



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Е.Е. Бульба, Г.Р. Зиякаев

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2013





УДК 532.5(075.8)
ББК 22.253я73
Б90

Б90

Бульба Е.Е.

Гидрогазодинамика: учебное пособие / Е.Е. Бульба, Г.Р. Зиякаев; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 108 с.

В авторской редакции

В учебном пособии рассмотрены основные понятия и законы гидрогазодинамики, а также приведены примеры расчетов (с подробными решениями), с достаточной полнотой охватывающие основные разделы курса. Для закрепления учебного материала в конце каждой темы даны вопросы и задания.

Пособие подготовлено на кафедре теоретической и промышленной теплотехники, соответствует программе дисциплины и предназначено для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника», 280700 «Техносферная безопасность».

**УДК 532.5(075.8)
ББК 22.253я73**

Рецензенты

Доктор технических наук,
профессор кафедры ТПМ
Л.А. Саруев

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры аэромеханики ТГУ
В.Ф. Трофимов

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2013
© Бульба Е.Е., Зиякаев Г.Р., 2013
© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2013



ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАУКИ «ГИДРОГАЗОДИНАМИКА».	
ПОНЯТИЕ ЖИДКОСТИ	5
2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА	
РЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ	7
2.1. Плотность	7
2.2. Вязкость	8
2.3. Способность жидкости менять свой объем.....	8
Контрольные вопросы и задания	10
3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ	11
3.1. Основные аналитические методы исследования движения жидкости.....	11
3.1.1. Метод Лагранжа.....	11
3.1.2. Метод Эйлера.....	11
3.2. Потенциальное и вихревое движения жидкости	13
3.3. Установившееся и неуставившееся течения жидкости	15
3.4. Линия тока и траектория движения	16
3.5. Трубка тока, элементарная струйка	17
3.5.1. Уравнение расхода для элементарной струйки	18
3.5.2. Расход жидкости через сечение конечных размеров	20
3.5.3. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности	21
Контрольные вопросы и задания	22
4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ	
И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЕЙ.....	24
4.1. Уравнение движения реальной (вязкой) жидкости Навье – Стокса	24
4.2. Уравнение движения Эйлера для идеальной жидкости	25
Контрольные вопросы и задания	26
5. ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ	27
5.1. Основные сведения.....	27
5.2. Гидростатическое давление	27
5.3. Основное уравнение гидростатики	29
5.4. Давление и поверхность уровня при абсолютном покое	30
5.5. Относительный покой жидкости.....	36
5.6. Сила давления жидкости на криволинейную поверхность	39
6. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ.....	41
6.1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки	
идеальной жидкости	41
6.2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости	42
6.3. Уравнение Бернулли для всего потока	44



7. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ В ТРУБОПРОВОДАХ	46
7.1. Режимы движения жидкости.....	46
7.2. Основные формулы для расчета потерь за счет трения. Опыты и график Никурадзе	50
7.3. Местные гидравлические сопротивления	52
Контрольные вопросы и задания	56
8. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ИСТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ	58
8.1. Общая характеристика истечения	58
8.2. Истечение жидкости из отверстия в тонкой стенке.....	59
8.3. Истечение при переменном напоре	65
8.4. Истечение жидкости через насадки	67
8.5. Зависимость коэффициентов истечения от числа Рейнольдса	71
8.6. Вакуум в цилиндрическом насадке.....	72
8.7. Практическое применение насадков	74
Контрольные вопросы и задания	78
9. ПЕРЕКАЧКА ЖИДКОСТИ ПО ТРУБАМ.....	80
9.1. Классификация трубопроводов	82
9.2. Система уравнений и задачи гидравлического расчета трубопроводов ..	83
9.3. Метод расчета простых трубопроводов	88
9.4. Методики расчета сложных трубопроводов.....	92
10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ, МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ	98
10.1. Основные положения	98
10.2. Законы механического подобия	98
10.2.1. Геометрическое подобие	99
10.2.2. Кинематическое подобие	100
10.2.3. Динамическое подобие	101
10.3. Гидродинамические критерии подобия	102
Контрольные вопросы и задания	105
ЛИТЕРАТУРА	106



1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАУКИ «ГИДРОГАЗОДИНАМИКА».

ПОНЯТИЕ ЖИДКОСТИ

Механика, являясь частью физики, изучает общие закономерности, связывающие механические движения и взаимодействия тел, находящихся в трех состояниях: твердом, жидком и газообразном. Различное состояние тел способствовало разделению механики на отдельные области.

В механике твердого тела рассматриваются абсолютно твердые и деформируемые тела; последние, в свою очередь, разделяются на тела упругие и пластические. Изучением законов движения абсолютно твердых тел занимается теоретическая механика, и пластических – теория упругости и теория пластичности.

Законы движения жидкостей и газов изучает механика жидкости и газов, или **гидрогазодинамика**.

Механика жидкостей и газов, так же как и другие области механики, разделяется на статику, кинематику и динамику. Часть гидромеханики, изучающая условия равновесия жидкостей называется **гидростатикой**. **Кинематика** жидкостей изучает их движение во времени, не интересуясь причинами, вызывающими это движение. Предметом изучения **гидродинамики** являются движения жидкостей и газов в связи с их взаимодействием.

Гидромеханика пользуется в качестве основного метода исследований строгим математическим анализом. Вначале независимо, а затем параллельно гидромеханике развивалась **гидравлика** – прикладная инженерная наука о равновесии и движении жидкостей, основанная преимущественно на экспериментальных данных и разрабатывающая приближенные методы расчета течений в трубах, каналах и реках.

Жидкость есть физическое тело, которое весьма мало меняет свой объем при изменении давления или температуры; в этом отношении жидкость сходна с твердым телом и обладает текучестью. Благодаря текучести жидкость не имеет собственной формы и принимает форму того сосуда, в котором она находится; по этой причине жидкость отличается от твердого тела и является сходной с газом.

Текучесть рассматриваемого тела обуславливается тем, что оно в покое не способно сопротивляться внутренним касательным усилиям, т.е. усилиям, действующим вдоль поверхности сдвига.

Жидкость, в отличие от твердого тела, находясь в покое, не имеет касательных напряжений, и именно поэтому она принимает форму сосуда, в котором заключена. Поскольку газ также обладает свойством те-

кучести, то многие теоретические положения, разработанные применительно к жидкому телу, могут быть распространены и на случай газообразных тел.

Можно сделать вывод, что газ тоже является жидкостью. Следовательно, жидкость можно разделить на капельную (вода нефть и др.) и на газообразную (газы, воздух).

Как показывает опыт, жидкости, встречающиеся в природе, столь мало изменяют свой объем при обычном изменении давления и температуры, что этим изменением практически можно пренебрегать. Поэтому в гидравлике жидкость рассматривается как абсолютно несжимаемое тело (здесь приходится делать исключение только при изучении одного вопроса – вопроса о так называемом гидравлическом ударе, когда даже малую сжимаемость жидкости приходится учитывать).

В движущейся жидкости, как показывают исследования, касательные напряжения обычно имеют место: именно при движении жидкости по поверхности скольжения жидких слоев друг по другу возникает трение, которое и уравнивает внутренние касательные силы.

В практике встречаются случаи, когда силы трения, возникающие благодаря вязкости, оказываются небольшими сравнительно с другими силами, действующими на жидкость. В этих частных случаях вязкостью можно пренебречь и считать, что в движущейся жидкости касательные напряжения отсутствуют так же, как и в покоящейся жидкости.

При теоретических исследованиях часто пользуются понятием идеальной жидкости. *Идеальной жидкостью* называют воображаемую жидкость, которая характеризуется:

- а) абсолютной неизменяемостью объема (при изменении давления и температуры);
- б) полным отсутствием вязкости, т.е. сил трения при любом ее движении.

Идеальная жидкость, в отличие от реальной («вязкой») жидкости, в природе, разумеется, не существует. Ее создают в воображении как некоторую приближенную модель реальной жидкости.

Из сказанного выше следует, что:

- 1) при изучении покоящейся жидкости нет надобности различать реальную и идеальную жидкости;
- 2) при изучении же движения жидкости очень часто приходится считаться с различием между двумя названными жидкостями: в случае реальной жидкости необходимо дополнительно учитывать силы трения, т.е. вязкость.

2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Многие свойства жидкостей изучаются в общей физике, а не в гидравлике. Гидравлика, представляет собой особый раздел профессиональной физики и занимается вопросами механики жидкости.

2.1. Плотность

Одним из основных свойств жидкости является *плотность*.

Как известно из общей физике, плотностью ρ называют отношение массы жидкости к ее объему, т.е.

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}, \quad (2.1)$$

где ΔM , ΔW – изменение массы и объема жидкости. Размерность плотности

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}.$$

Единицами измерения плотности являются: кг/м^3 в системе СИ и $\text{кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4$ в технической системе.

Введем обозначение:

$$\gamma = \frac{G}{W}, \quad (2.2)$$

где G – есть вес жидкости; γ – вес единицы объема жидкости (ранее эту единицу называли «удельным весом» или «объемным весом»). Размерность удельного веса

$$[\gamma] = \frac{M}{L^2 T^2}.$$

Единица измерения удельного веса в системе СИ – Н/м^3 .

Удельный вес и плотность жидкости связаны следующим соотношением:

$$\gamma = \frac{G}{W} = \frac{Mg}{W} = \rho g, \quad (2.3)$$

где g – ускорение свободного падения.

2.2. Вязкость

Между слоями жидкости, движущимися со скоростями, отличающимися друг от друга на величину du , возникает касательное напряжение τ :

$$\frac{T_{\text{тр}}}{S} = \tau = \pm \mu \frac{du_x}{dy}, \quad (2.4)$$

где $T_{\text{тр}}$ – сила трения; S – площадь соприкасающихся слоев.

Свойство жидкости, обуславливающее возникновение в ней при ее движении касательных напряжений («напряжений трения»), называется *вязкостью*.

Величинами, которые могут оценить это свойство, являются коэффициент динамической вязкости μ (Н·с/м²) и коэффициент кинематической вязкости ν (м²/с), связанные между собой соотношением $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Вязкость жидкости очень слабо зависит от давления и сильно зависит от температуры. Для капельной жидкости с повышением температуры вязкость уменьшается, а для газообразной, наоборот, увеличивается.

Кроме обычных (ньютоновских) жидкостей, характеризующихся зависимостью (2.4), существуют аномальные жидкости, к которым относятся коллоидные растворы, смазочные масла, нефтепродукты. Для таких жидкостей закон внутреннего трения выражается в виде

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \frac{dU}{dz}, \quad (2.5)$$

где τ_0 – касательное напряжение в покоящейся жидкости, после преодоления которого, жидкость приходит в движение.

2.3. Способность жидкости менять свой объем

Сжимаемость – свойство жидкости уменьшать объем под действием давления. Она оценивается коэффициентом сжимаемости β_P (1/Па), показывающим относительное изменение объема жидкости W на единицу изменения давления ΔP :

$$\beta_P = \frac{1}{\Delta P} \left(\frac{\Delta W}{W} \right). \quad (2.6)$$

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется *модулем упругости жидкости E* (Па):

$$E = \frac{1}{\beta_P}. \quad (2.7)$$

Тепловое расширение – свойство жидкости изменять объем при нагревании, которое характеризуется коэффициентом теплового расширения β_T ($^{\circ}\text{C}^{-1}$), численно равным относительному приращению объема W с повышением температуры T на один градус при постоянном давлении:

$$\beta_T = \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{\Delta W}{W} \right). \quad (2.8)$$

Как правило, при нагревании объем жидкости увеличивается.

Примеры

Пример 2.1. Удельный вес бензина $\gamma = 7063 \text{ Н/м}^3$. Определить его плотность.

Решение: $\gamma = \rho \cdot g$; $\rho = \gamma / g$; $\rho = 7063 / 9,81 = 720 \text{ кг/м}^3$.

Пример 2.2. Плотность дизельного мазута $\rho = 878 \text{ кг/м}^3$. Определить его удельный вес.

Решение: $\gamma = \rho \cdot g$; $\gamma = 878 \cdot 9,81 = 8613 \text{ Н/м}^3$; $\gamma = 878 \cdot 9,81 = 8613 \text{ Н/м}^3$.

Пример 2.3. При гидравлическом испытании трубопровода диаметром $d = 200 \text{ мм}$ и длиной 250 м давление в трубе было повышено до 3 МПа . Через час давление снизилось до 2 МПа . Сколько воды вытекло через неплотности?

Решение:

1. Определим объем воды в трубопроводе:

$$W = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot l}{4} = \frac{\pi \cdot 0,2^2 \cdot 250}{4} = 7,85 \text{ м}^3.$$

2. Найдем изменение давления за время испытания:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 3 - 2 = 1 \text{ МПа}.$$

3. Принимая коэффициент объемного сжатия воды

$$\beta_P = 5 \cdot 10^{-7} \text{ 1/кПа},$$

находим количество воды, вытекающей через неплотности, по формуле

$$\Delta W = -\beta_P \cdot W \cdot \Delta p = 5 \cdot 10^{-10} \cdot 7,85 \cdot 1 \cdot 10^6 = 3,925 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \approx 3,93 \text{ л}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите основные физические свойства жидкостей.
2. Что подразумевается под жидкостью в гидравлике?
3. Что подразумевается под сплошностью среды?
4. Какая связь существует между плотностью и удельным весом жидкостей?
5. Какова размерность плотности и удельного веса?
6. В каких единицах измеряется плотность и удельный вес в системе СИ?
7. Что такое коэффициент объемного сжатия жидкости? Какова его размерность?
8. Какая связь коэффициента объемного сжатия с модулем объемной упругости? Какова его размерность?
9. Что такое коэффициент температурного расширения? Какова его размерность?
10. Что называется вязкостью жидкости?
13. Что такое коэффициент динамической вязкости? Какова его размерность?
14. Какая связь существует между коэффициентами динамической и кинематической вязкости?
15. В каких единицах измеряется динамическая и кинематическая вязкость в системе СИ?
16. Какие жидкости относятся к аномальным?
17. В чем отличие аномальных жидкостей от ньютоновских?

