

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА**  
**Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение Высшего**  
**Профессионального Образования**  
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**  
**(МИИТ)**

Кафедра: «Железнодорожная автоматика,  
телемеханика и связь»

## **ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЁЖНОСТИ И ДИАГНОСТИКИ**

Задание на контрольную работу №1 с методическими указаниями  
по дисциплине для студентов-бакалавров 3 курса,  
сокращённой формы обучения,  
направления: «Технология транспортных процессов»,

профиля: «Организация перевозок и управление в единой транспортной системе»

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Контрольная работа состоит из трех задач. В качестве методических рекомендаций условия задач дополнены типовыми примерами решений аналогичных задач. Решения каждой задачи должны быть подробными, с корректной записью промежуточных и окончательных результатов. Для каждой задачи в соответствии с вариантом необходимо записать условие и при необходимости изобразить поясняющий рисунок. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы.

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

**Вероятность безотказной работы** или **функция надёжности**  $P(t)$  выражает вероятность того, что невосстанавливаемый объект не откажет к моменту времени наработки  $t$ .

**Вероятность отказа** или **функция ненадёжности**  $Q(t)$  вероятность того, что случайное время до отказа меньше заданного времени  $t$ .

Вероятность отказа и вероятность безотказной работы связаны соотношением:  
 $Q(t) = 1 - P(t)$

**Средняя наработка до отказа**  $\bar{T}_o$  определяется как математическое ожидание времени до первого отказа. Средняя наработка до отказа является средним показателем и не отражает характер распределения времени до отказа.

**Частота отказов**  $\alpha(t)$  есть плотность вероятности (или закон распределения) времени работы изделия до первого отказа.

**Интенсивность отказов**  $\lambda(t)$  выражает интенсивность процессов возникновения отказов.

Наиболее распространенной статистической моделью надёжности является **экспоненциальная модель распределения** времени до отказа, по которой вероятность безотказной работы объекта выражается зависимостью

$$P_o(t) = e^{-\lambda t}$$

где  $\lambda$  - параметр модели (интенсивность отказов)

Пусть отказы элементов есть независимые друг от друга события. Так как система (рис.1) работоспособна, если работоспособны все ее элементы, то согласно теореме об умножении вероятностей вероятность безотказной работы системы  $P_c(t)$  равна произведению вероятностей безотказной работы ее элементов:

$$P_c(t) = p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot \dots \cdot p_n(t) = \prod_{i=1}^n p_i(t)$$

где  $p_i(t)$  - вероятность безотказной работы  $i$ -го элемента.

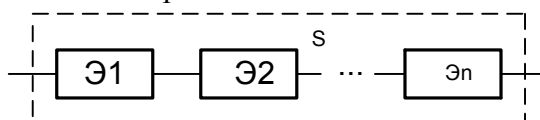


Рисунок 1. Схема логического соединения элементов нерезервированной системы

Пусть для элементов справедлив экспоненциальный закон распределения надёжности и известны их интенсивности отказов. Тогда и для системы справедлив экспоненциальный закон распределения надёжности:

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{-t \sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{-\lambda_c t},$$

где  $\lambda_c$  - интенсивность отказов системы.

Интенсивность отказов нерезервированной системы равна сумме интенсивностей отказов ее элементов:

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Если все элементы данного типа равнонадежны, то интенсивность отказов системы будет:

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^r N_i \lambda_i,$$

где:  $N_i$  - число элементов  $i$ -го типа;  $r$  - число типов элементов.

Выбор  $\lambda_i$  для каждого типа элементов производится по соответствующим таблицам.

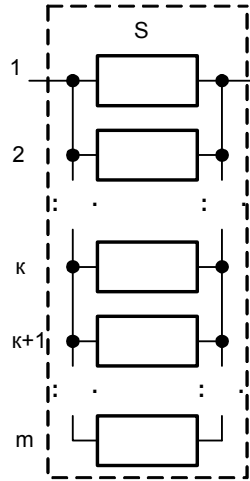
Среднее время наработки до отказа и частота отказов системы соответственно равны:

$$\bar{T}_{o.c} = \frac{1}{\lambda_c}, \quad \alpha_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t}.$$

В резервированной системе отказ какого-либо элемента не обязательно приводит к отказу всей системы. Типичным случаем является логически параллельное соединение элементов (рис. 2), при котором система отказывает тогда, когда отказывают все ее элементы. Такой тип резервирования называют постоянным или нагруженным  $(m-1)$ -кратным резервированием. В этом случае все элементы выполняют одну и ту же функцию, работают одновременно и равнонадежны. По теореме умножения вероятностей имеют место следующие выражения:

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - q^m(t) = 1 - [1 - p(t)]^m,$$

где  $q(t)$ ,  $p(t)$  - соответственно вероятности отказа и безотказной работы одного элемента.



