МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Мурманск
2007

УДК 531.1 (076.5)
ББК 22.21 я 73
Х 69

Составитель – А.И. Ходякова, ассистент кафедры технической механики Мурманского государственного технического университета

Методические указания рассмотрены и одобрены кафедрой 14 февраля 2007 г., протокол № 4

Рецензент – И.А. Курносова, доцент кафедры технической механики Мурманского государственного технического университета

Оригинал-макет подготовлен в авторской редакции

Электронная верстка О.Р. Аптышевой

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая разработка выполнена в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и рабочими программами по теоретической механике для специальностей 260501 "Технология продуктов общественного питания", 260302 "Технология рыбы и рыбных продуктов". Методические указания содержат краткие теоретические сведения не только по теме "Плоско-параллельное движение", но и по темам "Поступательное движение" и "Вращательное движение", а также 30 вариантов заданий и пример выполнения задания с подробными объяснениями. Методические указания могут быть полезны не только для студентов дневной формы обучения указанных специальностей, но и студентам других форм обучения и специальностей, изучающих теоретическую механику.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение твердого тела – это такое его движение, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, при перемещении остается параллельной своему начальному направлению. Например, прямолинейное поступательное движение совершает поршень B кривошипно-

шатунном механизме (рис. 1.1), кабина "чертова колеса" движется поступательно криволинейно и т. д.

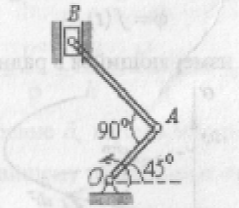


Рис. 1.1

При решении задач кинематики все тела рассматриваются как абсолютно твердые. *Абсолютно твердое тело* – это тело, расстояние между каждыми двумя точками которого остается всегда неизменным.

При поступательном движении все точки тела движутся по одинаковым траекториям, и их скорости и ускорения в каждый момент времени одинаковы по модулю и направлению. Таким образом, поступательное движение твердого тела характеризуется движением какой-либо его точки, следовательно, к телу, совершающему такое движение, можно применять законы кинематики точки и понятия скорости и ускорения тела. Эти понятия уместны только при поступательном движении, так как это единственное движение, при котором скорости и ускорения всех точек тела одинаковы.

1.2. Вращательное движение твердого тела

Если две точки, неизменно связанные с твердым телом во время его движения неподвижны, то такое движение называется *вращательным*, а прямая, проходящая через эти две точки – осью вращения. Вращательное движение совершает кривошип OA на рис. 1.1, роторы турбин, генераторов и двигателей и т. д.

Пусть положение какой-нибудь точки A при вращении вокруг неподвижной оси OO', задается радиус-вектором $\bar{r}$, проведенным из некоторой точки O на оси вращения и составляющим с ней угол ϑ (рис. 1.2). Тогда конец радиус-вектора совершает линейное перемещение $d\bar{r}$, и точка A совершает за время dt бесконечно малый поворот $d\varphi$.

Таким образом, все точки, расположенные на оси, за все время движения остаются неподвижными, а все остальные точки тела движутся по окружностям с центрами, лежащими на оси, плоскости которых перпендикулярны оси вращения а закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

$$\varphi = f(t), \qquad (1.1)$$

где φ – угол поворота тела, измеряющийся в радианах.

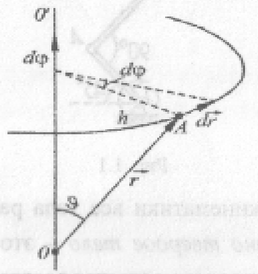


Рис. 1.2

Основными кинематическими характеристиками данного типа движения являются угловая скорость ω и угловое ускорение ε, которые находятся следующим образом:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}; \qquad \varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}. \qquad (1.2)$$

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против часовой стрелки, единица измерения – рад / с ($с^{-1}$). Вектор $\vec{\varepsilon}$ также направлен вдоль оси вращения, единица измерения – рад / $с^2$ ($с^{-2}$). В том случае, если с течением времени происходит увеличение угловой скорости по модулю, тело вращается ускоренно, в противном случае – замедленно. Соответственно, при ускоренном вращении направления векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадают, при замедленном они противоположны.