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ

Кинематика жидкости изучает связь между геометрическими характеристиками движения и времени (скоростью и ускорением).

Динамика жидкости изучает законы движения как результат действия сил.

3.1. Основные аналитические методы исследования движения жидкости

3.1.1. Метод Лагранжа

Будем считать, что для каждой частицы нам известны зависимости

$$\begin{aligned}x &= f_1(x_0, y_0, z_0); \\y &= f_2(x_0, y_0, z_0); \\z &= f_3(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Пользуясь этими зависимостями, можно построить траектории намеченных частиц жидкости. Далее можно в любом месте этих траекторий найти длину пути ds , проходимого частицей за время dt . Например,

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt}.\tag{3.2}$$

В данном случае мы следим за отдельными частицами жидкости в течение времени t , за которое эти частицы, двигаясь по своим траекториям, проходят всю рассматриваемую область.

Согласно Лагранжу, о потоке жидкости в целом можно судить по совокупному рассмотрению траекторий, описываемых частицами жидкости.

3.1.2. Метод Эйлера

Представим некоторую область, занятую движущейся жидкостью. Согласно Эйлеру, не следят за движением отдельных частиц жидкости и не интересуются их траекториями.

В соответствии с предложениями Эйлера намечают точки, которые считают скрепленными с рассматриваемым неподвижным пространством. Эти точки неподвижны при протекании через них жидкости. Здесь величины x , y , z не есть текущие координаты частиц жидкости, а просто координаты неподвижных точек пространства.

Рассмотрим момент времени t_1 . В этот момент времени в точке 1 будет находиться некоторая частица жидкости, имеющая скорость $u_1(t_1)$; в этот же момент времени в точке 2 будем иметь скорость $u_1(t_1)$; в точке 3 – скорость $u_3(t_1)$ и т.д.

Согласно Эйлеру, поток в целом в данный момент времени оказывается представленным векторным полем скоростей, относящихся к неподвижным точкам пространства. В следующий момент времени получается другое поле скоростей. Сравнивая эти поля скоростей, можно судить о том, как поток ведет себя с течением времени.

Выше было отмечено, что координаты x, y, z , согласно Эйлеру, являются координатами неподвижных произвольных точек пространства. Поэтому в данном случае величины dx, dy, dz нельзя рассматривать как проекции элементарного пути, проходимого частицами жидкости за время dt . Эти величины здесь являются просто произвольными приращениями координат. В связи с этим зависимости (3.2) в случае метода Эйлера – неприемлемы.

Метод Лагранжа ввиду его сложности не нашел широкого применения в гидравлике. Далее в основном будет использоваться метод Эйлера, согласно которому следят за движением частиц в продолжение элементарного отрезка времени, когда данная частица жидкости проходит через рассматриваемую точку пространства.

Рассматривая индивидуальную производную как полную производную по времени от вектора скорости, представляющего сложную функцию от времени t , как явно в случае нестационарного поля скоростей, так и через посредство координат x, y, z движущейся точки, найдем ускорение вектора скорости

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (3.3)$$

или, учитывая, что производные по времени от координат движущейся точки равны проекциям ее скорости на оси координат

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z,$$

получаем следующее выражение вектора ускорения в эйлеровых переменных:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + u_x \frac{\partial u}{\partial x} + u_y \frac{\partial u}{\partial y} + u_z \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3.4)$$

Проекции рассматриваемого вектора ускорения на оси неподвижных координат вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{u}_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \\ \dot{u}_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ \dot{u}_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z},\end{aligned}\quad (3.5)$$

где $\frac{du_x}{dt}$; $\frac{du_y}{dt}$; $\frac{du_z}{dt}$ – индивидуальные или субстанциональные производные; $\frac{\partial u_x}{\partial t}$; $\frac{\partial u_y}{\partial t}$; $\frac{\partial u_z}{\partial t}$ – локальные производные, выражающие изменение во времени вектора u в фиксированной точке пространства; $\frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z$ – конвективная производная вектора u . Эта величина выражает изменение скорости в пространстве в данный момент времени. При установившемся движении локальные ускорения равны нулю.

3.2. Потенциальное и вихревое движения жидкости

Если при движении в потоке частицы жидкости не вращаются, то такое движение является потенциальным.

Условия потенциального течения имеют вид:

1. $\text{rot}(\vec{u})=0$, где $\text{rot}(\vec{u})$ – характеризует интенсивность вихревого поля в каждой его точке:

$$\text{rot}(\vec{u}) = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{k}.$$

2. Угловые скорости $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$.

3. Для потенциального течения имеем

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Три последних условия являются необходимыми и достаточными, чтобы существовала функция $\varphi(x, y, z)$, называемая потенциальной, полный дифференциал которой равен: $d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz$.

Представляя полный дифференциал функции как

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_y, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u_z.$$

Доказано, что распределение поля скоростей описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Для плоских течений, если выполняется условие

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y},$$

то существует функция $\psi(x, y)$ – функция тока, для которой выполняется $d\psi = u_x dy - u_y dx$. Учитывая, что полный дифференциал

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy, \text{ следовательно}$$

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; -u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Течение будет *вихревым*, если частицы в потоке жидкости вращаются, т.е.

$$\text{rot}(\vec{u}) \neq 0.$$

Совокупность векторов угловых скоростей в различных точках потока образуют векторное поле – поле угловых скоростей. Это векторное поле может быть как стационарным, так и нестационарным. Вихревое течение характеризуется вихревыми линиями. Линия, касательная к которой в каждой точке в данный момент времени определяет направление вектора угловой скорости ω , называется вихревой линией. Совокупность вихревых линий, пронизывающих элементарный контур S , образует вихревую трубку или вихревую нить.

Вихревые трубки (нити) характеризуются интенсивностью (I), для которой справедливо

$$dI = \omega_1 dF_1 = \omega_2 dF_2 = \dots = \text{const}.$$

Чтобы рассчитать интенсивность вихревого течения пользуются теоремой Стокса: циркуляция вектора \vec{u} по замкнутому контуру S равна интенсивности вихревого течения

$$\Gamma = \oint_S \vec{u} dS = I.$$

При этом интенсивность вихревого течения не зависит от размеров и формы контура, а зависит от размера вихревой зоны.

3.3. Установившееся и неуставившееся течения жидкости

При неуставившемся течении скорость и давление в каждой точке пространства изменяется с течением времени, т.е. $u = f(x, y, z, t)$.

При установившемся (стационарном) течении скорость в каждой точке пространства в различные моменты времени не меняет своей величины и направления, поэтому $u = f(x, y, z)$. Поэтому в случае установившегося течения

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0.$$

При установившемся течении траектории движения частиц, проходящие через одну и ту же точку пространства, совпадают друг с другом и не меняют своей формы с течением времени.

Установившееся движение может быть равномерным и неравномерным.

Равномерным движением называется такое движение, при котором скорости в сходственных точках двух смежных сечений равны между собой, а траектории частиц – прямолинейны и параллельны оси ox , т.е. поле скоростей не изменяется вниз по течению. Ускорение частиц жидкости при этом равно нулю.

Неравномерное движение – это движение, не удовлетворяющее определению равномерного движения.

Равномерное и неравномерное движение может быть напорным и безнапорным. При напорном движении жидкость соприкасается с твердой стенкой по всему периметру своего сечения, а при безнапорном – лишь по части периметра.

Таким образом:

1. Когда скорость в отдельных точках пространства изменяется относительно медленно, поэтому величинами $\frac{\partial u_x}{\partial t}$, $\frac{\partial u_y}{\partial t}$ можно пренебречь.

2. Когда скорость в отдельных точках пространства изменяется относительно быстро, тогда эти ускорения учитывать необходимо.

3.4. Линия тока и траектория движения

Для рассмотрения берут точку 1 жидкости, скорость которой в данный момент времени равна u_1 . При построении линии тока для одного и того же выбранного момента времени отступают вдоль вектора скорости в смежную точку 2, наносят на чертеж вектор скорости u_2 точки 2, отмечают на векторе u_2 ближайшую точку 3, проводят вектор ее скорости и т.д. Если стороны этой ломаной взять сколь угодно малыми, полигон 1234..... представит линию тока, проведенную через данную точку в данный момент времени (рис. 3.1).

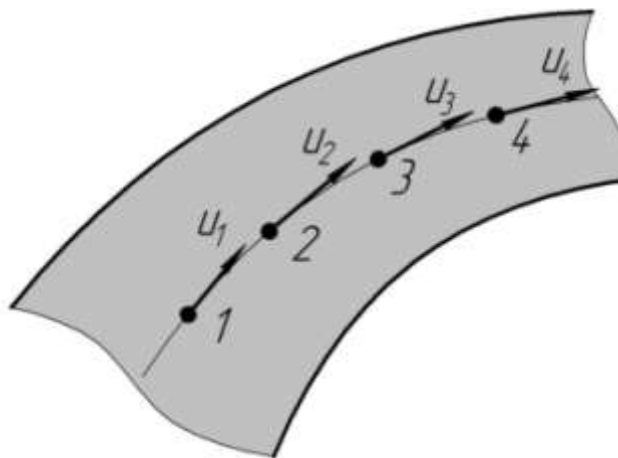


Рис. 3.1. Линия тока

Итак, под *линией тока* понимают воображаемую кривую, проведенную в потоке в данный момент времени, в каждой точке которой вектор скорости совпадает по направлению с касательной. *Траектория движения* представляет собой линию, по которой движется интересующая нас частица. В общем случае линии тока и траектории движения не совпадают.

Свойства линий тока:

1. Линии тока в потоке не пересекаются. Однако существуют особые точки, на которых они замыкаются или из которых выходят (истoki, стоки).
2. При установившемся течении линии тока не меняют своей формы.
3. При установившемся течении линии тока и траектории совпадают.

Для установившегося течения справедлива формула Лагранжа (3.2), поэтому будем иметь

$$dt = \frac{dx}{du_x} = \frac{dy}{du_y} = \frac{dz}{du_z}. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) представляет собой уравнение линии тока для установившегося течения.

3.5. Трубка тока, элементарная струйка

В гидравлике принята струйная модель потока. Мысленно весь поток разбивается на бесконечное количество струек, проводится в данный момент времени в потоке жидкости замкнутый себя не пересекающий контур (рис. 3.2), ни одна точка которого не является особой. Тогда через каждую точку такого контура можно провести линию тока. Поверхность, образуемая линиями тока, проходящими через точки этого контура, называется *трубкой тока*. Жидкость, наполняющая трубку тока, называется *струей*, а сама трубка тока является поверхностью струйки. Если контур S бесконечно мал, то струйка называется *элементарной*, в противном случае *конечной*.

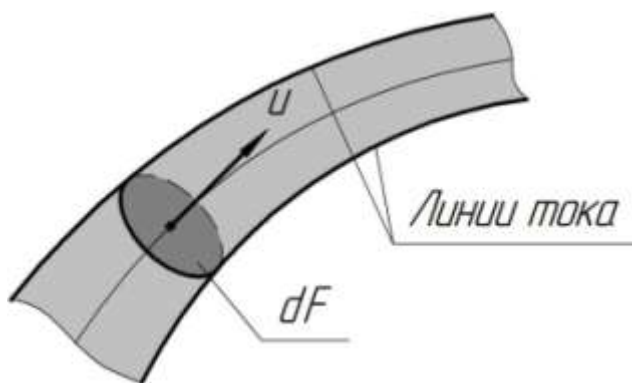


Рис. 3.2. Элементарная струйка

В случае установившегося течения элементарная струйка обладает тремя свойствами:

1. Так как площадь поперечного сечения dF бесконечно малая величина, скорость и давление в каждой точке этого сечения не меняются. Однако вдоль струйки в общем случае они могут меняться.

2. Так как боковая поверхность элементарных струек ограничена линиями тока, она не проницаема для отдельных частиц.

3. При установившемся течении элементарные струйки не меняют своей формы.

В любой точке боковой поверхности струйки, состоящей из линий тока, скорость может быть направлена только по касательной к этой поверхности. Нормальных к поверхности составляющих скорости, которые могли бы переносить частицы жидкости через эту поверхность, не существует. Элементарная трубка является изолированным элементом потока.

Различают случай потока, когда линии тока его являются строго параллельными прямыми. Такое движение называется *параллельноструйным*. Часто приходится сталкиваться с потоками, отличными от параллельноструйных. Существуют так называемые плавно изменяющееся движение и резко изменяющееся движения.

Плавно изменяющимся движением называется движение близкое к параллельноструйному. При плавно изменяющемся движении поток удовлетворяет следующим условиям:

1. Радиус кривизны потока должен быть весьма велик.

2. Угол, образованный крайними линиями тока, рассматриваемого потока (или элементарной струйки), должен быть близок к нулю.

При несоблюдении этих двух условий или одного из них имеем дело с движением, называемым резко изменяющимся.

3.5.1. Уравнение расхода для элементарной струйки

Количество жидкости, протекающее за единицу времени через рассматриваемое сечение потока, называется *расходом*. Он может измеряться в единицах массы (массовый расход m , кг/с) или в единицах объема (объемный расход Q , м³/с).

Рассмотрим отсек элементарной струйки между двумя произвольными сечениями dF_1 и dF_2 , нормальными к направлению скоростей u_1 и u_2 , плотности в сечениях ρ_1 и ρ_2 соответственно (рис. 3.3). При установившемся движении форма и объем рассматриваемого отсека не изменяются, плотность жидкости в каждой точке сечения и средняя

плотность по всему отсеку также не изменяются. Притока или оттока жидкости через боковую поверхность струйки нет.