**Рисунок 2. Схема логического соединения элементов резервированной системы.**

Если для элементов справедлив экспоненциальный закон распределения надёжности, то

$$P_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^m$$

### ЗАДАЧА 1

Необходимо выполнить ориентировочный расчёт надёжности системы, состоящей из  $N$  элементов различного типа. Требуется вычислить вероятность безотказной работы системы в течение времени  $t$  и среднюю наработку до первого отказа  $\bar{T}_{o.c}$ .

Расчёт следует выполнить по данным о надёжности элементов, приведенным в Приложении 1.

Исходные данные для решения задачи приведены в табл. 1. Количество силовых трансформаторов  $N_{cm}$  соответствует последней цифре учебного шифра (цифра 0 соответствует  $N_{cm} = 10$ ).

Таблица 1

## Наименование и количество элементов

Предпоследняя цифра шифра	Резисторы R		Конденсаторы С		Диоды D		Транзисторы Т		силовые трансформаторы		дрессели		Индуктивности		время работы	
	тип	шт	тип	шт	тип	шт	тип	шт	шт	шт	шт	шт	шт	шт	час	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13				
0	ВС-0,25	20	слюдяные	10	точечные германиевые, выпрямительные	6	мощные низкочастотные	5	$N_{ст}$	1	2	650				
	ВС-0,5	14	танталовые	12			маломощные низкочастотные германиевые	4								
	ВС-1	6														
1	МЛГ-0,5	32	керамические	8	точечные германиевые, выпрямительные	9	мощные низкочастотные	4	$N_{ст}$	2	4	260				
	МЛГ-1	19	танталовые	15			маломощные низкочастотные германиевые	11								
	МЛГ-2	4														
2	МЛГ-0,25	40	слюдяные	30	выпрямительные плоскостные	2	маломощные низкочастотные кремниевые	10	$N_{ст}$	-	40	5000				
	МЛГ-1	2	керамические танталовые	49												
			танталовые	6												
3	МЛГ-0,25	21	слюдяные	8	точечные кремниевые, выпрямительные	16	маломощные низкочастотные кремниевые	7	$N_{ст}$	2	-	2000				
	МЛГ-0,5	5														
	МЛГ-1	3														

Предпоследняя цифра шифра	Резисторы R		Конденсаторы С		Диоды D		Транзисторы Т		силовые трансформаторы		дрессели		Индуктивности		время работы	
	тип	шт	тип	шт	тип	шт	тип	шт	шт	шт	шт	шт	шт	шт	час	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13				
4	МЛТ-0,25 МЛТ-0,5 ПКВ-2	13 10 2	керамические танталовые	18 3	точечные германиевые, выпрямительные	5	Маломощные германиевые низкочастотные	6	$N_{ст}$	3	2	250				
5	МЛТ-0,25 ПКВ-2	25 2	керамические танталовые	27 6	точечные кремниевые	10	Мощные высокочастотные германиевые	10	$N_{ст}$	3	5	500				
6	ВС-0,25 МЛТ-1 МЛТ-2	16 10 3	керамические танталовые	6 6	точечные импульсные	16	маломощные низкочастотные германиевые	7	$N_{ст}$	3	2	320				
7	МЛТ-0,5 МЛТ-1	240 86	слодяные танталовые	53 13	плоскостные выпрямительные	57	мощные низкочастотные	69	$N_{ст}$	-	47	26				
8	МЛТ-0,5	146	бумажные	176	выпрямительные кремниевые повышенной мощности	116	мощные низкочастотные	86	$N_{ст}$	27	-	240				

Предпоследняя цифра шифра	Резисторы R		Конденсаторы С		Диоды D		Транзисторы Т		силовые трансформаторы		дроссели		Индуктивности		время работы	
	тип	шт	тип	шт	тип	шт	тип	шт	шт	шт	шт	шт	шт	шт	час	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13				
9	СПО-2	3														
	ПЭВ-10	5														
	МЛТ-0,25	136	керамические	176	точечные германиевые выпрямительные	47	маломощные низкочастотные германиевые	63	$N_{ст}$	37	21	25				
	МЛТ-0,5	96	танталовые	32												
	ПКВ-2	12														

**Типовой пример.** Изделие состоит из 14 маломощных низкочастотных германиевых транзисторов, 4 плоскостных кремниевых выпрямителей, 56 керамических конденсаторов, 168 резисторов типа МЛТ мощностью 0,5 Вт, 1 силового трансформатора, 2 нагревательных трансформаторов, 6 дросселей и 3 катушек индуктивности. Необходимо найти вероятность безотказной работы изделия в течение  $t = 260$  часов и среднюю наработку до первого отказа  $\overline{T}_o$ .