Модуль скорости точки вращающегося твердого тела, отстоящей на расстоянии h от оси вращения, определяется как произведение угловой скорости тела на это расстояние:

$$V = \omega \cdot h, \qquad (1.3)$$

вектор скорости направлен по касательной к траектории точки перпендикулярно расстоянию h. Ускорение любой точки тела, совершающего вращательное движение, геометрически складывается из его касательной и нормальной составляющих:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \qquad (1.4)$$

каждая из которых численно находится следующим образом:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = h \cdot \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \cdot h, \qquad (1.5)$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{h} = \frac{h^2 \cdot \omega^2}{h} = \omega^2 \cdot h. \qquad (1.6)$$

Соответственно ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории, а ускорение $\vec{a}_n$ – по кратчайшему расстоянию от точки до оси вращения.

1.3. Плоско-параллельное движение твердого тела

При *плоскопараллельном (плоском) движении* тела все его точки во все время движения остаются параллельными какой-либо фиксированной плоскости. Плоско-параллельно движется шатун AB на рис. 1.1, колесо, катящееся по неподвижной поверхности (рис. 1.5, *в*). Если в теле, совершающем такое движение, выделить сечение его плоскостью, относительно которой все точки тела остаются параллельными, то все точки прямой, перпендикулярной данному сечению, движутся тождественно, следовательно, изучение плоскопараллельного движения тела можно свести к изучению движения этого сечения (или плоской фигуры 1 на рис. 1.3) в данной плоскости. Положение этой фигуры в плоскости в свою очередь определяется положением некоторого отрезка AM, принадлежащего фигуре.

Выбрав точку A за полюс, то есть точку, определяющую положение фигуры, и задавшись ее координатами x_A, y_A и углом φ между отрезком AM и осью x, можно записать уравнения плоского движения твердого тела в следующем виде:

$$x = x(t); \; y = y(t); \; \varphi = \varphi(t). \qquad (1.7)$$

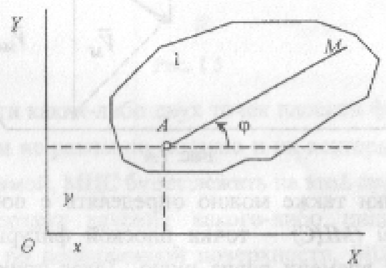


Рис. 1.3

Руководствуясь вышесказанным, можно сделать вывод, что плоскопараллельное движение можно рассматривать как сумму поступательного движения точки A или любой другой точки плоской фигуры, взятой в качестве полюса, и вращательного движения вокруг этого полюса, соответственно основными кинематическими характеристиками являются скорость и ускорение поступательного движения (то есть скорость и ускорение полюса), а также угловая скорость и угловое ускорение вращательного движения вокруг полюса.

Скорость любой точки M равна геометрической сумме скорости полюса и скорости движения этой точки вокруг полюса:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}. \qquad (1.8)$$

Данное равенство представляет собой формулу Эйлера для определения скорости точки при плоском движении, где $V_{MA} = \omega \cdot MA$.

Проецируя равенство (1.8) на прямую AM (рис. 1.4) и учитывая, что вектор $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярен этой прямой, получим:

$$V_M \cos\beta = V_A \cos\alpha. \qquad (1.9)$$

Полученное выражение представляет собой *теорему о проекциях скоростей*: проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, соединяющую эти точки, равны друг другу.