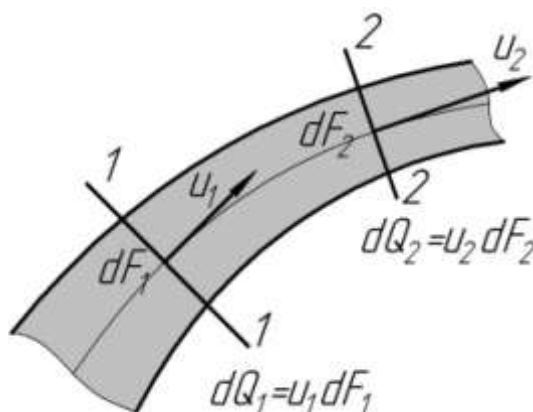


Рис. 3.3. Элементарная струйка

Условие неразрывности или сплошности потока требует, чтобы масса втекающей в отсек за время dt жидкости dM_1 равнялась бы массе вытекающей из отсека dM_2 .

Масса жидкости, прошедшей со скоростью u через бесконечно малое сечение потока за какой-то бесконечно малый отрезок времени dt , определяется как

$$dM = dm \cdot dt = \rho u dF_n dt,$$

где dF_n – площадь сечения нормального к вектору скорости u .

Применяя это соотношение для сечений dF_1 и dF_2 , получим

$$\rho_1 u_1 dF_1 dt = \rho_2 u_2 dF_2 dt.$$

Сокращая dt и учитывая, что рассматриваемые сечения были выбраны произвольно, получим

$$\rho_1 u_1 dF_1 = \rho_2 u_2 dF_2 = \dots = \rho u dF = dm = \text{const}. \quad (3.7)$$

Массовый расход при установившемся движении одинаков во всех сечениях элементарной струйки. Уравнение справедливо для несжимаемой и сжимаемой жидкости. Для капельной (несжимаемой) жидкости учитывая, что $\rho = \text{const}$, а объемный расход $dQ = dm / \rho$, запишем

$$u_1 dF_1 = u_2 dF_2 = \dots = u dF = dQ. \quad (3.8)$$

Из уравнения следует, что $u_1 dF_1 = u_2 dF_2$ или $u_1 / u_2 = dF_2 / dF_1$, т.е. скорость обратно пропорциональна площади сечения элементарной струйки для несжимаемой жидкости.

3.5.2. Расход жидкости через сечение конечных размеров

На практике уравнение одномерного движения применяют к целому потоку конечных размеров, который согласно струйной модели состоит из бесконечно большого числа элементарных струек, а расход определяется как сумма расходов всех струек

$$Q = \int_F u dF. \quad (3.9)$$

Так как в поперечном сечении потока скорость неодинакова, то для вычисления этого интеграла необходимо знать вид подынтегральной функции, т.е. зависимость, которая описывает распределение скорости в потоке. В некоторых случаях известно распределение скорости, а в большинстве случаев – нет, поэтому для вычисления интеграла вводят понятие средней скорости.

Под *средней скоростью* V понимают такую одинаковую во всех точках сечения скорость, расход при которой равен истинному значению.

Заменяя в подынтегральном выражении вместо действительной среднюю скорость

$$Q_{\text{ср}} = \int_F V_{\text{ср}} dF = V_{\text{ср}} \int_F dF = V_{\text{ср}} F, \quad (3.10)$$

формула для средней скорости будет иметь вид

$$V_{\text{ср}} = \frac{Q}{F} = \frac{\int_F u dF}{F}. \quad (3.11)$$

Величина средней скорости может быть подсчитана, если расход жидкости через данное сечение и площадь этого сечения известны (например, замерены), или задан закон изменения истинных скоростей.

В реальных условиях движения жидкости встречаются крутые повороты, резко меняющиеся сечения и т.п. Для этих сечений нельзя вычислять расход. Условно принимая за расчетные сечения такие, которые достаточно удалены от мест искривления.

С учетом этих обстоятельств уравнение объемного расхода примет вид

$$Q = V_1 F_1 = V_2 F_2 = \dots = \text{const}, \text{ м}^3/\text{с}, \quad (3.12)$$

а для массового расхода

$$M = \rho_1 V_1 F_1 = \rho_2 V_2 F_2 = \dots = \text{const}, \text{ кг/с}. \quad (3.13)$$

3.5.3. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности

Известно, что на движение сплошных сред распространяются общие законы механики. Среди этих законов важное значение имеют законы сохранения, пригодные как в классической физике, так и в физике микро- и макромира. В классической физике, где обычно рассматриваются движения лишь со скоростями, значительно меньшими, чем скорость света, считается, что сохраняется также и масса вещества. Применение законов сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии к движущимся жидкостям и газам дает систему основных уравнений механики жидкостей и газов.

Уравнение неразрывности по сути представляет собой закон сохранения массы изолированной системы:

$$\frac{dm}{dt} = 0, \quad (3.14)$$

где m – масса вещества.

Представим массу в виде $m = \rho W$, где ρ ранее определено, W – элементарный объем движущейся жидкости, и подставим в закон сохранения массы (3.14). В итоге получается выражение

$$\frac{d(\rho W)}{dt} = W \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dW}{dt}. \quad (3.15)$$

Разделим выражение (3.15) на произведение плотности на объем, получим:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = 0. \quad (3.16)$$

Второе слагаемое в формуле (3.16) выражает относительное изменение объема с течением времени, а это есть физический смысл дивергенции вектора скорости. Итак,

$$\text{div} \vec{u} = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}. \quad (3.17)$$

Подставив выражение (3.17) в (3.16), получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div} \vec{u} = 0. \quad (3.18)$$

Из векторного анализа известно, что

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Распишем полный дифференциал $\frac{dp}{dt}$ на частные производные

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_z \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.20)$$

Подставив полученные результаты в формулу (3.18), получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.21)$$

Группируем слагаемые уравнения (3.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x); \\ u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y); \\ u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z). \end{aligned} \quad (3.22)$$

В итоге получаем дифференциальное уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0. \quad (3.23)$$

В случае, когда жидкость является средой несжимаемой, уравнение (3.23) упрощается:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

или

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (3.25)$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что изучает кинематика и динамика жидкости?
2. Что представляет собой линия потока и траектория движения?

В чем различие?



3. Что называется трубкой тока, элементарной струйкой и каковы их свойства?
4. Что называется потоком жидкости?
5. Что понимается под средней скоростью потока и расходом?
6. Напишите уравнение постоянства расхода. При каких условиях выполняется это уравнение?
7. Напишите уравнение неразрывности (сплошности) потока.
8. Приведите примеры равномерного и неравномерного, напорного безнапорного движения.
9. Как описывается поле скоростей методом Лагранжа?
10. Как описывается поле скоростей методом Эйлера?



4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЕЙ

4.1. Уравнение движения реальной (вязкой) жидкости Навье – Стокса

Основными уравнениями, описывающими движение жидкости, являются уравнения движения Навье – Стокса, которые получаются из уравнений движения в напряжениях с использованием обобщенного закона Ньютона. В декартовой системе координат они выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right); \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Левая часть этих уравнений описывает приведенные силы инерции, спроецированные на оси координат, первое слагаемое в правой части этих уравнений представляет собой проекцию ускорения массовых сил на оси координат, второе слагаемое – приведенные силы давления, третье слагаемое – приведенные силы вязкости (трения).

К уравнениям Навье – Стокса присоединяется уравнение неразрывности (несжимаемости):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.\tag{4.2}$$

Совокупность уравнений (4.1), (4.2) представляет собой замкнутую нелинейную систему четырех уравнений в частных производных второго порядка с четырьмя неизвестными функциями u_x, u_y, u_z, p ; величины ρ и ν являются заданными постоянными. Нелинейность системы обусловлена наличием конвективной составляющей в левой части уравнений (4.1), которые можно представить в виде (3.5).

Эти уравнения описывают целый класс задач. Для того чтобы выделить конкретную задачу необходимо ввести условия однозначности.

Условия однозначности:

1. Физические условия (например, плотность и вязкость являются величинами постоянными).
2. Геометрические условия (геометрия каналов).
3. Начальные условия (начальные условия задаются только для неустановившегося течения).
4. Граничные условия (условия на границах потока). Самым распространенным является условие «прилипания» частиц жидкости к твердой стенке, т.е. равенство нулю скорости жидкости на неподвижной обтекаемой поверхности или совпадение скоростей частиц жидкости со скоростями точек движущейся твердой поверхности, с которыми жидкие частицы соприкасаются. Это граничное условие даже в конце XIX в. оспаривалось некоторыми авторами, но в настоящее время полностью оправдано.

4.2. Уравнение движения Эйлера для идеальной жидкости

При движении идеальной жидкости отсутствуют силы трения, значит, все касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения равны между собой и равны гидростатическому давлению, взятому со знаком «минус». Впервые эти уравнения получил Эйлер:

$$\frac{du_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{du_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{du_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

При решении уравнений Эйлера также вводят условия однозначности и замыкают систему уравнений уравнением неразрывности.

Отвлекаясь в схеме идеальной жидкости от количественной стороны внутреннего молекулярного обмена, проявляющегося в виде трения и теплопроводности, мы сохраняем вместе с тем качественное следствие обмена – непрерывность распределения физических величин. Вот почему результаты применения теории идеальной жидкости во многих случаях (общая картина обтекания, распределение давлений по поверхности плавно обтекаемого тела) оказываются вполне удовлетворяющими практику.



Контрольные вопросы и задания

1. Напишите систему уравнений Навье – Стокса.
2. Какие условия однозначности вы знаете?
3. Назовите физический смысл слагаемых уравнения Навье – Стокса.
4. Напишите систему уравнений движения Эйлера для идеальной жидкости.



5. ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ

5.1. Основные сведения

Гидростатика является разделом гидравлики, в котором изучаются законы равновесия жидкости.

Вследствие текучести жидкости в ней не могут действовать сосредоточенные силы, а возможно лишь действие сил, непрерывно распределенных по ее объему (массе) или по поверхности. Поэтому внешние силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости, разделяют на массовые (объемные) и поверхностные.

Массовые силы пропорциональны массе жидкого тела или (для однородных жидкостей) его объему.

К ним относятся сила тяжести и силы инерции переносного движения, действующие на жидкость при относительном ее покое в ускоренно движущихся сосудах или при относительном движении жидкости в руслах.

К числу массовых сил относятся силы, вводимые при составлении уравнений движения жидкости по принципу Д'Аламбера – Лагранжа или принципа виртуальных (возможных) перемещений: для равновесия любой механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ действующих на нее активных сил при любом виртуальном перемещении системы была равна нулю.

Поверхностные силы проявляются на граничных поверхностях рассматриваемого жидкого тела.

Поверхностную силу, действующую нормально к какой-либо площадке, называют *силой давления*.

Поверхностная сила, действующая по касательной к площадке, является *силой сопротивления*.

Сила сопротивления проявляется только при движении жидкости, а сила давления – как при движении, так и при покое жидкости.

5.2. Гидростатическое давление

Основным понятием гидростатики является понятие гидростатического давления. Выделим некоторый объем произвольной формы находящейся в равновесии жидкости. Рассечем его на две части I и II плоскостью *AB* (рис. 5.1).

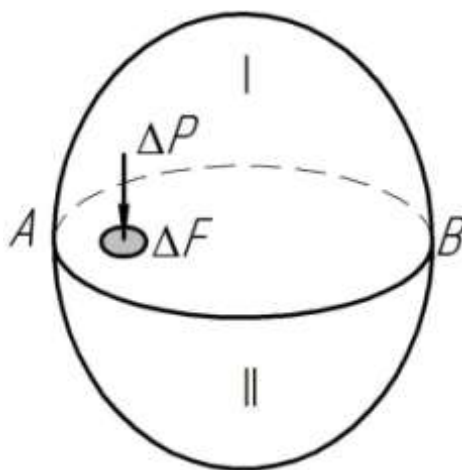


Рис. 5.1. Гидростатическое давление

Воздействие части I жидкости на часть II будет передаваться по плоскости раздела AB . Выделим на плоскости раздела площадку площадью ΔF . Заменим воздействие части I на эту площадку силой ΔP . Сила воздействия ΔP , приходящаяся на эту площадку, называется силой гидростатического давления. Отношение силы к площади

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta P}{\Delta F} \quad (5.1)$$

представляет среднее гидростатическое давление.

Если площадь ΔF стремится к нулю, то отношение $\Delta P / \Delta F$ будет стремиться к пределу, который называется гидростатическим давлением в точке

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}. \quad (5.2)$$

Гидростатическое давление направлено всегда по внутренней нормали к площадке, на которой это давление действует и является сжимающим напряжением, потому что в покоящейся жидкости не могут существовать касательные и растягивающие усилия. Величина гидростатического давления в любой точке жидкости по всем направлениям одинакова. Гидростатическое давление зависит от положения рассматриваемой точки внутри жидкости и от внешнего давления, действующего на свободной поверхности жидкости. Гидростатическое давление имеет размерность напряжения, т.е. сила/площадь.

Измеряют давление в Н/м^2 (паскаль). Атмосферное давление измеряют технической атмосферой равной 98100 Па или физической равной 101325 Па, иногда используется единица бар (1 бар=105 Па). Разли-

чают давление абсолютное (иногда употребляют термин «полное») и избыточное. *Абсолютным* называется давление, определённое с учетом атмосферного давления. Избыточное давление это давление сверх атмосферного, определенное без учета атмосферного:

$$P_{\text{абс}} = P_{\text{атм}} + P_{\text{изб}};$$

$$P_{\text{изб}} = P_{\text{абс}} - P_{\text{атм}}.$$

Абсолютное давление не может быть отрицательным, так как жидкость не воспринимает растягивающих напряжений. Избыточное давление может быть и больше и меньше нуля. Для удобства, отрицательное избыточное давление, взятое со знаком плюс, называют вакуумметрическим давлением $-P_{\text{изб}} = P_{\text{вак}}$. Очень часто избыточное давление называют манометрическим, так как оно измеряется с помощью манометров, или пьезометрическим, так как оно измеряется с помощью пьезометров.