**Решение.** Для выполнения ориентировочного расчёта надёжности составим и заполним таблицу 2, вычислив величину интенсивности отказов изделия. Значение интенсивностей отказов  $\lambda_i$  элементов (четвертая графа) выбирается из таблиц Приложения 1. Заполненная таблица 2 приведена ниже.

Таблица 2

Наименование и тип элемента	Количество элементов	Интенсивность отказов, элемента $\lambda \cdot 10^{-5}$ 1/час	Интенсивность отказов элементов в группе $N \cdot \lambda \cdot 10^{-5}$ 1/час	Примечание
Транзистор маломощный низкочастотный германиевый	14	0,3	4,2	Табл. П. 1.3
Выпрямитель кремниевый плоскостный	4	0,5	2	Табл. П. 1.3
Конденсатор керамический	56	0,14	7,84	Табл. П. 1.2
Резистор МЛТ, 0,5 Вт	168	0,05	8,4	Табл. П. 1.1
Трансформатор силовой	1	0,3	0,3	Табл. П. 1.4
Трансформатор нагревательный	2	0,2	0,4	Табл. П. 1.4
Дроссель	6	0,1	0,6	Табл. П. 1.4
Катушка индуктивности	3	0,05	0,15	Табл. П. 1.4

$$\sum_{i=1}^8 N_i = 254 \quad , \quad \lambda_c = \sum_{i=1}^8 N_i \lambda_i = 23,89 \cdot 10^{-5} \quad (1/ч)$$

По данным таблицы находим  $P_c(260) = e^{-\lambda_c t} = e^{-23,89 \cdot 10^{-5} \cdot 260} \approx 0,94,$

$$\overline{T}_o = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{23,89 \cdot 10^{-5}} = 4170 \quad (ч).$$

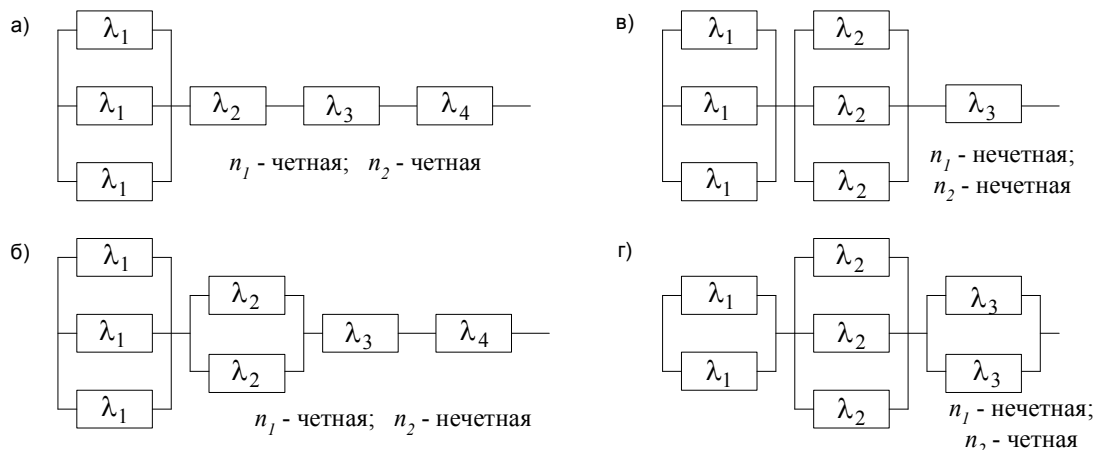
## ЗАДАЧА 2

Схема расчёта надёжности резервированного устройства для различных вариантов приведена на рисунке 3а - 3г. Интенсивности отказов элементов имеют следующие значения:

$$\lambda_1 = n_1 \cdot 10^{-4} \quad 1/час; \quad \lambda_2 = n_2 \cdot 10^{-4} \quad 1/час; \quad \lambda_3 = \frac{1}{n_1} \cdot 10^{-3} \quad 1/час; \quad \lambda_4 = \frac{1}{n_2} \cdot 10^{-3} \quad 1/час, \text{ где } n_1 -$$