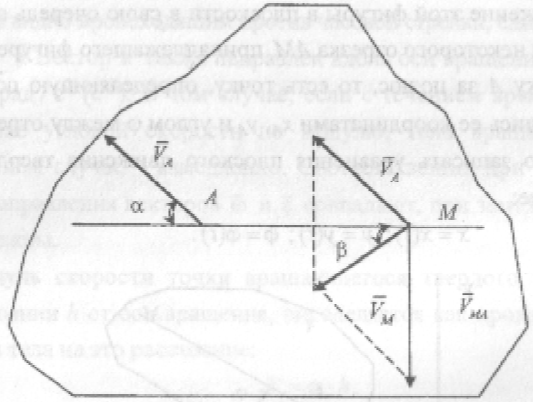


Рис. 1.4

Скорость точки также можно определять с помощью мгновенного *центра скоростей (МЦС)* – точки плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Такая точка в каждый момент времени существует в том случае, если фигура движется непоступательно.

Запишем формулу (1.8) для точки M, приняв мгновенный центр скоростей (точку P) за полюс:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP}. \qquad (1.10)$$

Так как по определению $\vec{V}_P = 0$, то, таким образом, скорость точки M или любой другой точки плоской фигуры в данный момент времени находится так, как при вращении фигуры вокруг мгновенного центра скоростей. Тогда по свойству вращательного движения можно записать следующее выражение для нахождения численного значения скорости точки M:

$$V_M = \omega \cdot PM. \qquad (1.11)$$

В общем случае, если известны направления векторов скоростей каких-либо двух точек плоской фигуры, мгновенным центром скоростей будет точка пересечения перпендикуляров, проведенных к этим векторам.

Однако в некоторых случаях МЦС находится следующим образом:

- когда скорости каких-либо двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и не параллельны прямой, соединяющей их, то МЦС лежит в бесконечности и скорости всех точек равны по модулю и направлению, то есть имеет место мгновенное поступательное распределение скоростей, а угловая скорость в данный момент времени будет равна нулю (рис. 1.5, *а*);

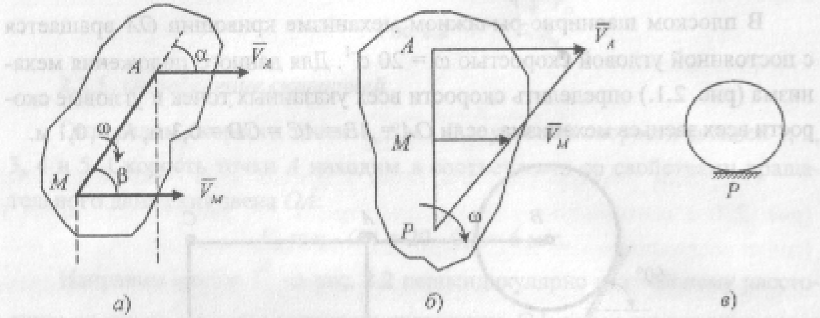


Рис. 1.5

- когда скорости каких-либо двух точек плоской фигуры параллельны друг другу, при этом не равны по модулю и их векторы перпендикулярны соединяющей их прямой, МЦС будет лежать на этой прямой (рис. 1.5, *б*);
- когда происходит качение какого-либо цилиндрического тела (например, колеса) по неподвижной поверхности, МЦС катящегося тела будет лежать в точке его соприкосновения с этой поверхностью (рис. 1.5, *в*).

Взяв производную по времени от выражения (1.10), получим формулу Эйлера для определения ускорения точки при плоском движении:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}. \tag{1.12}$$

Разложив в формуле (1.12) каждое из ускорений на касательную и нормальную составляющие, получим:

$$\vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^{n} = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{MA}^{n} + \vec{a}_{MA}^{\tau}, \tag{1.13}$$

где нормальное ускорение точки М вокруг полюса А, направленное от точки М к этому полюсу, соответственно находится так:

$$a_{MA}^{n} = MA \cdot \omega^2, \tag{1.14}$$

а касательная составляющая этого ускорения, перпендикулярная нормальной и направленная в сторону углового ускорения, будет равна

$$a_{MA}^{\tau} = MA \cdot \varepsilon. \tag{1.15}$$

Используя данные равенства, можно найти ускорения любой точки плоской фигуры.

2. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

2.1. исходные данные

В плоском шарнирно-рычажном механизме кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 20\ c^{-1}$. Для данного положения механизма (рис. 2.1.) определить скорости всех указанных точек и угловые скорости всех звеньев механизма, если $OA = AB = AC = CD = 0{,}3$ м, $R_1 = 0{,}1$ м.

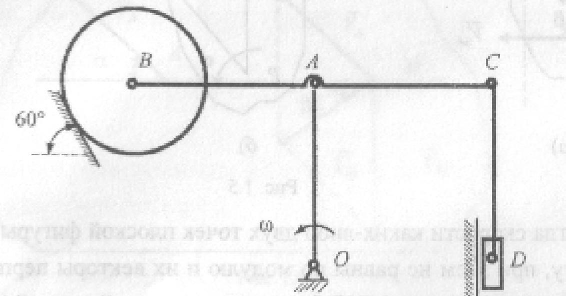


Рис. 2.1

Определить также ускорение точки B и угловое ускорение звена BAC, считая угловую скорость ω кривошипа постоянной.

2.2. Решение

Для удобства решения задачи обозначим подвижные звенья механизма (рис. 2.2) цифрами: 1 – каток, 2 – кривошип OA, 3 – стержень BAC, 4 – шатун CD, 5 – ползун D. Проанализируем характер движения каждого звена. В данном кривошипно-шатунном механизме звено OA совершает вращательное движение, звенья BAC, CD и каток 1 – плоскопараллельное, ползун D – поступательное.

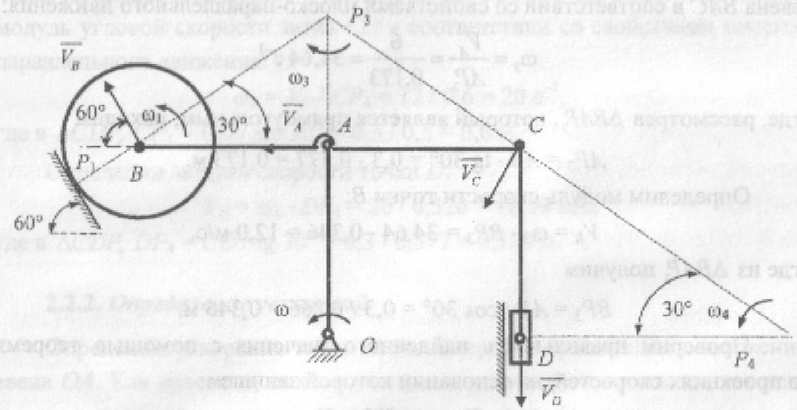


Рис. 2.2

2.2.1. *Определение скоростей*

Определим скорости точек A, B, C, D и угловые скорости звеньев 1, 2, 3, 4 и 5. Скорость точки A находим в соответствии со свойствами вращательного движения звена OA:

$$V_A = \omega \cdot OA = 20 \cdot 0{,}3 = 6 \text{ м/с}.$$

Направим вектор $\overline{V_A}$ на рис. 2.2 перпендикулярно кратчайшему расстоянию от точки A до оси вращения кривошипа OA, которая проходит через точку O, то есть расстоянию OA, в ту сторону, куда указывает угловая скорость кривошипа ω.

Вектор скорости точки B направляем перпендикулярно отрезку BP_1, соединяющему точку B с мгновенным центром скоростей (МЦС) катка 1 согласно свойствам плоско-параллельного движения этого тела. Для нахождения модуля скорости точки B можно воспользоваться как теоремой о проекциях скоростей, так и свойствами МЦС стержня BAC. Воспользуемся вторым способом, поскольку МЦС стержня BAC потребуется для определения скорости точки C. Сначала определим положение МЦС стержня BAC, проведя перпендикуляры к $\overline{V_A}$ и $\overline{V_B}$ из точек их приложения. Точка пересечения перпендикуляров P_3 является МЦС стержня BAC. Теперь изобразим на рис. 2.2 угловую скорость стержня BAC ω_3 по направлению поворота отрезка AP_3 под действием вектора $\overline{V_A}$ вокруг МЦС P_3 (в данном случае – по ходу часовой стрелки). Определим модуль угловой скорости звена BAC в соответствии со свойствами плоско-параллельного движения:

$$\omega_3 = \frac{V_A}{AP_3} = \frac{6}{0{,}173} = 34{,}64\ \text{с}^{-1},$$

где, рассмотрев ΔBAP_3, который является прямоугольным, находим

$$AP_3 = AB \cdot \operatorname{tg} 30° = 0{,}3 \cdot 0{,}577 = 0{,}173\ \text{м}.$$

Определим модуль скорости точки B:

$$V_B = \omega_3 \cdot BP_3 = 34{,}64 \cdot 0{,}346 = 12{,}0\ \text{м/с},$$

где из ΔBAP_3 получим

$$BP_3 = AB / \cos 30° = 0{,}3 / 0{,}866 = 0{,}346\ \text{м}.$$

Проверим правильность найденного значения с помощью теоремы о проекциях скоростей, на основании которой запишем:

$$V_B \cdot \cos 60° = V_A.$$

Следовательно,

$$V_B = \frac{V_A}{\cos 60°} = \frac{6}{\cos 60°} = 12{,}0\ \text{м/с}.$$

Направим угловую скорость катка 1 против хода часовой стрелки (рис. 2.2) в соответствии с поворотом отрезка BP_1 вокруг МЦС катка 1 (точки соприкосновения катка с неподвижной поверхностью – P_1) под действием вектора $\overline{V_B}$. Определим модуль угловой скорости катка 1 в соответствии со свойствами плоско-параллельного движения:

$$\omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = \frac{V_B}{R_1} = \frac{12}{0{,}1} = 120\ \text{с}^{-1}.$$

Изобразим вектор скорости точки C на рис. 2.2 перпендикулярно отрезку CP_3 в направлении угловой скорости ω_3 в соответствии со свойствами плоско-параллельного движения и определим его модуль:

$$V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = 34{,}64 \cdot 0{,}346 = 12{,}0\ \text{м/с},$$

где $CP_3 = BP_3 = 0{,}346$ м в равнобедренном треугольнике CBP_3.

Изобразим на рис. 2.2 скорость точки D вертикально вниз, учитывая поступательное прямолинейное движение ползуна 5 и направление вектора скорости точки C.

Определим положение МЦС звена CD, проведя перпендикуляры к $\overline{V_C}$ и $\overline{V_D}$ из точек их приложения. Точка пересечения перпендикуляров P_4 – МЦС звена CD. Теперь изобразим на рис. 2.2 угловую скорость звена CD ω_4 по направлению поворота отрезка CP_4 под действием вектора $\overline{V_C}$ вокруг МЦС P_4 (в данном случае – против хода часовой стрелки). Определим модуль угловой скорости звена CD в соответствии со свойствами плоско-параллельного движения:

$$\omega_4 = V_C / CP_4 = 12 / 0{,}6 = 20\ \text{с}^{-1},$$

где в ΔCDP_4 $CP_4 = CD / \sin 30° = 0{,}3 / 0{,}5 = 0{,}6$ м.

Определим модуль скорости точки D:

$$V_D = \omega_4 \cdot DP_4 = 20 \cdot 0{,}520 = 10{,}39\ \text{м/с},$$

где в ΔCDP_4 $DP_4 = CD / \operatorname{tg} 30° = 0{,}3 / 0{,}577 = 0{,}520$ м.