5.3. Основное уравнение гидростатики

В 1755 г. Л. Эйлером были получены дифференциальные уравнения равновесия жидкости:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z &= 0,\end{aligned}\tag{5.3}$$

где $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ – градиенты давления в направлении соответствующих координатных осей; X, Y, Z – проекции ускорения массовых сил на соответствующие координатные оси; ρ – плотность жидкости.

После незначительных преобразований данную систему уравнений можно представить в виде уравнения

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).\tag{5.4}$$

Полученное уравнение выражает изменение давления вдоль координатных осей в общем случае равновесия и называется *основным дифференциальным уравнением гидростатики*.

Поверхностью уровня называется такая поверхность, во всех точках которой рассматриваемая функция имеет одно и то же значение.

Для задач гидравлики особое значение имеет поверхность равного давления. Эту поверхность называют поверхностью уровня.

Так как во всех точках поверхности уровня гидростатическое давление одинаково, т.е. $p = \text{const}$, то $dp = 0$. Из основного дифференциального уравнения гидростатики имеем

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = 0,$$

поскольку плотность не равна нулю $\rho \neq 0$, запишем

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (5.5)$$

Поверхность уровня имеет следующие свойства:

1. Две поверхности уровня не пересекаются между собой.
2. Массовые силы направлены нормально к поверхности уровня.

Поверхность уровня на границе жидкой и газообразной среды называется свободной поверхностью.

5.4. Давление и поверхность уровня при абсолютном покое

Рассмотрим случай равновесия жидкости, находящейся в сосуде в состоянии абсолютного покоя под действием сил тяжести и внешнего давления на свободной поверхности (рис. 5.2). В этом случае проекции ускорения силы тяжести на координатные оси равны: $X = 0, Y = 0, Z = -g$. После подстановки в уравнение (5.4) получаем

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz. \quad (5.6)$$

После интегрирования имеем

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz. \quad (5.7)$$

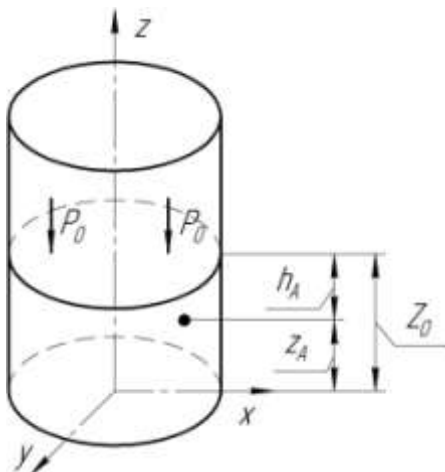


Рис. 5.2. Сосуд, заполненный
покоящейся жидкостью

Постоянная интегрирования C , соответствующая граничным условиям (рис. 5.2): при $z = z_0$; $p = p_0$, равна

$$C = p_0 + \rho \cdot g \cdot z_0. \quad (5.8)$$

После совместного решения уравнений (5.4) и (5.5) получаем

$$p_A = p_0 + \rho \cdot g (z_0 - z_A)$$

или

$$p_A = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_A. \quad (5.9)$$

Полученное уравнение является *основным уравнением гидростатики*, позволяющее определять любое давление в точке.

Анализируя основное уравнение гидростатики, можно сделать следующие выводы:

1. Гидростатическое давление есть сумма внешнего p_0 давления, действующего на свободной поверхности и весового $\rho \cdot g \cdot h$ давления, создаваемого весом столба жидкости высотой h .

2. Внешнее давление p_0 не зависит от координат рассматриваемых точек, т.е. оно передается во все точки покоящейся жидкости без изменения, поэтому жидкость используется как среда для передачи давления. На этом свойстве жидкости основано действие гидравлических машин (гидропрессы, силовые цилиндры, гидродомкраты).

3. Весовое давление $\rho \cdot g \cdot h$ является функцией координат точки. С увеличением заглубления точки под свободную поверхность, давление возрастает.

4. Внешнее давление p_0 может быть больше атмосферного, меньше атмосферного и равно атмосферному. Если численное значение p_0 определено с учетом атмосферного, то давление p будет абсолютным; если p_0 определено без учета атмосферного, то p будет избыточным.

Дифференциальное уравнение поверхности уровня в этом случае имеет вид

$$-g \cdot dz = 0 \text{ или } dz = 0. \quad (5.10)$$

Интегрируя, находим

$$z = \text{const} = C. \quad (5.11)$$

Так как $C = \text{const}$ – произвольная постоянная, то это уравнение будет уравнением семейства горизонтальных плоскостей. Таким образом, поверхность уровня есть горизонтальная плоскость, следовательно, и свободная поверхность будет горизонтальной плоскостью.

Пример 5.1. Определить абсолютное и избыточное гидростатическое давление в точке A (рис. 5.3), расположенной в воде на глубине,

и пьезометрическую высоту для точки A , если абсолютное гидростатическое давление на поверхности $p_0 = 147,2$ кПа.

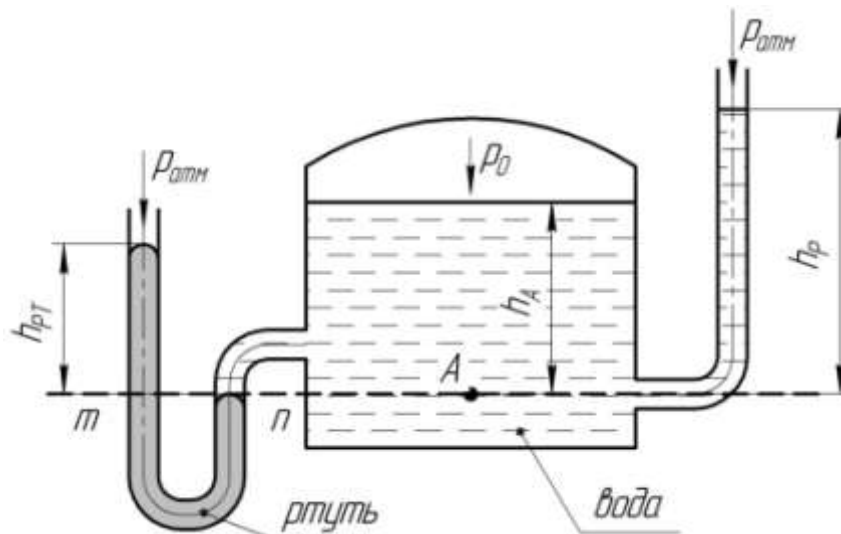


Рис. 5.3

Решение. Согласно основного уравнения гидростатики абсолютное гидростатическое давление в точке A определится:

$$p_{\text{абс}} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_A.$$

Избыточное давление в точке A

$$p_{\text{изб}} = p_{\text{абс}} - p_{\text{атм}} = 171,7 - 98,1 = 73,6 \text{ кПа.}$$

Пьезометрическая высота для точки A

$$h_p = \frac{p_{\text{изб}}}{\rho \cdot g} = \frac{73,6 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9,8} = 7,5 \text{ м.}$$

Можно отметить, что пьезометром удобно измерять только относительно малые давления, в противном случае требуется большая высота пьезометра, что неудобно в эксплуатации.

Определим эти же величины U-образным манометром, заполненным ртутью. По поверхности раздела $m-n$ ртути и воды давления со стороны резервуара и открытого конца манометра будут одинаковы:

$$p_0 + \rho \cdot g \cdot h_A = p_{\text{атм}} + \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h_{\text{рт}}.$$

Следовательно, избыточное давление в точке A уравнивается весом столба ртути высотой h_p над поверхностью раздела $m-n$:

$$\rho \cdot g \cdot h_{\text{рт}} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_A - p_{\text{атм}} = 147,2 + 1 \cdot 9,81 \cdot 2,5 - 98,1 = 73,6 \text{ кН/м}^2.$$

Находим высоту ртутного столба h_p

$$h_p = \frac{p_{\text{изб}}}{\rho_{\text{рт}} \cdot g} = \frac{73,6 \cdot 10^3}{13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 0,55 \text{ м,}$$

где $\rho_{\text{рт}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность ртути.

Пример 5.2. Определить давление в резервуаре p_0 (рис. 5.4) и высоту подъема уровня h_1 в трубке 1, если показания ртутного манометра $h_2 = 0,15 \text{ м}$, $h_3 = 0,8 \text{ м}$, $\rho_{\text{рт}} = 13,6 \text{ т/м}^3$, $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ т/м}^3$.

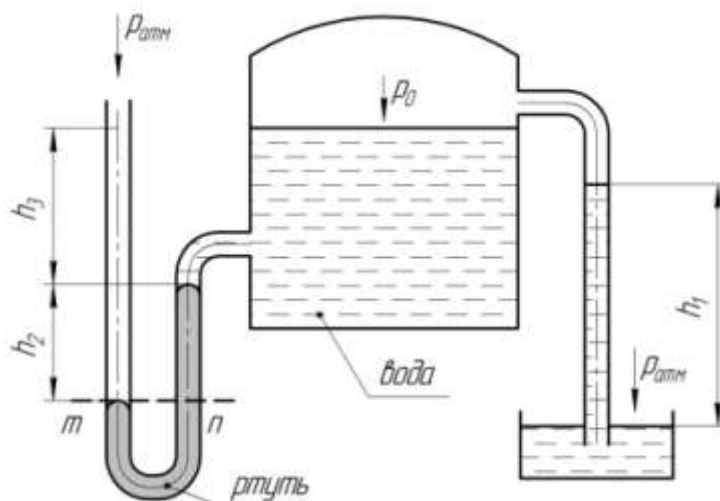


Рис. 5.4

Решение. Запишем условия равновесия для ртутного манометра для плоскости $m-n$:

а) со стороны резервуара $p = p_0 + \rho_{\text{в}} \cdot g \cdot h_3 + \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h_2$;

б) со стороны манометра $p = p_{\text{атм}}$;

тогда $p_{\text{атм}} = p_0 + \rho_{\text{в}} \cdot g \cdot h_3 + \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h_2$;

$$p_0 = 98,1 \cdot 10^3 - 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,8 - 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,15 = 70,24 \text{ кПа}.$$

Таким образом, в резервуаре – вакуум, величина которого равна

$$p_{\text{в}} = p_{\text{атм}} - p_0 = 98,1 - 70,24 = 27,86 \text{ кПа}.$$

Условия равновесия трубки 1:

$$p_0 + \rho_{\text{в}} \cdot g \cdot h_1 = p_{\text{атм}} \text{ м};$$

$$h_1 = \frac{p_{\text{атм}} - p_0}{\rho_{\text{в}} \cdot g} = \frac{27,86 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 2,84 \text{ м}.$$

Пример 5.3. Определить манометрическое давление в трубопроводе A (рис. 5.5), если высота столба ртути по пьезометру $h_2 = 25 \text{ см}$. Центр трубопровода расположен на $h_1 = 40 \text{ см}$ ниже линии раздела между водой и ртутью.

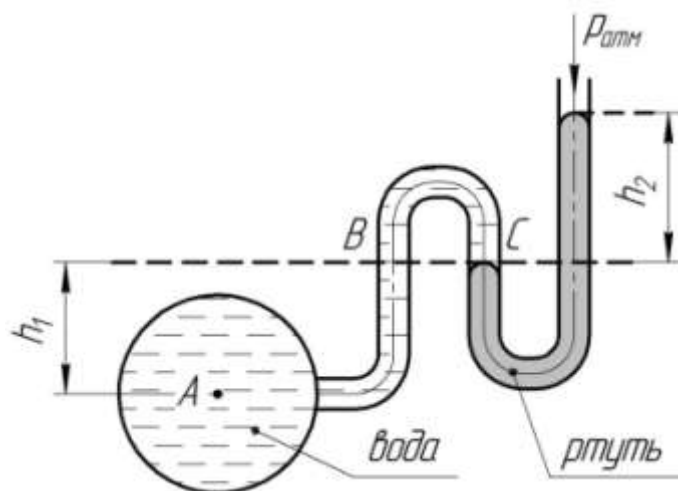


Рис. 5.5

Решение. Находим давление в точке B , которая расположена выше точки A на величину h_1 , следовательно, давление в точке B будет равно

$$p_B = p_A - \rho_B \cdot g \cdot h_1.$$

В точке C давление будет такое же, как в точке B , т.е.

$$p_C = p_B = p_A - \rho_B \cdot g \cdot h_1.$$

Определим давление в точке C , таким образом, справа

$$p_C = p_{\text{атм}} + \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h_2.$$

Приравнявая оба уравнения, получаем

$$p_A - \rho_B \cdot g \cdot h_1 = p_{\text{атм}} + \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h_2.$$

Отсюда манометрическое давление

$$p_A - p_{\text{атм}} = p_M = \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h_2 - \rho_B \cdot g \cdot h_1;$$

$$p_M = 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,25 - 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,4 = 29,43 \text{ кПа}.$$

Пример 5.4. Определить все виды гидростатического давления в баке с нефтью на глубине $H = 3$ м (рис. 5.6), если давление на свободной поверхности нефти 200 кПа. Плотность нефти $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$.

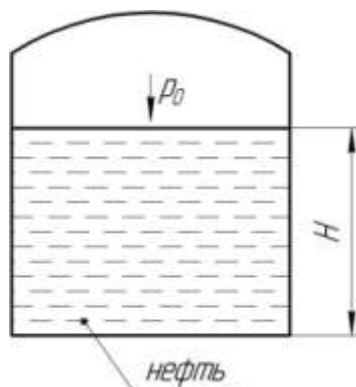


Рис. 5.6

Решение:

1. Абсолютное гидростатическое давление у дна

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h;$$

$$p = 200 + 0,9 \cdot 9,81 \cdot 3 = 226,5 \text{ кПа.}$$

2. Избыточное (манометрическое) давление у дна

$$p_{\text{изб(м)}} = p - p_{\text{атм}};$$

$$p_{\text{изб(м)}} = 226,5 - 98,1 = 128,4 \text{ кПа.}$$

3. Избыточное давление, создаваемое столбом жидкости

$$p_{\text{изб}} = \rho \cdot g \cdot H = 0,9 \cdot 9,81 \cdot 3 = 26,5 \text{ кПа.}$$

4. Избыточное давление на свободной поверхности

$$p_{\text{изб.св.п}} = p_0 - p_{\text{атм}} = 200 - 98,1 = 101,9 \text{ кПа.}$$

Пример 5.5. Определить избыточное давление воды в трубе по показаниям батарейного ртутного манометра (рис. 5.7).