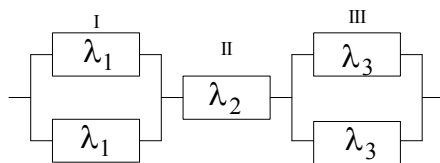


последняя цифра учебного шифра (цифра 0 соответствует  $n_1 = 10$ );  $n_2$  – предпоследняя цифра учебного шифра (цифра 0 соответствует  $n_2 = 10$ ). Предполагается, что последствие отказов элементов отсутствует. Необходимо найти вероятность безотказной работы устройства в течение 100 часов работы.



**Рисунок 3. Схема расчёта надёжности**

**Типовой пример.** Схема расчёта надёжности резервированного устройства приведена на рисунке 4. Интенсивности отказов элементов имеют следующие значения:  $\lambda_1 = 0,23 \cdot 10^{-3}$  1/час;  $\lambda_2 = 0,5 \cdot 10^{-4}$  1/час;  $\lambda_3 = 0,4 \cdot 10^{-3}$  1/час. Предполагаем, что последствие отказов элементов отсутствуют. Необходимо найти вероятность безотказной работы устройства в течение 100 часов работы.



**Рисунок 4. Схема расчёта надёжности**

**Решение.** Найдем выражение для вероятности безотказной работы  $P_c(t)$  устройства. Очевидно,  $P_c(t) = p_I(t) \cdot p_{II}(t) \cdot p_{III}(t)$ ,

$$\text{где } p_I(t) = 1 - [1 - p_1(t)]^2 = 2p_1(t) - p_1^2(t);$$

$$p_{III}(t) = 1 - [1 - p_3(t)]^2 = 2p_3(t) - p_3^2(t).$$

Тогда, подставляя значения  $p_I(t)$  и  $p_{III}(t)$  в выражение для  $P_c(t)$ , получим:

$$P_c(t) = (2p_1(t) - p_1^2(t))p_2(t)(2p_3(t) - p_3^2(t)) = \\ = 4p_1(t)p_2(t)p_3(t) - 2p_1^2(t)p_2(t)p_3(t) - 2p_1(t)p_2(t)p_3^2(t) + p_1^2(t)p_2(t)p_3^2(t)$$

Так как  $p_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$ ,  $p_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$ ,  $p_3(t) = e^{-\lambda_3 t}$ , то

$$P_c(t) = 4e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} - 2e^{-(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} - 2e^{-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)t} + e^{-(2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)t} =$$

$$= 4e^{-0,68 \cdot 10^{-3} \cdot 100} - 2e^{-0,91 \cdot 10^{-3} \cdot 100} - 2e^{-1,08 \cdot 10^{-3} \cdot 100} + e^{-1,31 \cdot 10^{-3} \cdot 100} = 0,993$$

### ЗАДАЧА 3

Составить систему уравнений Колмогорова для графа состояний резервированной восстанавливаемой системы, изображенного на рисунке 5а - 5г (в соответствии с вариантом). Рассчитать коэффициент готовности системы  $K_z = P_0 + P_1$ , решив полученную систему уравнений, если интенсивность отказов и восстановлений  $\lambda = n_1 \cdot 10^{-4}$  1/час;  $\mu = n_2 \cdot 10^{-4}$  1/час, где  $n_1$  – последняя цифра учебного шифра (цифра 0 соответствует  $n_1 = 10$ );  $n_2$  – предпоследняя цифра учебного шифра (цифра 0 соответствует  $n_2 = 10$ ).

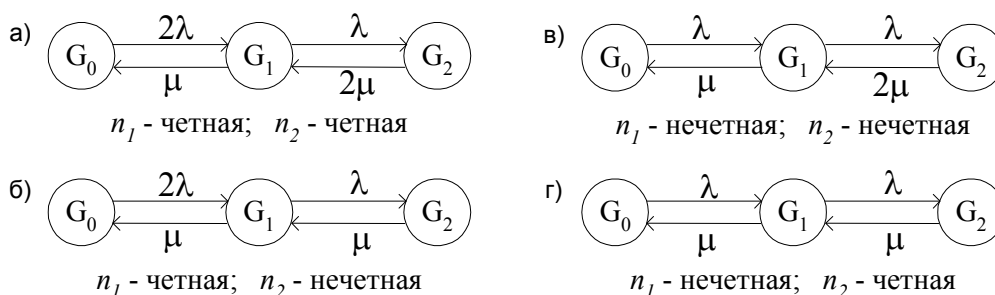


Рисунок 5. Граф состояний системы:

$G_0$  - исправное состояние системы;

$G_1$  - неисправное, но работоспособное состояние системы;

$G_2$  - неисправное неработоспособное состояние системы.