2.2.2. *Определение ускорений*

Определим ускорение точки A, рассматривая вращательное движение звена OA. Как известно, полное ускорение точки A определяется как векторная сумма нормального и касательного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau} \qquad (2.1)$$

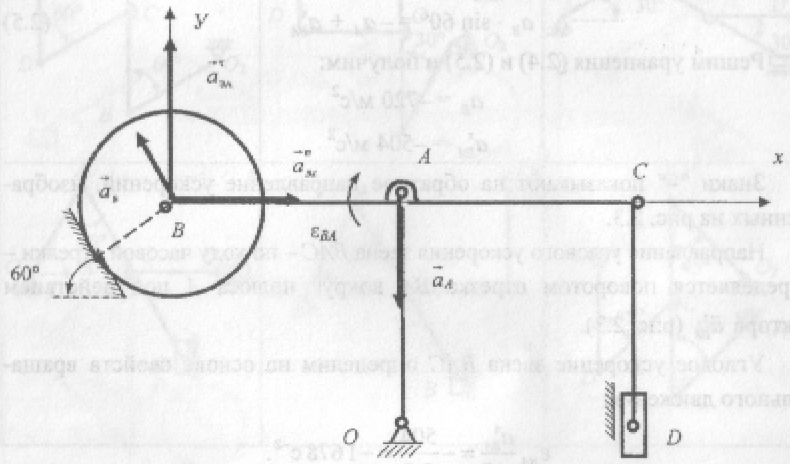


Рис. 2.3

Рассчитаем нормальное ускорение точки A при вращательном движении звена OA, вектор которого направим по кратчайшему расстоянию от этой точки до оси вращения кривошипа OA в сторону этой оси:

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 20^2 \cdot 0{,}3 = 120 \text{ м/с}^2.$$

Касательное ускорение точки A при вращательном движении звена OA:

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 0,$$

так как $\varepsilon = 0$ при равномерном вращении звена OA.

Выберем точку A за полюс и запишем векторную формулу, связывающую между собой ускорения двух точек плоской фигуры:

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \qquad (2.2)$$

В соответствии со свойствами прямолинейного движения нормальное ускорение точки B равно нулю, а касательное направлено по прямой, вдоль которой движется точка B (рис. 2.3). Нормальное ускорение относительного поворота точки B вокруг точки A направлено от точки B к точке A и определяется свойствами вращательного движения:

$$a_{BA}^n = \omega_3{}^2 \cdot AB = 34{,}64^2 \cdot 0{,}3 = 360 \text{ м/с}^2.$$

С учетом двух ускорений, равных нулю, формула (2.2) принимает вид:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA} \qquad (2.3)$$

Для нахождения двух неизвестных ускорений спроецируем векторное уравнение (2.3) на оси x и y (рис. 2.3) и получим два скалярных уравнения:

$$-a_B \cdot \cos 60^\circ = a_{BA}^n \qquad (2.4)$$

$$a_B \cdot \sin 60^\circ = -a_A + a_{BA}^\tau \qquad (2.5)$$

Решим уравнения (2.4) и (2.5) и получим:

$$a_B = -720 \text{ м/с}^2$$

$$a_{BA}^\tau = -504 \text{ м/с}^2$$

Знаки "–" показывают на обратное направление ускорений, изображенных на рис. 2.3.

Направление углового ускорения звена BAC – по ходу часовой стрелки – определяется поворотом отрезка BA вокруг полюса A под действием вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ (рис. 2.3).

Угловое ускорение звена BAC определим на основе свойств вращательного движения:

$$\varepsilon_{BA} \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = -\frac{504}{0{,}3} = -1\,678 \text{ c}^{-2}.$$