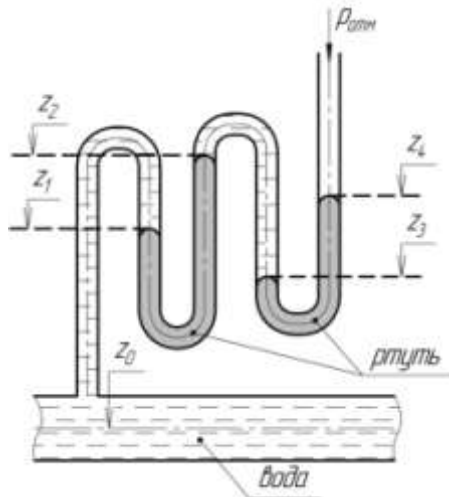


Рис. 5.7

Отметки уровней ртути от оси трубы: $z_1 = 1,75$, $z_2 = 3$ м, $z_3 = 1,5$ м, $z_4 = 2,5$ м, плотность ртути $\rho_{рт} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_{в} = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Батарейный ртутный манометр состоит из двух последовательно соединенных ртутных манометров. Давление воды в трубе уравнивается перепадами уровней ртути, а также перепадами уровней воды в трубках манометра. Суммируя показания манометра от открытого конца до присоединения его к трубе, получим

$$\begin{aligned} p_{изб} &= \rho_{рт} \cdot g(z_4 - z_3) - \rho_{в} \cdot g(z_2 - z_3) + \rho_{рт} \cdot g(z_2 - z_1) + \rho_{в} \cdot g(z_1 - z_0), \\ p_{изб} &= 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81(2,5 - 1,5) - 10^3 \cdot 9,81(3 - 1,5) + \\ &+ 13,6 \cdot 9,81(3 - 1,75) + 1 \cdot 9,81 \cdot 1,75 = 0,3 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 0,3 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

5.5. Относительный покой жидкости

Под относительным покоем понимается такое состояние, при котором в движущейся жидкости отдельные частицы не смещаются одна относительно другой. При этом жидкость перемещается как твердое тело. Само движение жидкости в этом случае можно назвать переносным движением. Для этого состояния характерно постоянство формы объема жидкости. Очевидно, что рассматриваемая масса жидкости будет неподвижна в координатной системе, связанной с движущимся резервуаром.

На жидкость, находящуюся в относительном покое, действуют массовые силы (силы тяжести и силы инерции переносного движения), а из поверхностных – силы давления.

Рассмотрим частный случай относительного покоя: покой при переносном вращательном движении вокруг вертикальной оси.

В этом случае на жидкость действуют силы давления, силы тяжести и силы инерции переносного вращательного движения, а ускорения массовых сил будут равны:

$$X = F^2 \cdot x, \quad Y = F^2 \cdot y, \quad Z = -g. \quad (5.12)$$

Дифференциальное уравнение (5.5) примет вид:

$$F^2 \cdot x dx + F^2 \cdot y dy - g dz = 0. \quad (5.13)$$

После интегрирования, с учетом, что $x^2 + y^2 = r^2$, получим

$$\frac{F^2 \cdot r^2}{2g} - z = C. \quad (5.14)$$

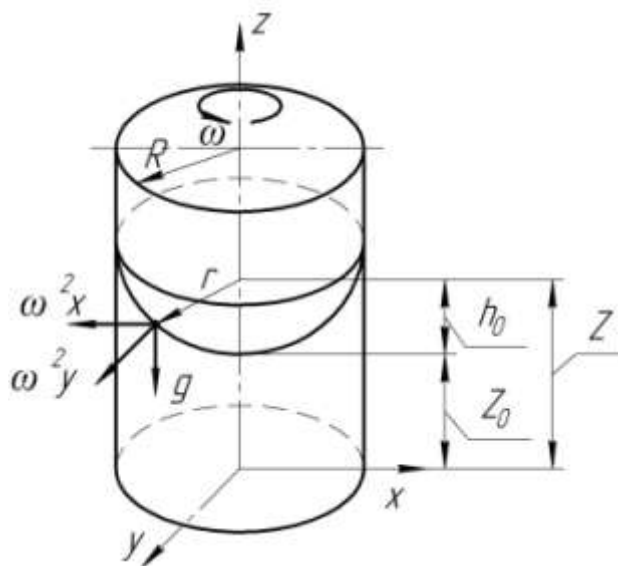


Рис. 5.8

Уравнение (5.14) является уравнением параболоида вращения, а поверхности равного давления образуют семейство параболоидов вращения, сдвинутых вдоль вертикальной оси. Каждый параболоид характеризуется некоторым значением постоянной C . Для параболоида свободной поверхности принимаем, что при $z = z_0$ (рис. 5.8) $x = y = 0$, поэтому $C = -z_0$. Тогда уравнение свободной поверхности примет вид

$$\frac{F^2 \cdot r^2}{2} = g(z - z_0) = g \cdot h_0 \quad (5.15)$$

или

$$\frac{u^2}{2g} = h_0. \quad (5.16)$$

Закон распределения давления по объему жидкости получим из уравнения (5.4), подставив в него соответствующие значения X , Y и Z . После интегрирования получаем

$$p = \rho \cdot g \left(\frac{F^2 \cdot r^2}{2g} - z \right) + C. \quad (5.17)$$

Постоянную интегрирования C определим из условия, что, при значениях $z = z_0$ и $r = 0$, $p = p_0$, т.е. $C = p_0 + \rho \cdot g \cdot z_0$. После подстановки в (5.17) окончательно имеем

$$p = p_0 + \rho \cdot g \left(z - z_0 + \frac{F^2 \cdot r^2}{2g} \right). \quad (5.18)$$

Для частиц жидкости, расположенных на одной вертикали, можем записать

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h, \quad (5.19)$$

где

$$h = z_0 - z + h_0, \quad (5.20)$$

т.е. имеет место обычный гидростатический закон распределения давления.

Пример 5.6. Цилиндрический сосуд радиусом R_1 наполнен жидкостью плотностью ρ до уровня a в открытой трубке малого диаметра, установленной на крышке сосуда на расстоянии R_2 от центра, и приведен в равномерное вращение относительно центральной вертикальной оси (рис. 5.9). Определить угловую скорость вращения сосуда, при которой избыточное давление под крышкой в центре сосуда будет равно нулю.

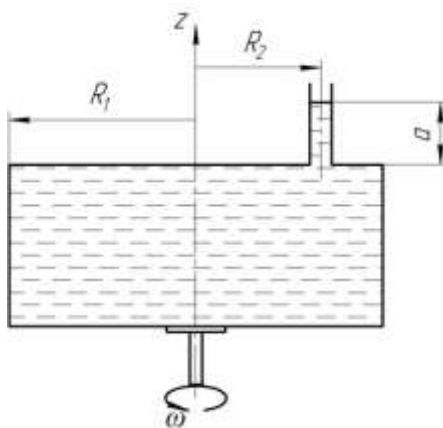


Рис. 5.9

Решение. Используя уравнение (5.18), найдем закон распределения избыточного давления в жидкости, заполняющей сосуд, учитывая, что $p = p_{\text{атм}}$:

$$p_u = \rho \frac{F^2 \cdot r^2}{2g} - \rho \cdot g (z - z_0),$$

z_0 – находим, используя граничное условие: $p_u = 0$ при $r = R_2$ и $z = a$:

$$\rho \frac{F^2 \cdot R_2^2}{2g} - \rho \cdot g (a - z_0) = 0,$$

откуда $z_0 = a - \frac{F^2 \cdot R_2^2}{2g}$. Подставляя z_0 , получим искомый закон распределения давления

$$p_{\text{и}} = \rho \frac{F_2}{2} (r^2 - R_2^2) + \rho \cdot g (a - z).$$

Для точек на поверхности крышки z_0 имеем

$$p_{\text{и}} = \rho \frac{F_2}{2} (r^2 - R_2^2) + \rho \cdot g \cdot a.$$

Искомую угловую скорость вращения определяем из условия $p_{\text{и}} = 0$ при $p = p_{\text{атм}}$:

$$-\rho \frac{F^2}{2} R_2^2 + \rho \cdot g \cdot a = 0,$$

откуда

$$F = \frac{1}{R_2} \sqrt{2 \cdot g \cdot a}.$$

5.6. Сила давления жидкости на криволинейную поверхность

Рассмотрим криволинейную поверхность в виде одной четвертой части поверхности цилиндра, окруженной жидкостью только с одной стороны (рис. 5.10), и определим результирующую силу давления на эту поверхность.

При этом вначале определяют горизонтальную составляющую P_x , затем *вертикальную* составляющую P_z и вычисляют их геометрическую сумму P :

$$P = \sqrt{P_x + P_z}. \quad (5.21)$$

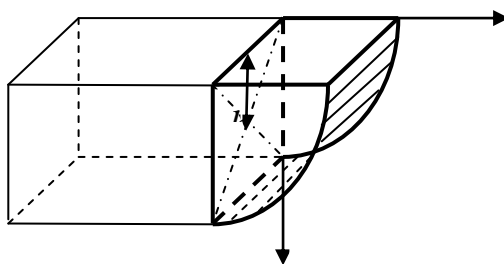


Рис. 5.10

Для того чтобы определить горизонтальную составляющую силы давления, необходимо спроецировать криволинейную поверхность на вертикальную плоскость и определять ее как силу, действующую на плоскую стенку:

$$P_x = (p_0 + \rho g h_{\text{ц}}) F_{\text{пр}}, \quad (5.22)$$

где p_0 – давление воздуха на свободную поверхность жидкости; $h_{\text{ц}}$ – расстояние от свободной поверхности до центра тяжести вертикальной плоскости; $F_{\text{пр}}$ – площадь проекции криволинейной поверхности на вертикальную плоскость. Вертикальная составляющая определяется по формуле

$$P_z = \rho g W_{\text{т.д}}, \quad (5.23)$$

где $W_{\text{т.д}}$ – объем тела давления (на рис. 5.10 тело давления выделено более темным цветом). Тело давления строится проецированием криволинейной поверхности на свободную поверхность или ее продолжение, а затем рассчитывается его объем.

Пример 5.7. На цилиндрическую поверхность ABC радиусом r и длиной « v », находящуюся на глубине « h », действует вертикальная сила давления воды 24 кН. Как изменится сила, если h увеличить в 2 раза?

Решение. Вертикальная сила давления на криволинейную поверхность определяется по формуле (5.23). Чтобы решить задачу, необходимо выяснить: влияет ли высота h на размер тела давления. Для этого построим тело давления. Разобьем поверхность ABC на две части AB и BC и проецируем их на свободную поверхность. В результате построим два тела давления для поверхности AB и BC . Телом давления исходной поверхности будет являться заштрихованная один раз поверхность, т.е. половина цилиндра. Теперь можно сделать вывод, что высота h вообще не влияет на вертикальную силу давления.

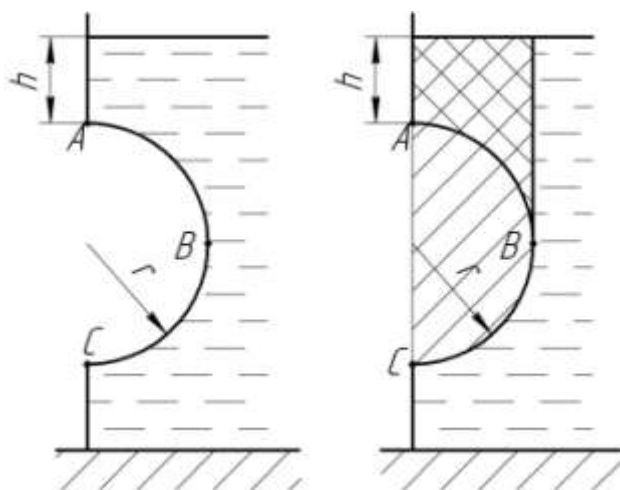


Рис. 5.11

6. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

6.1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости

Важнейшее значение в гидравлике имеет так называемое уравнение Бернулли. В применении к одномерным потокам несжимаемой жидкости это уравнение выведено Даниилом Бернулли еще в первой половине XVIII в. Впоследствии, когда был установлен всеобщий закон сохранения энергии, стало очевидным, что уравнение Бернулли по существу определяет применение этого закона к установившемуся одномерному потоку несжимаемой жидкости в том частном случае, когда учитываются лишь отдельные виды механической энергии потока.

Будем считать, что жидкость несжимаемая ($\rho = \text{const}$), а движение установившееся. Для того чтобы решить систему уравнений Эйлера, умножим каждое уравнение на dx, dy, dz и соответственно просуммируем их:

$$\begin{aligned}\rho \frac{du_x}{dt} &= \rho X - \frac{\partial P}{\partial x}; \\ \rho \frac{du_y}{dt} &= \rho Y - \frac{\partial P}{\partial y}; \\ \rho \frac{du_z}{dt} &= \rho Z - \frac{\partial P}{\partial z}; \\ \rho \left(\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz \right) &= \rho (Xdx + Ydy + Zdz) - \\ &\quad - \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Подставим в первой скобке:

$$dx = u_x dt, \quad dy = u_y dt, \quad dz = u_z dt,$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz &= u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \\ &= \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} d(u^2),\end{aligned}$$

где $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$.