**Типовой пример.** Резервированная система может находиться в одном из 3-х состояний  $G_0, G_1, G_2$ . Граф состояний и соответствующие интенсивности переходов изображены на рисунке 6. Определить коэффициент готовности системы, если интенсивность отказов системы  $\lambda = 1 \cdot 10^{-3}$  1/час, а интенсивность восстановления -  $\mu = 0,1$  1/час.

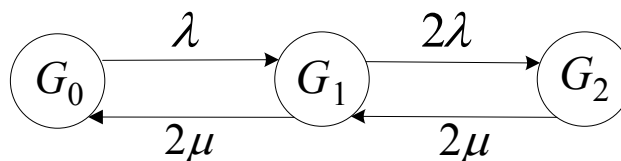


Рисунок 6. Граф состояний системы.

**Решение.** Система составляется по следующим правилам. Производная вероятности состояния равна сумме столько слагаемых, сколько стрелок связано с этим состоянием. Каждое слагаемое равно произведению интенсивности потока событий, переводящего систему по данной стрелке, на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка. Слагаемое имеет знак минус, если стрелка исходит из данного состояния, а знак плюс – если стрелка направлена в данное состояние. Полученная система уравнений называется системой уравнений Колмогорова.

Для графа состояний, показанного на рисунке 6, получим следующую систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + 2\mu P_1(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - 2\mu P_1(t) - 2\lambda P_1(t) + 2\mu P_2(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = 2\lambda P_1(t) - 2\mu P_2(t) \end{cases}$$

Система решается с помощью преобразований Лапласа или численными методами. При  $t \rightarrow \infty$  справедлива предельная теорема А.А. Маркова: если все интенсивности потоков событий постоянны, а граф состояний таков, что из каждого состояния можно перейти в каждое другое за конечное число шагов, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы. В соответствии с этой теоремой при  $t \rightarrow \infty$

производная  $\frac{dP_i(t)}{dt} \rightarrow 0$  и система дифференциальных уравнений превращается в однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -\lambda P_0(t) + 2\mu P_1(t) = 0 \\ \lambda P_0(t) - 2\mu P_1(t) - 2\lambda P_1(t) + 2\mu P_2(t) = 0 \\ 2\lambda P_1(t) - 2\mu P_2(t) = 0 \end{cases}$$

Система дополняется нормировочным уравнением

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

Решить систему линейных уравнений можно либо матричным методом, либо методом Крамера, либо методом подстановки. Решим систему уравнений методом подстановки. Выразим из первого уравнения системы  $P_0(t)$ , а из третьего уравнения  $P_2(t)$ .

$$P_0(t) = \frac{2\mu}{\lambda} P_1(t); \quad P_2(t) = \frac{2\lambda}{2\mu} P_1(t) = \frac{\lambda}{\mu} P_1(t)$$

Полученные значения вероятностей подставим в нормировочное уравнение. В результате получим:

$$\frac{2\mu}{\lambda} P_1(t) + P_1(t) + \frac{\lambda}{\mu} P_1(t) = 1$$

Решив это уравнение относительно  $P_1(t)$ , получим:

$$P_1(t) = \frac{\lambda\mu}{2\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}, \quad P_0(t) = \frac{2\mu^2}{2\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}$$

Тогда коэффициент готовности системы будет равен:

$$K_e = \frac{\lambda\mu + 2\mu^2}{2\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}$$

Подставим в полученное выражение значения интенсивностей отказов, в результате получим:

$$K_e = \frac{\lambda\mu + 2\mu^2}{2\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2} = \frac{10^{-3} \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} + 10^{-3} \cdot 10^{-1} + 10^{-6}} = 0,5$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

