюда следует, что **максимальное уменьшение** рыночной ценой

$$\Delta c_1^- = 40$$

Если рыночная цена **увеличивается** на Δc_1 ($\Delta c_1 > 0$), то убыточность первого продукта **уменьшается**. Из (1.5.3) следует, что максимальное увеличение рыночной цены определяется величиной, при которой приведенная стоимость этого производства будет равна 0, т.е. производство станет рентабельным.

$$\Delta_1 = 3\frac{1}{3} - \Delta c_1 = 0$$

Отсюда следует, что **максимальное увеличение** рыночной цены

$$\Delta c_1^+ = 3\frac{1}{3}$$

Интервал оптимальности рыночной цены первого продукта будет равен

$$[0, 43\frac{1}{3}].$$

Пусть рыночная цена второго продукта $c_2=130$ изменяется на величину Δc_2 . Так как переменная x_2 - **базисная** (второй продукт входит в оптимальную программу), то рентабельность второго производства $\Delta_2=0$ и теневая цена $y_1=0$ не изменяются.

Все остальные элементы последней строки изменяются по следующему правилу: к старым элементам последней строки прибавляются соответствующие элементы строки переменной x_2 , **умноженные Δc_2** :

$$\Delta_1 = 3 \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Delta c_2$$

$$y_2 = 433 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{3} \Delta c_2$$

Таким образом, **оптимальное решение двойственной задачи** имеет вид

$$Y^* = \{\Delta_1 = 3 \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Delta c_2, \Delta_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 433 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{3} \Delta c_2\}. \quad (1.5.4)$$

Оптимальный план прямой задачи не изменяется

$$X^* = \{x_1 = 0, x_2 = 83\frac{1}{3}, s_1 = 166\frac{2}{3}, s_2 = 0\}$$

Изменение рыночной цены первого продукта на Δc_2 будет допустимым, если все элементы последней строки будут неотрицательными т.е. выполняются неравенства

$$\Delta_1 = 3 \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Delta c_2 \geq 0, \quad (1.5.5)$$

$$y_2 = 433 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{3} \Delta c_2 \geq 0 \quad (1.5.6)$$

Исходя из этих неравенств, найдем максимальное увеличение и максимальное уменьшение рыночной цены первого продукта.

Если рыночная цена $c_2=130$ **уменьшается** на Δc_2 ($\Delta c_2 < 0$), то **уменьшаются** приведенная стоимость первого продукта Δ_1 и теневая цена y_2 второго ресурса. Найдем значения Δc_2 , при которых y_2 и Δ_1 равны 0 т.е.

$$y_2 = 433 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{3} \Delta c_2 = 0, \quad \Delta c_2 = -\frac{433 \frac{1}{3}}{3 \frac{1}{3}} = -130$$

$$\Delta_1 = 3 \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Delta c_2 = 0 \quad \Delta c_2 = -10$$

Максимальное уменьшение определяется наибольшим из этих значений

$$\Delta c_2^- = \max\{|-130|, |-10|\} = \min\{130, 10\} = 10.$$

Если рыночная цена $c_2=130$ увеличивается на Δc_2 ($\Delta c_2 > 0$), то **увеличиваются** убыточность первого продукта Δ_1 и теневая цена y_2 второго ресурса. Из (1.5.5), (1.5.6) следует, что максимальное увеличение рыночной ценой будет равна ∞ :

$$\Delta c_2^+ = \infty$$

Интервал оптимальности рыночной цены второго продукта будет равен $[120, \infty)$.

Решение задачи в Excel

1) Установить надстройку **Поиск решения**, выполнив команды: **Сервис** \Rightarrow **Надстройки**, установить флажок **Поиск решения**.

2) В электронную таблицу (табл. 1.5.1) внести исходные данные:
в ячейки B6:C6 - коэффициенты целевой функции (рыночные цены),
в ячейки B10:C11 - нормы затрат ресурсов на каждый вид продукции,
в ячейки F10:F11 - запасы ресурсов.

Таблица 1.5.1

	А	В	С	Д	Е	Ф
1						
2		переменные				
3		x_1	x_2			
4	значение	1	1			
5						
6	коэф в ЦС	40	130	170	макс	
7						
8			ограничения			
9	вид ресурса			затраты ресурса	знак	запас ресурса
10	ресурс 1	5	10	15	\leq	1000
11	ресурс 2	0,1	0,3	0,4	\leq	25

3) В ячейку D6 (целевая ячейка) внести формулу для вычисления выручки.