Так как из массовых сил на жидкость действует только сила тяжести $X=Y=0$, $Z=-g$, подставим полученный результат во вторую скобку уравнения (6.1):

$$Xdx + Ydy + Zdz = -gdz.$$

Третью скобку можно представить как

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz = dP.$$

Тогда исходная система дифференциальных уравнений приводится к виду

$$\rho g dz + dP + \frac{1}{2}\rho d(u^2) = 0.$$

Поделим данное уравнение на ρ : $Re \leq 2300$

$$g dz + \frac{1}{\rho}dP + \frac{1}{2}d(u^2) = 0.$$

Проинтегрировав данное уравнение, получим *уравнение Бернулли для идеальной жидкости элементарной струйки*:

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}, \text{ Дж/кг.} \quad (6.2)$$

6.2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости

Полученное уравнение Бернулли (6.2) справедливо для идеальной жидкости, вязкость которой равна нулю.

Для того чтобы распространить это уравнение на реальную жидкость необходимо уравнение Бернулли записать для двух сечений элементарной струйки. При движении вязкой жидкости между движущимися частицами возникает сила трения, в результате чего часть механической энергии перейдет в теплоту. Если жидкость движется с малой скоростью, то это тепло не повышает температуру. Так как часть механической энергии перешла в теплоту, поэтому

$$gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \Delta e_w [\text{Дж/кг}]. \quad (6.3)$$

Разделив уравнение (6.3) на g , получим уравнение Бернулли в единицах напора

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_w [\text{м}]. \quad (6.4)$$

Если разделим уравнение (6.4) на ρg , получим уравнение Бернулли в единицах давления:

$$\rho g z_1 + P_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = z_2 + P_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + \Delta P_w \text{ [Па]}, \quad (6.5)$$

где $\Delta e_w, \Delta h_w, \Delta P_w$ соответственно потери удельной энергии, напора и давления на преодоление гидравлических сопротивлений. Сопротивления бывают двух типов:

1. Гидравлические сопротивления, которые возникают за счет трения по всей длине канала ($h_{\text{тр}}$).

2. Гидравлические сопротивления, которые возникают внезапно при изменении диаметра трубопровода, наличии поворота, колена, клапана, задвижки и т.д. Их называют местными сопротивлениями ($h_{\text{м}}$).

Общие гидравлические потери получают путем суммирования всех имеющихся сопротивлений. Тогда

$$\Delta e_w = \Delta e_{\text{тр}} + \Delta e_{\text{м}};$$

$$\Delta P_w = \Delta P_{\text{тр}} + \Delta P_{\text{м}};$$

$$\Delta h_w = \Delta h_{\text{тр}} + \Delta h_{\text{м}}.$$

Итак, уравнение Бернулли имеет три формы записи, поэтому рассмотрим смысл каждого уравнения в отдельности.

1. Уравнение Бернулли, записанное в форме (6.3), представляет собой закон сохранения механической энергии, отнесенной к единице массы, поэтому каждое слагаемое несет следующий смысл:

gz – удельная потенциальная энергия положения, Дж/кг;

P/ρ – удельная потенциальная энергия давления, Дж/кг;

$\frac{u^2}{2}$ – удельная кинетическая энергия;

$gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2}$ – удельная полная механическая энергия;

Δe_w – потери удельной механической энергии.

2. Уравнение Бернулли, записанное в форме (6.4), представляет собой закон сохранения полного давления, где $P_{\text{ст}} = \rho g z + P$ – статическое давление, $P_{\text{дин}} = \rho u^2 / 2$ – динамическое давление, $P_{\text{ст}} + P_{\text{дин}} = P_{\text{пол}}$ – полное гидростатическое давление.

3. Уравнение Бернулли, записанное в форме (6.5), представляет собой закон сохранения полного гидродинамического напора и поэтому несет геометрический смысл. В этом смысле имеет место теорема Бернулли: при стационарном движении тяжелой идеальной несжимаемой

жидкости гидравлическая высота, равная сумме скоростной, пьезометрической и геометрической высот, сохраняет постоянное значение вдоль любой линии тока (траектории) или вихревой линии (рис. 6.1).

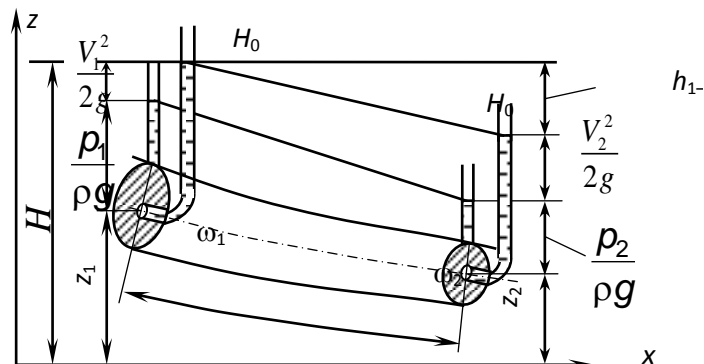


Рис. 6.1. Геометрический смысл слагаемых уравнения Бернулли

Выделим в потоке элементарную струйку, проведем два сечения (1–1, 2–2), тогда каждое слагаемое будет иметь следующий смысл:

z – нивелирная (геометрическая) высота;

$P/\rho g$ – пьезометрическая высота;

$z + \frac{P}{\rho g}$ – пьезометрический напор;

$u^2/2g$ – скоростной (динамический) напор;

$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$ – полный гидродинамический напор [м];

h_{1-2} – потери напора на участке 1–2.

6.3. Уравнение Бернулли для всего потока

Уравнение Бернулли для всего потока можно получить путем суммирования энергий всех струек, т.е. необходимо уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости (6.3) умножить на массовый расход жидкости $\rho u dF$ и проинтегрировать по сечению потока:

$$\begin{aligned} \int_{F_1} g z_1 \rho u_1 dF_1 + \int_{F_1} \frac{P_1}{\rho} \rho u_1 dF_1 + \int_{F_1} \frac{u_1^2}{2} \rho u_1 dF_1 = \int_{F_2} g z_2 \rho u_2 dF_2 + \\ + \int_{F_2} \frac{P_2}{\rho} \rho u_2 dF_2 + \int_{F_2} \frac{u_2^2}{2} \rho u_2 dF_2 + \int_{F_2} \Delta e_w \rho u_2 dF_2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Этот интеграл можно вычислить, если ввести понятие о медленном или плавно изменяющемся потоке. Для такого потока радиус кривизны отдельных струек стремится к бесконечности. В этом случае доказано:

$$gz + P/\rho = \text{const.}$$

Объединим под один интеграл сумму:

$$\int_F \left(gz + \frac{P}{\rho} \right) \rho u dF = \left(gz + \frac{P}{\rho} \right) \rho \int_F u dF = \left(gz + \frac{P}{\rho} \right) \rho Q,$$

так как $\int_F u dF = VF = Q$ [м³/с] – объемный расход потока. Здесь

$$\int_F \frac{u^2}{2} \rho u dF = \frac{\alpha V^2}{2} \rho Q, \quad \text{где } \alpha \text{ – коэффициент Кориолиса, равный}$$

$$\alpha = \frac{\int_F u^3 dF}{V^3 F}; \quad \int_F \Delta e_w \rho u dF = \Delta e_w \rho Q \text{ – поправочный коэффициент скорости.}$$

Полученные выражения подставим в формулу (6.6) и запишем все три формы уравнения Бернулли для всего потока реальной жидкости:

$$gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{\alpha V_1^2}{2} = gz_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{\alpha V_2^2}{2} + \Delta e_w, \text{ Дж/кг;}$$

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_w, \text{ м;}$$

$$\rho g z_1 + P_1 + \frac{\rho \alpha V_1^2}{2} = \rho g z_2 + P_2 + \frac{\rho \alpha V_2^2}{2} + \Delta P_w, \text{ Па.}$$

Необходимо подчеркнуть, что эти уравнения справедливы только для несжимаемой жидкости, для установившегося течения и плавно и медленно изменяющегося потока.

7. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ В ТРУБОПРОВОДАХ

7.1. Режимы движения жидкости

При движении реальных жидкостей в различных гидросистемах требуется точная оценка потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений. Точный учёт этих потерь во многом определяет надёжность технических расчётов. Кроме того, это позволяет найти экономически целесообразное инженерное решение, обладающее достаточной степенью совершенства. Для этого необходимо иметь ясное представление о механизме движения жидкости.

В процессе исследований известный физик Л. Рейнольдс в 1883 г. подтвердил гипотезу о существовании двух режимов движения жидкости. Это, прежде всего ламинарный режим движения жидкости, соответствующий малым скоростям. Ламинарное движение можно рассматривать как движение отдельных слоёв жидкости, происходящее без перемешивания частиц. При более высоких скоростях движения жидкости наблюдается турбулентный режим («турбулентус» по-латыни – вихревой). Такое движение называют беспорядочным.

Количественная оценка гидравлических сопротивлений предопределяется режимом движения жидкости. Еще в Древнем Риме Фронтиниус, занимаясь изучением движения воды по трубам, делал попытки оценить гидравлические сопротивления. Наибольший вклад в развитие этого вопроса дали работы второй половины XIX в. Основоположник классической механики Ньютон рассматривал и механику жидкости. Им получены законы внутреннего трения в предположении скольжения слоев жидкости относительно друг друга. В действительности это условие не всегда выполняется. Опыты показали, что при движении вязкой жидкости возможны две качественно отличные формы течения. Условия их существования и взаимного перехода были исследованы английским физиком Л. Рейнольдсом. Было установлено, что при малых скоростях течения подкрашенные частицы жидкости распространяются вдоль трубы в виде нити, не перемешиваясь с соседними слоями жидкости. Жидкость движется слоями, скорость течения поперек трубы изменяется плавно. Такой режим движения назван ламинарным. Сила трения между слоями здесь может быть определена в соответствии с законом внутреннего трения Ньютона. Если средняя скорость течения превышает некоторую критическую скорость $V_{кр}$, окрашенная струя начинает

размываться. Такое течение называется *турбулентным*. При турбулентном режиме частицы жидкости перемещаются не только поступательно, но и в поперечном направлении, траектория их движения имеет случайную форму.

Если проследить за скоростями в какой-либо точке турбулентного потока в различные моменты времени, то эти скорости будут произвольно изменяться по величине и направлению, наблюдаются даже движения частиц навстречу основному потоку. Скорость в любой точке турбулентного потока, как говорят, непрерывно пульсирует.

Если при этом движение потока было установившимся, т.е. расход жидкости и средняя по потоку скорость с течением времени не изменялась, местное движение (возле рассматриваемой точки) при турбулентном режиме установившимся считаться не может вследствие пульсаций локальных скоростей. Изменение пульсационной составляющей такой местной скорости $u_{\text{п}}$ протекает весьма быстро и не подчиняется какой-либо определенной закономерности.

Заметив действительные нормальные составляющие $u_{\text{п}}$ местной скорости u , изменяющиеся в течение некоторого отрезка времени $\Delta t = t_2 - t_1$, некоторой постоянной, получим осредненную местную скорость $u_{\text{оср}}$. Величина осредненной местной скорости определяется условием

$$u_{\text{оср}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} u_{\text{п}} dt}{\Delta t}.$$

Осреднение скорости за различные отрезки времени может давать и неодинаковые результаты. Только при достаточно больших Δt получается, что осредненные скорости в различные интервалы времени $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3 \dots$ одинаковы, т.е.

$$u'_{\text{оср}} = u''_{\text{оср}} = \dots u_{\text{оср}} \approx \text{const.}$$

Понятие осредненной местной скорости следует отличать от понятия о средней по сечению скорости

$$V_{\text{ср}} = \frac{\int u dF}{F}.$$

В то время как $u_{\text{оср}}$ – средняя по времени нормальная составляющая истинной скорости в данной точке, скорость $V_{\text{ср}}$ – средняя по сечению скорость, определяемая осреднением по площади сечения скоро-

стей в разных его точках. Средняя по сечению скорость в турбулентном потоке получается путем двойного осреднения: сначала по времени в каждой точке течения, затем по площади сечения.

Измеряя скорость в какой-либо точке турбулентного потока с помощью обычно применяемых в технике приборов (например, трубки Пито-Прандтля), практически определяют именно фиксированную местную скорость. Обладая инерционностью, прибор не успевает реагировать на быстрые изменения (пульсации) измеряемой величины и практически показывает ее осредненную во времени величину, ее обозначают обычно без дополнительных символов – u .

Важное значение имеет вопрос о критической скорости, т.е. скорости $V_{кр}$ при переходе через которую ламинарный режим движения переходит в турбулентный. Критическая скорость не остается одинаковой для жидкостей с различными коэффициентами кинематической вязкости ν и при протекании по трубам разных диаметров. Рейнольдс показал, что режим движения в трубе определяется величиной безразмерного соотношения, названного впоследствии числом Рейнольдса $Re = Vd / \nu$. Согласно опытным данным, при $Re \leq 2300$ течение является ламинарным, в этом случае возмущения, вносимые в поток жидкости, затухают из-за действия вязкого трения. При больших значениях числа Рейнольдса вносимые в поток возмущения приводят к потере его устойчивости, наблюдается турбулизация потока. Значение $Re_{кр} = 2300$ называют критическим числом Рейнольдса. Величину можно трактовать как соотношение между силой инерции, опрокидывающей частицу, и силой вязкого трения, препятствующей этому. Возрастание числа Рейнольдса влечет за собой уменьшение относительного влияния на поток стабилизирующей силы трения у стенки. С достижением $Re_{кр}$ это приводит к потере устойчивости потока, к разрыву поперечной эпюры скорости и появлению пульсации скорости.

Однако если вести опыт в обратном направлении (понижать скорость), то переход турбулентного в ламинарное движение произойдет при другой скорости. Это говорит о том, что между ламинарным и турбулентным течением нет четкой границы, т.е. существует переходная область.

В этих опытах Рейнольдс впервые обнаружил, что переход из ламинарного движения в турбулентное обуславливается достижением критического значения числа Рейнольдса. По опытам самого Рейнольдса критическое число оказалось равным $Re_{кр} = 1,3 \cdot 10^4$. Впоследствии им же было открыто существование нижнего критического значения

$Re_{кр}$, приблизительно равного 2000, что при $Re < Re_{кр}$ движение в трубе оставалось ламинарным, каковы бы ни были введенные возмущения. Вместе с тем было замечено, что путем гашения возмущений на входе в трубу или уменьшения начальной их интенсивности можно искусственно затян timer ламинарное движение в область значительно больших значений числа Рейнольдса. В частности, значение $1,3 \cdot 10^4$, полученное Рейнольдсом, объяснялось наличием плавного входа в трубу.