3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

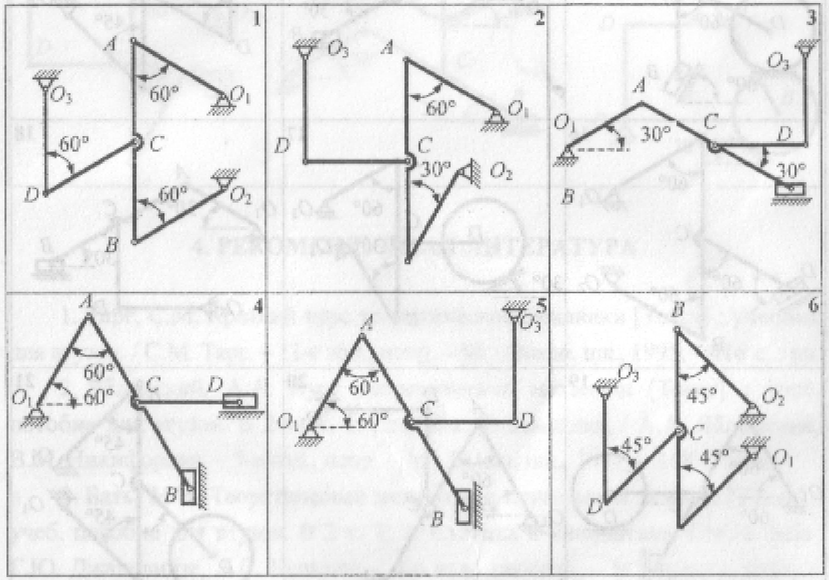
3.1. Рекомендации по выбору варианта задания

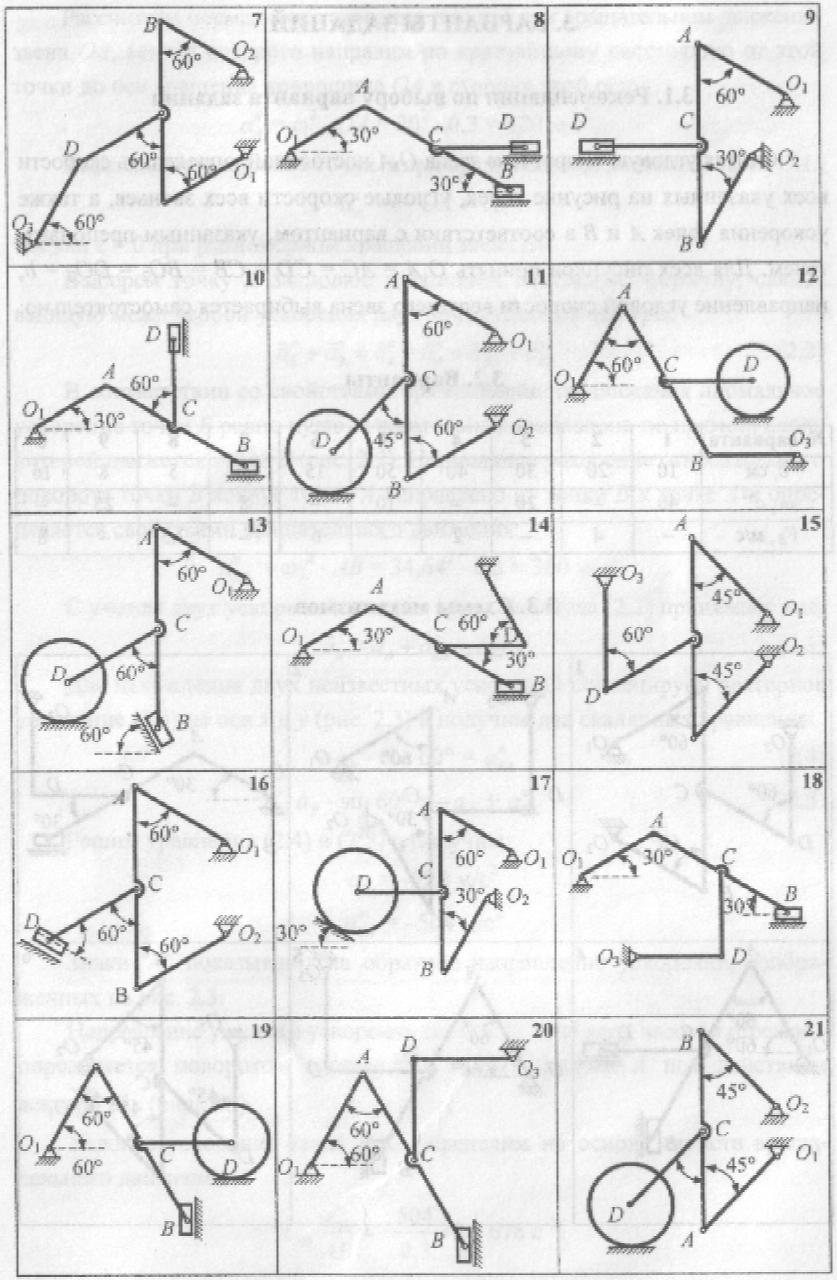
Считая угловую скорость ω звена O_1A постоянной, определить скорости всех указанных на рисунке точек, угловые скорости всех звеньев, а также ускорения точек A и B в соответствии с вариантом, указанным преподавателем. Для всех рисунков принять $O_1A = AC = CD = CB = BO_2 = DO_3 = b$, направление угловой скорости ведущего звена выбирается самостоятельно.