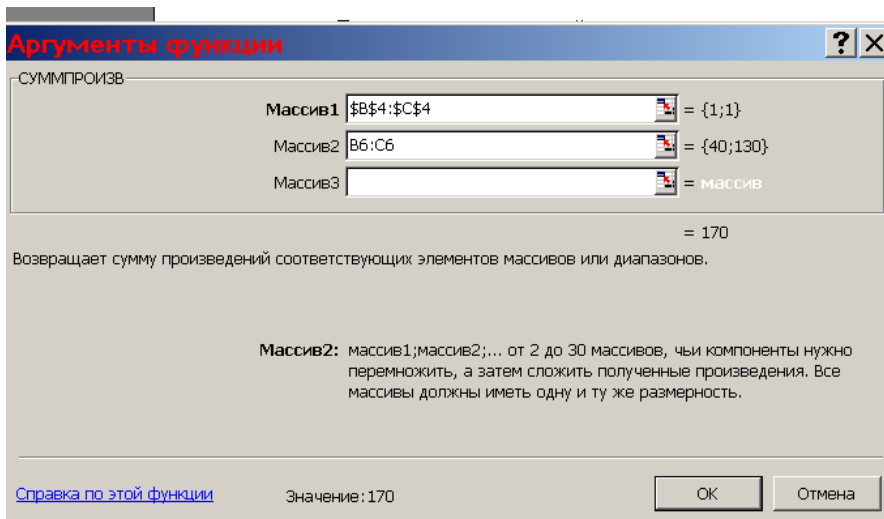
Для этого:

- щелкнуть по пиктограмме **fx**;
- в окне **Мастера функций** выбрать категорию **Математические**, функцию **СУММПРОИЗ**;
- заполнить окно этой функции (рис.1.5.1), щелкнуть по **ОК**.

4) содержимое ячейки D6 скопировать в ячейки D10: D11

5) выполнить команды: **Сервис** ⇒ **Поиск решения**. Откроется диалоговое окно **Поиск решения**.

рис. 1.5.1



6) заполнить поля целевой ячейки и изменяемые ячейки (рис. 1.5.2)

7) для ввода ограничений щелкнуть по кнопке **Добавить**. Появится окно **Добавление ограничений** (рис. 1.5.3). Ввести ограничение. Нажать кнопку **ОК**

рис. 1.5.2

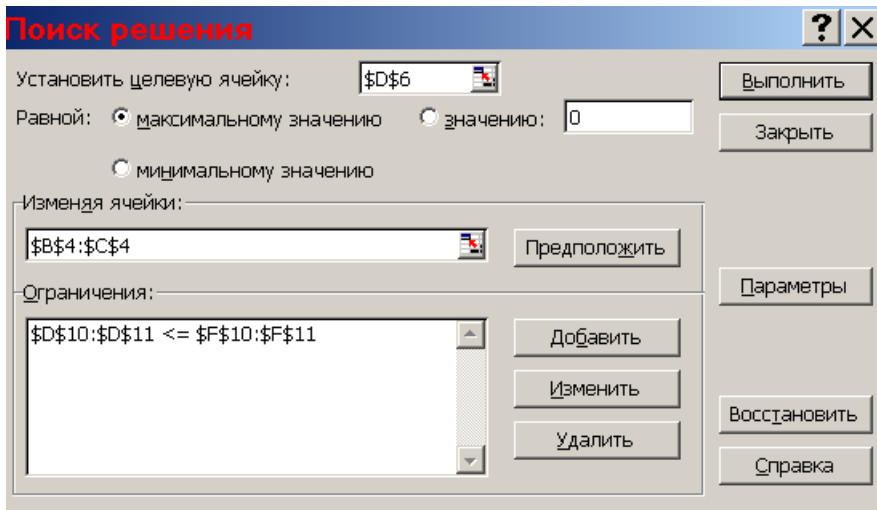
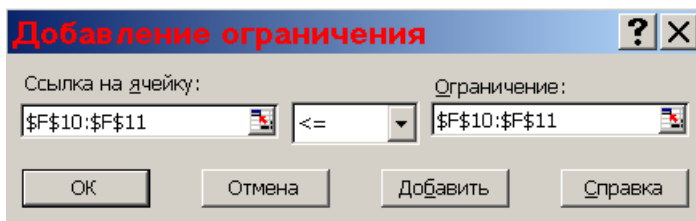
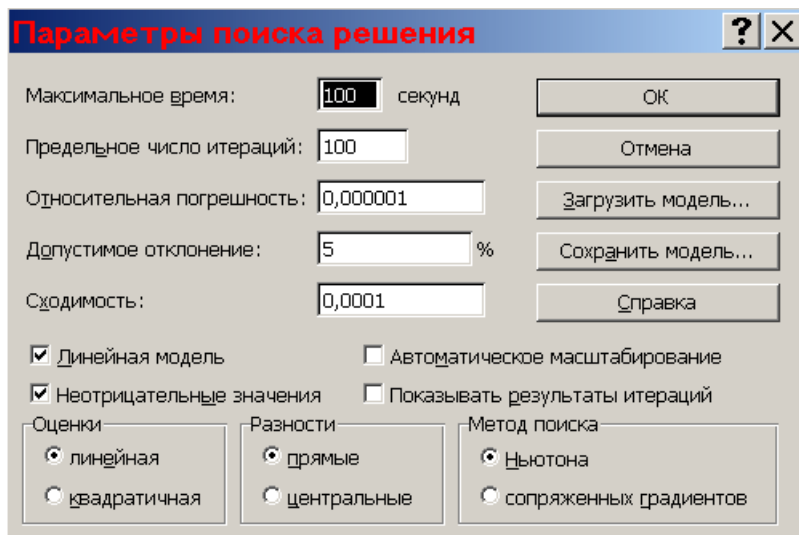