Для оценки режима движения жидкости Рейнольдс ввёл безразмерный критерий Re , который учитывает влияние скорости V , диаметра (характерного размера) $d(\ell)$, плотности ρ , а также динамической вязкости μ :

$$Re = \frac{Vd\rho}{\mu} \text{ (или } Re = \frac{Vd}{\nu} \text{)}, \quad (7.1)$$

где $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость.

Граница существования того или иного режима движения жидкости определяется двумя критическими значениями числа Re : нижним $Re'_{кр}$ и верхним $Re''_{кр}$.

Так, при $Re < Re'_{кр}$ возможен только ламинарный режим, а при $Re > Re''_{кр}$ – только турбулентный режим, при $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$ наблюдается неустойчивое состояние потока. При расчётах принято исходить из одного критического значения числа $Re = 2300$, что приводит к большей надёжности в гидравлических расчётах. Критерий Рейнольдса удобен тем, что может применяться для формы живого сечения через гидравлический радиус. Например, для круглого сечения

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4}, \quad (7.2)$$

тогда

$$Re = \frac{4RV}{\nu}. \quad (7.3)$$

Для сечения прямоугольной формы со сторонами b и h

$$R = \frac{bh}{2(b+h)};$$

тогда

$$Re = \frac{2bhV}{\nu(b+h)}.$$

Критерий Рейнольдса является мерой отношения кинематической энергии жидкости к работе сил вязкого трения. От критерия Рейнольдса в общем случае зависят все безразмерные коэффициенты, входящие в расчётные зависимости, которые применяются в практике гидравлических расчётов.

7.2. Основные формулы для расчета потерь за счет трения. Опыты и график Никурадзе

Основными формулами при расчёте потерь за счет трения в напорных трубопроводах являются формулы Пуазейля (7.4) для ламинарного течения и Дарси – Вейсбаха (7.5) для ламинарного и турбулентного течений соответственно:

$$\Delta h_{\text{тр}} = \frac{32\nu\ell V}{d^2 g}; \quad (7.4)$$

$$\Delta h_{\text{тр}} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g}. \quad (7.5)$$

Применение этих формул связано с определением коэффициента λ . При ламинарном движении жидкости коэффициент λ для труб определяется по формуле

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (7.6)$$

Систематические опыты по исследованию одновременного влияния на сопротивление трению равномерной шероховатости и различных режимов движения были проведены и опубликованы немецким ученым Никурадзе в 1933 г.

Шероховатость стенок создавалось наклеиванием на внутреннюю поверхность труб калиброванного песка, диаметр песчинок отождествлялся с высотой выступа шероховатости Δ . Такую равномерную шероховатость называют равномерно-зернистой.

Каждая экспериментальная точка, соответствующая определенной величине λ относительной поверхности Δ/r_0 и числу Re , наносилась на график в логарифмической системе координат $g100\lambda - \lg Re$. Полу-

ченная Никурадзе зависимость $\lambda = f(\text{Re}, \Delta/r_0)$, где r_0 – радиус трубы, представлена на рис. 7.1.

В пределах прямой 1 коэффициент λ зависит не от шероховатости стенок трубы, а от числа Re [см. формулу (7.3)]. Это происходит потому, что при движении жидкости скорость у стенки равна нулю. Выступы шероховатости покрыты неподвижной жидкостью, и величина их не влияет на λ .

При турбулентном режиме есть область сопротивления, в которой трубы различной шероховатости имеют одинаковые коэффициенты сопротивления – область гидравлически гладких труб. Предполагается, что между турбулентным ядром потока, занимающим большую часть трубы, и стенкой лежит ламинарный подслоя достаточной толщины. Прямая 2 представляет зависимость $\lambda = f(\text{Re})$ для гидравлических гладких труб, у которых шероховатость меньше толщины ламинарного пристенного слоя.

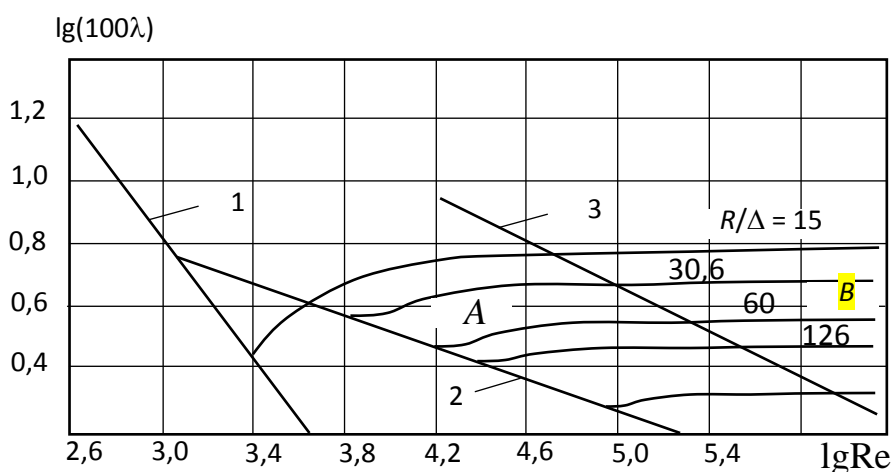


Рис. 7.1. График Никурадзе

Ламинарный подслоя покрывает выступы шероховатости, и здесь λ зависит только от критерия Re . С возрастанием скорости (увеличением Re) ламинарный слой δ утончается, выступы шероховатости вторгаются в турбулентное ядро потока. При этом меняется сама природа гидравлического сопротивления. При ламинарном течении и в области гидравлически гладких труб сопротивления были связаны с внутренним трением в жидкости.

Коэффициент λ для гидравлических гладких труб определяется по формуле Блазиуса (прямая 2):

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}. \quad (7.7)$$

Турбулентный поток обтекает выступы шероховатости с образованием вихревых областей. Давление на переднем склоне выступа больше, чем на заднем, и поток тормозится этим перепадом давления. В переходной области λ определяется совместным влиянием числа Re и шероховатости. Между линиями 2 и линией 3 слева располагается зона A , в которой λ зависит как от числа Рейнольдса, так и от шероховатости поверхности стенок труб.

Для определения λ в этой области может применяться формула А.Д. Альтшуля:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_z}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}, \quad (7.8)$$

где k_z – эквивалентная равномерно-зернистая шероховатость, определяемая опытным путем.

При дальнейшем увеличении Re ламинарный подслои полностью срывается, λ становится функцией только шероховатости, эта зона устойчивого турбулентного режима. В области B коэффициент λ зависит только от шероховатости.

Для определения λ в этой области рекомендуется формула Никурадзе

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,75 + 2 \lg \frac{r}{\Delta}, \quad (7.9)$$

где r – радиус трубы; Δ – абсолютная шероховатость трубы.

Существуют формулы Ф.А. Шевелёва, Н.З. Френкеля, Л.А. Тепакса, Б.Н. Шифринсона, Н.Ф. Фёдорова, А.Д. Альтшуля и других авторов.

7.3. Местные гидравлические сопротивления

Местные сопротивления вызываются фасонными частями, арматурой и другими элементами трубопровода. При движении жидкости на местных сопротивлениях изменяется величина и направление скорости.

Потери, связанные с преодолением местных сопротивлений, пропорциональны кинетической энергии потока:

$$\Delta h_m = \xi_m \frac{V^2}{2g}, \quad (7.10)$$

где ξ_m — коэффициент местных сопротивлений, который зависит не только от вязкости и скорости движения основного потока, но главным образом от геометрической формы и размеров сопротивлений.

При турбулентном режиме движения жидкости потери Δh_m зависят только от геометрических характеристик сопротивления.

Рассмотрим вопрос о потере напора при внезапном расширении трубопровода (рис. 7.2). Часть энергии в этом случае расходуется на сложное циркуляционное движение жидкости в кольцевом пространстве между струёй и стенками трубы за сечением 1–1.

Вследствие отрыва потока и связанного с ним вихреобразования на участке трубы между сечениями 1–1 и 2–2 наблюдаются значительные потери напора.

Учитывая, что давление на торцевой стенке AB практически равно давлению на выходе из узкой части трубы p_1 , найдём величину потерь по уравнению Бернулли:

$$\Delta h_{\text{вн.р}}^{1-2} = \left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}. \quad (7.11)$$

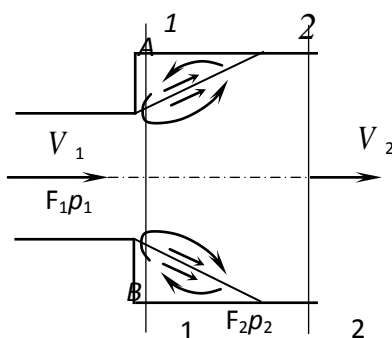


Рис. 7.2. Течение с внезапным расширением трубопровода

Из теоремы импульсов для сечений 1–1 и 2–2 можно записать:

$$(p_1 - p_2)F = Q\rho(V_2 - V_1). \quad (7.12)$$

Пренебрегая силами трения на участке 1–2 и учитывая, что $Q = VF$, после деления на ρg обеих частей уравнения (7.2) получим

$$F_2 \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2 F_2}{g} (V_2 - V_1)$$

или

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2}{g} - \frac{V_1 V_2}{g}. \quad (7.13)$$

Подставляя выражение (7.13) в уравнение (7.11), найдём

$$\Delta h_{\text{вн.р}} = \frac{V_2^2}{g} - \frac{V_1 V_2}{g} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$$

или

$$\Delta h_{\text{вн.р}} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{(\Delta V)^2}{2g}. \quad (7.14)$$

Таким образом, потери напора при внезапном расширении равны скоростному напору от потерянной скорости. Выражение (7.14) называется теоремой, или формулой Борда.

Формулу (7.14) можно привести к виду

$$\Delta h_{\text{вн.р}} = \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} = \xi_{\text{м}} \frac{V_1^2}{2g}.$$

С учётом того, что $V_1 F_1 = V_2 F_2$ и $\xi_{\text{м}} = (1 - V_1 / V_2)^2$, получим: $\xi_{\text{м}} = (1 - F_1 / F_2)^2$ – относится к скорости V_1 ; $\xi_{\text{м}} = (F_2 / F_1 - 1)^2$ – относится к скорости V_2 . Суммарные потери напора в трубопроводе постоянного диаметра ($d = \text{const}$):

$$\Delta h_{\text{в}} = \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} + \sum_1^n \xi_i \frac{V^2}{2g} = \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi_i \right) \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

Пример 7.1. Определить режим движения жидкости в лотке прямоугольной формы высотой 0,2 м и шириной 0,5 м при уровне воды 0,15 м и скорости $V = 1,2$ м/с (рис. 7.3).

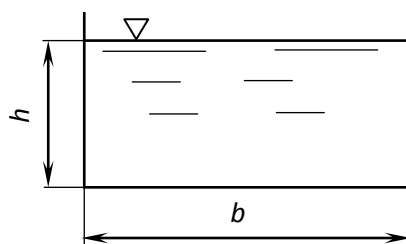


Рис. 7.3

Решение. Принимая $v = 0,01 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, по формуле (7.3) определяем

$$Re = \frac{4RV}{v} = \frac{4bhV}{2(h+b)v} = \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 0,5 \cdot 1,2}{(0,15 + 0,5) \cdot 0,01 \cdot 10^{-4}} = \frac{0,18}{0,01 \cdot 10^{-4} \cdot 0,65} = 277000..$$

Так как $Re > Re_{кр} = 2300$, то режим движения потока будет турбулентным.

Пример 7.2. Определить режим движения и потери напора по длине трубопровода (рис. 7.4), если длина трубопровода 100 м, диаметр $d = 0,1 \text{ м}$, $Q = 10^{-2} \text{ м}^3/\text{с}$, $v_{ж} = 0,726 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

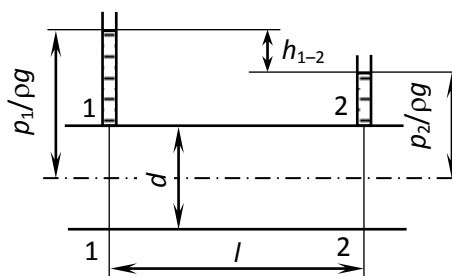


Рис. 7.4

Решение. Скорость потока в трубопроводе

$$V = \frac{Q}{F} = \frac{0,01}{0,785 \cdot 10^{-2}} = 1,27 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{Vd}{v} = \frac{1,27 \cdot 0,1}{0,726 \cdot 10^{-4}} = 1750.$$

Так как число Рейнольдса меньше 2300, то режим движения ламинарный.

Потери напора с учетом значения $\lambda = \frac{64}{Re}$

$$\Delta h_w = \lambda \frac{\ell V^2}{d 2g} = \frac{64}{Re} \frac{\ell V^2}{d 2g} = \frac{32v\ell V}{d^2 g} = \frac{32 \cdot 0,726 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot 1,27}{9,81 \cdot 0,1^2} = 3 \text{ м}.$$

Пример 7.3. Определить потери давления при внезапном расширении трубопроводов, применяемых в качестве нагревательных приборов системы отопления.

Стояк, подводящий нагретую воду, и соединительные трубы выполнены диаметром $d = 0,025$ м и приварены к торцу труб $d_1 = 0,1$ мм. Скорость воды в подводящих трубах $V = 0,3$ м/с, а температура воды $t = 80$ °С.