Таблица П.1.1

**Номинальная интенсивность отказов резисторов при T=+20° С и K<sub>н</sub>=1**

Тип резисторов		Номинальная мощность рассеяния P <sub>ном</sub> , Вт													
		0,25	0,5	1	2	5	10	15	20	25	30	50	60	75	100
		Интенсивность отказов λ, 10 <sup>-6</sup> 1/час													
непроволочные	МЛТ	0,4	0,5	1,0	1,6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	ТВО	0,4	0,45	0,8	1,4	2,2	3,0	-	4,0	-	-	-	6,0	-	-
	МОУ	0,5	0,55	1,1	1,5	2,3	3,1	-	-	4,2	-	5,5	-	-	10
	МУН	0,6	0,6	1,2	2,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	УНУ	0,6	0,7	1,2	1,7	2,3	3,0	-	-	4,8	-	8,0	-	-	12
	КЭВ	0,6	0,75	1,3	1,75	2,4	3,1	-	-	5,0	-	-	-	-	-
	ВС	0,7	0,8	1,35	1,8	2,5	3,3	-	-	-	-	-	-	-	-
	УЛИ	0,6	0,65	1,3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	БЛП	0,7	0,75	1,4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	СПО	0,6	0,7	1,15	1,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
СП	0,7	0,8	1,3	2,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
проволочные	ПТН	-	1,1	1,4	1,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	ПКВ	-	1,2	1,5	2,0	2,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	ПЭВ	-	1,6	2,0	2,6	2,9	3,2	3,5	-	4,5	5,0	5,6	-	8,0	12
	ПТП	-	-	2,2	2,6	3,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	РП	-	-	-	3,0	-	-	-	-	4,7	-	-	-	8,5	-

Таблица П.1.2

**Номинальные интенсивности отказов конденсаторов при T°=+20°С и K<sub>н</sub>=1**

Тип конденсатора	Интенсивность отказов λ <sub>0</sub> , 10 <sup>-6</sup> 1/час
бумажные	1,8
металлобумажные	2,0
слюдяные	1,2
стеклянные	1,6
керамические	1,4
пленочные	2,0
электрические алюминиевые	2,4
электрические танталовые	2,2

Таблица П.1.3

**Номинальные интенсивности отказов полупроводниковых приборов при  $T^{\circ}=+20^{\circ}\text{C}$   
и  $K_n=1$**

Полупроводниковые приборы		Интенсивность отказов $\lambda_0, 10^{-6}$ 1/час приборов	
		германиевых	кремниевых
Диоды	Выпрямительные точечные	0,7	2
	Выпрямительные микроплоскостные	-	0,7
	Выпрямительные плоскостные	-	5
	Выпрямительные плоскостные повышенной надёжности	-	2,5
	Выпрямительные повышенной мощности	-	5
	Импульсные точечные	3	-
	Импульсные плоскостные мезадиодны	2	2,5
	Импульсные сплавные	-	0,6
	Управляемые	-	5
	Стабилитроны	-	5
	Варикапы	-	5
	Выпрямительные столбы	-	5
	Микромодульные	4,2	4,5
транзисторы	Маломощные низкочастотные	3	4
	Мощные низкочастотные	4,6	-
	Маломощные высокочастотные	2,6	-
	Мощные высокочастотные	5	1,7
	Микромодульные	1	-

Таблица П.1.4

**Номинальная интенсивность отказов трансформаторов и моточных изделий  
(дроссели, катушки индуктивности и др.) при  $T^{\circ}=+20^{\circ}\text{C}$  и  $K_n=1$**

Трансформаторы и моточные изделия	Интенсивность отказов $\lambda_0, 10^{-6}$ 1/час
Автотрансформаторы	5,0
Силовые	3,0
Высоковольтные	4,0
Накальные анодные	2,0
Импульсные	0,5
Дроссели	1,0
Катушки индуктивности	0,5

**Номинальные интенсивности отказов некоторых микроэлектронных элементов  
при  $T^{\circ}=+20^{\circ}\text{C}$  и  $K_n=1$**

<b>Элемент</b>	<b>Интенсивность отказов <math>\lambda_0</math>, 1/час</b>
Интегральная схема	$0,2 \cdot 10^{-7}$
Резистор	$0,1 \cdot 10^{-7}$
Конденсатор керамический	$0,3 \cdot 10^{-7}$
Паяные соединения ножек элементов на печатной плате	$0,5 \cdot 10^{-7}$
Контакт разъема	$0,2 \cdot 10^{-7}$
Печатная плата /на один слой/	$10^{-7}$
Соединение накруткой	$10^{-10}$