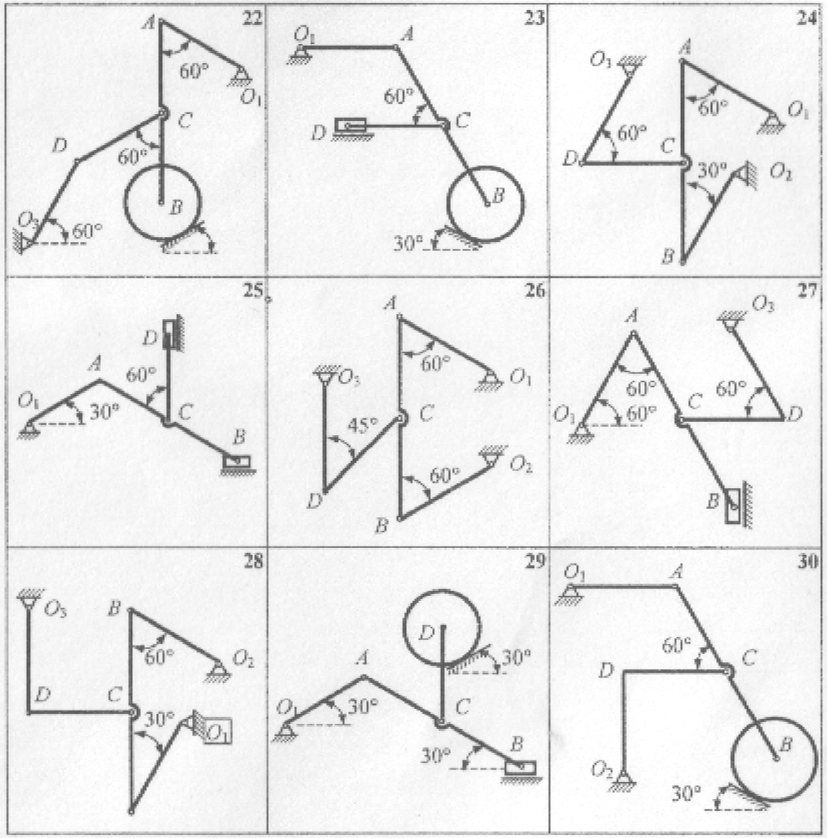
3.2. Варианты

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
b, см	10	20	30	40	50	15	25	5	8	16
ω, c^{-1}	40	–	20	–	10	–	8	–	25	–
V_B, м/с	–	4	–	2	–	6	–	2,5	–	8

3.3. Схемы механизмов







4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики [Текст] : учебник для втузов. / С.М. Тарг. – 11-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 1995. – 416 с. : ил.

2. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [Текст] : учеб. пособие для втузов. В 2 ч. Ч. 1. Статика. Кинематика. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 5-е изд., испр. – М : Высш. шк., 1977. – 368 с. : ил.

3. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие для втузов. В 2 т. Т. 1. Статика и кинематика. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 8-е изд., перераб. – М. : Наука, 1984. – 504 с.