рис. 1.5.3



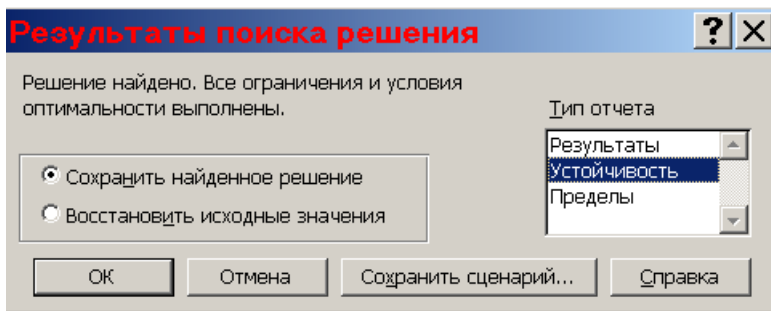
8) В окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры** и в появившемся окне (рис. 1.5.4) заполнить окна параметров, нажать кнопку **ОК**

рис. 1.5.4



9) В окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** для запуска режима **Поиск решения** и в появившемся окне **Результаты поиска решения** (рис. 1.5.5) курсором мыши выделить тип отчета **Устойчивость** и нажать кнопку **ОК**.

рис. 1.5.5



10) Отчет по устойчивости скопировать на лист с исходными данными (табл. 1.5.2)

Этот лист содержит все результаты решения задачи. Столбец “Теневые цены” определяет значения двойственных переменных, столбец “Нормир. стоимость” определяет убыточность производств Δ_j с противоположным знаком.

Таблица 1.5.2

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		переменные					
3		x_1	x_2				
4	значение	0	83 1/3				
5							
6	коэф в ЦС	40	130	10833 1/3	макс		
7							
8			ограничения				
9	вид ресурса			затраты ресурса	знак	запас ресурса	
10	ресурс 1	5	10	833 1/3	<=	1000	
11	ресурс 2	0,1	0,3	25,0	<=	25	
12						$\Delta^+ c$	$\Delta^- c$
13			Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое
14	Ячейка	Имя	значение	стоимость	коэффициент	Увеличение	Уменьшение
15	\$B\$4	значение x_1	0	-3 1/3	40	3 1/3	1E+30
16	\$C\$4	значение x_2	83 1/3	0	130	1E+30	10
17							
18						$\Delta^+ b$	$\Delta^- b$
19			Результ.	Теневая	границы	Допустимое	Допустимое
20	Ячейка	Имя	значение	Цена	правая часть	Увеличение	Уменьшение
21	\$D\$10	ресурс 1 затра	833 1/3	0	1000	1E+30	166 2/3
22	\$D\$11	ресурс 2 затра	25	433 1/3	25	5	25