Решение. Кинематическая вязкость и плотность воды в подводящей сети (при $t = 80$ °С) равны соответственно:

$$\nu = 0,36 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \rho = 972 \text{ кг/м}^3.$$

Находим число Рейнольдса в трубопроводах подводящей сети по формуле

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 0,025}{0,36 \cdot 10^{-6}} = 20820, \text{ т.е. } Re > 2320.$$

Потери давления определим по формуле Борда:

$$\Delta p = \frac{V^2}{2} \left(1 - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right)^2 \cdot \rho = \left(\frac{0,3^2}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{0,025^2}{0,1^2} \right)^2 \cdot 972 = 41,8 \text{ Па}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какие два режима движения жидкости вы знаете, и каковы их характерные особенности?
2. Какие физические свойства жидкости и характеристики потока влияют на режимы движения жидкости?
3. Каким критерием оцениваются режимы движения жидкости?
4. Запишите и поясните критерий оценки для круглого сечения потока и потока произвольной формы.
5. Приведите примеры ламинарного и турбулентного режимов движения потока для жидкостей с различной вязкостью.
6. Как определяется граница между ламинарным и турбулентным режимами? Для каких целей введено критическое число Рейнольдса?
7. По какой формуле определяются потери напора по длине трубопровода, и каков её физический смысл?
8. Что такое коэффициент гидравлического трения, и по какой формуле он определяется при ламинарном движении жидкости?
9. По какой формуле определяются местные потери? Каков физический смысл потерь на местном сопротивлении?



10. Приведите примеры местных сопротивлений.
11. В каких случаях применяется формула Борда для расчёта потерь на местных сопротивлениях?
12. Какие трубы называются гидравлически гладкими и гидравлически шероховатыми?
13. Приведите формулы для расчёта λ гидравлически гладких труб, а также для случаев, когда λ зависит только от шероховатости.



8. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ИСТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

8.1. Общая характеристика истечения

Истечение жидкостей из отверстий и насадков имеет большое практическое значение, поскольку они применяются при решении многих технических задач. Например, в различных двигателях внутреннего сгорания при подаче топлива, при опорожнении цистерн и различных ёмкостей, при конструировании сопел и форсунок, где необходима строгая дозировка и расход жидкости, а также гидромониторных и эжекторных установках, разрабатывающих грунты, гидротехнических сооружениях, содержащих затворы или отверстия для сброса воды.

Истечение жидкости может происходить при постоянном и переменном напорах, через малое или большое отверстие, через насадки различной конструкции. Кроме того, истечение может быть свободным в атмосферу или вакуум и под уровень (затопленное истечение).

При выходе струи из отверстия струя претерпевает сжатие. Сжатое сечение струи находится примерно на $0,5d$ от стенки резервуара.

Отношение площади струи в сжатом сечении к площади всего отверстия называется *коэффициентом сжатия струи*:

$$\varepsilon = \frac{F_c}{F}. \quad (8.1)$$

Значение коэффициента сжатия струи зависит от характера деформации потока.

В этой связи различают совершенное и несовершенное, полное и неполное сжатие.

Совершенным сжатием называется такое, при котором ни свободная поверхность, ни близлежащие стенки не влияют на сжатие струи. Расстояние до ближайшей стенки должно быть в три раза больше диаметра отверстия ($\ell \geq 3d$).

Сжатие будет несовершенным, если это условие не соблюдается. Коэффициент сжатия ε при совершенном сжатии меньше, чем при несовершенном.

Если струя имеет равномерное сжатие по периметру, то сжатие называется *полным*, в противном случае сжатие называется *неполным*. Неполное сжатие будет иметь отверстие, расположенное на дне резервуара или у боковой поверхности.

Коэффициент сжатия для боковых отверстий больше, чем для отверстий с полным сжатием.

Для получения того или иного гидравлического эффекта к отверстию присоединяются так называемые насадки, длина которых $\ell = (3-4) d$. Обычно насадки применяются для увеличения пропускной способности отверстия, получения компактной струи и т.д.

8.2. Истечение жидкости из отверстия в тонкой стенке

Рассмотрим истечение жидкости из круглого отверстия диаметром d_0 в вертикальной тонкой стенке сосуда (рис. 8.1).

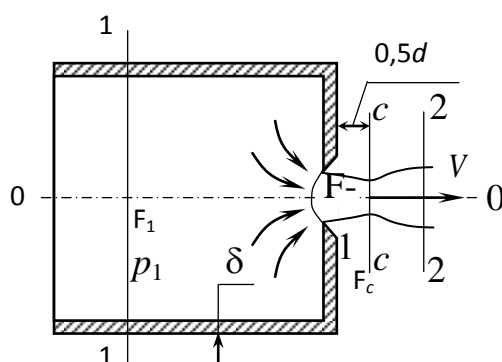


Рис. 8.1. Истечение жидкости из круглого отверстия

Стенка считается тонкой, если её толщина $\delta < 0,2d_0$ и не влияет на условия истечения. Основной задачей расчета характеристик истечения является определение скорости истечения и расхода жидкости при следующих условиях:

1. Процесс истечения установившийся, т.е. $p_1 = \text{const}$.
2. Сжатие струи – полное и совершенное.
3. В сжатом сечении давление подчиняется гидростатическому закону распределения.
4. Скорости в верхних и нижних точках отверстия не отличаются между собой и коэффициент Кориолиса $\alpha = 1$.

Для определения скорости истечения напишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2, учитывая, что плоскость сравнения проходит через центр тяжести отверстия, т.е. $z_1 = z_2 = 0$:

$$(8.2)$$

Анализ уравнения (8.2) показывает, что p_0 в сжатом сечении можно принять равным атмосферному.

Потери напора между сечениями 1–1 и 2–2 определяются по формуле Вейсбаха:

$$\Delta h_{\text{вх}} = \xi_{\text{вх}} \frac{V_c^2}{2g}, \quad (8.3)$$

где $\xi_{\text{вх}}$ – коэффициент сопротивления отверстия.

С учётом формулы (8.3) преобразуем уравнение (8.2) к виду

$$V_c^2 \left(1 + \xi_{\text{вх}} - \frac{V_1^2}{V_c^2} \right) = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}. \quad (8.4)$$

Решая уравнение (8.4) относительно V_c , находим

$$V_c = \left[1 + \xi_{\text{вх}} - \left(\frac{V_1}{V_c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}. \quad (8.5)$$

Преобразуем отношение V_1^2 / V_c^2 , используя уравнение расхода для сечений 1–1 и с–с (рис. 8.1) в виде $V_1 F_1 = V_c F_c$ или $\frac{V_1^2}{V_c^2} = \frac{F_c^2}{F_1^2}$. Умножив и разделив правую часть последнего равенства на F_0^2 , получим

$$\frac{V_1^2}{V_c^2} = \frac{F_c^2}{F_0^2} \cdot \frac{F_0^2}{F_1^2}.$$

Обозначив $\frac{F_c^2}{F_0^2} = \varepsilon^2$ и $\frac{F_0^2}{F_1^2} = n^2$, преобразуем формулу (8.5) к виду

$$V_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{вх}} - n^2 \varepsilon^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}. \quad (8.6)$$

Введём обозначение

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{вх}} - n^2 \varepsilon^2}}, \quad (8.7)$$

где φ – коэффициент скорости истечения, учитывающий потери скорости на местном сопротивлении (на острой кромке входного отверстия); $\varepsilon = F_c / F_0$ – коэффициент сжатия струи для круглых отверстий, равный 0,64; $n = F_0 / F_1$ – коэффициент, учитывающий влияние скорости потока

перед входным отверстием на коэффициент скорости (при истечении из малых отверстий $n \rightarrow 0$).

С учётом обозначения (8.7), формула (8.6) принимает вид (индекс «с» опускается)

$$V = \varphi \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}. \quad (8.8)$$

При истечении холодной воды через малое отверстие обычно принимают $\varphi \approx 0,97 - 0,98$; $\xi_{\text{вх}} \approx 0,97 - 0,06$.

По коэффициенту скорости легко определить коэффициент сопротивления $\xi_{\text{вх}}$:

$$\xi_{\text{вх}} = 1/\varphi^2 - 1.$$

Эти коэффициенты зависят от напора H и, следовательно, от скорости истечения, вязкости жидкости, формы и размеров отверстия, а поэтому и от числа Рейнольдса. Обычно принимают $\varphi = f(\text{Re})$.

Траектория полёта струи при истечении жидкости при небольших скоростях и небольших высотах падения, когда можно пренебречь сопротивлением окружающего струю воздуха и принять форму струи параболической, показана на рис. 8.2.

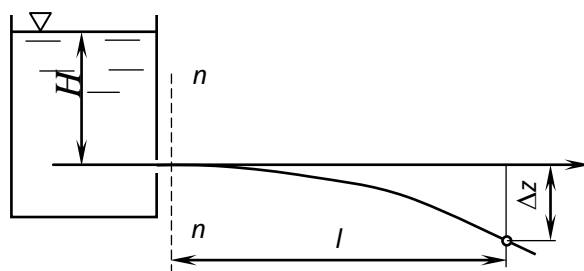


Рис. 8.2

Без большой погрешности можно считать, что частица жидкости за сжатым сечением $n-n$ движется по инерции: по оси x – равномерно, по оси z – равноускоренно, поэтому закон движения частицы жидкости можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ell &= Vt = \varphi \sqrt{2gH}t; \\ \Delta z &= \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta z}{g}}.$$

Подставляя выражение t в формулу (8.9), получим

$$\ell = \varphi \sqrt{2gH} \sqrt{\frac{2\Delta z}{g}}.$$

Отсюда

$$\Delta z = \frac{\ell^2 g}{2\varphi^2 2gH} = \frac{\ell^2}{4\varphi^2 H}. \quad (8.10)$$

Решая выражение (12.10) относительно коэффициента скорости, находим

$$\varphi = \frac{\ell}{2\sqrt{\Delta z H}}. \quad (8.11)$$

Чтобы определить φ , надо измерить дальность полёта струи ℓ , высоту падения Δz и напор H .

Объемный расход жидкости равен произведению скорости в сжатом сечении на площадь живого сечения: $Q = F_C V$.

Подставляя вместо F_C и V их значения, имеем

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{BX}} - \varepsilon^2 n^2}} \varepsilon \omega \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}.$$

Введём обозначение

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \xi_{\text{BX}} - \varepsilon^2 n^2}} = \varphi \varepsilon, \quad (8.12)$$

где μ – коэффициент расхода.

С учётом обозначений в формуле (8.12) получим

$$Q = \mu \omega \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}. \quad (8.13)$$

Так как для малых отверстий коэффициент сжатия $\varepsilon = 0,64$, а коэффициент скорости $\varphi = 0,97$, то, в соответствии с формулой (8.12),

$$\mu = \varphi \varepsilon = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62.$$

Учитывая зависимость ε от $n = F_0 / F_1$, можно найти также зависимость

$$\mu = f(n, \xi_{\text{BX}}).$$

При истечении из малых отверстий $n \rightarrow 0$ из формулы (8.12), находим

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \xi_{\text{ВХ}}}}. \quad (8.14)$$

В случае истечения из сосудов со свободной поверхностью, формулы (8.8) и (8.13) записываются в виде

$$V = \varphi \sqrt{2gH}; \quad (8.15)$$

$$Q = \mu F \sqrt{2gH}, \quad (8.16)$$

где $H = \frac{(p_1 - p_2)}{\rho g}$ – высота уровня жидкости над центральным отверстием (при диаметре отверстия $d \leq H$ (см. рис. 8.2)).

Опытами установлено, что коэффициент μ существенным образом изменяется в зависимости от формы, размеров отверстия и от напора. Причём, с увеличением размеров отверстия коэффициент расхода уменьшается, а с увеличением напора уменьшается влияние размеров отверстия на коэффициент μ .

При неполном сжатии коэффициент расхода определяется по формулам:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + 0,152 \frac{n}{p} \right) \text{ – для круглых отверстий;}$$

$$\mu = \mu_0 \left(1 + 0,128 \frac{n}{p} \right) \text{ – для прямоугольных отверстий.}$$

Здесь μ_0 – коэффициент расхода для аналогичного отверстия при полном сжатии; n – часть периметра отверстия, где отсутствует сжатие; p – часть периметра отверстия, где отсутствует сжатие.

Если сжатие несовершенное или неполное, то коэффициенты μ и φ определяются с поправками по формуле Н.Е. Жуковского:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{(\pi + 2) \cdot \left(\frac{2 \cdot \theta}{\operatorname{tg}(2 \cdot \theta)} \right)},$$

где θ – угол, определяемый из выражения

$$\frac{a}{H} = \operatorname{tg} \theta \left(1 + \frac{2}{\pi} \times \frac{2 \cdot \theta}{\operatorname{tg}(2 \cdot \theta)} \right).$$

Здесь H – глубина погружения нижней кромки отверстия; a – глубина погружения нижней кромки отверстия.

При совершенном сжатии $\varepsilon = \frac{\pi}{\pi+2} \approx 0,611$, что хорошо согласуется с опытными данными.

При истечении жидкости из затопленного отверстия, как показали многочисленные исследования, коэффициенты μ , φ , ε будут мало отличаться от коэффициентов при истечении жидкости в атмосферу, но в качестве напора будет действовать разность напоров $H_1 - H_2$ (рис. 8.3) при $p_1 = p_2$.

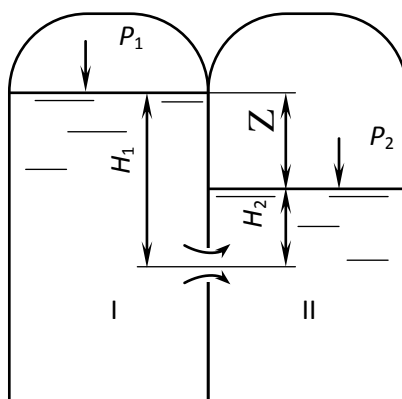


Рис. 8.3

Расчётные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} V &= \varphi \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \varphi \sqrt{2gz}; \\ Q &= \mu F \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \mu F \sqrt{2gz}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Если давление на свободной поверхности резервуаров не равно атмосферному (рис. 8.3), т.е. $p_1 > p_2 > p_{\text{атм}}$, то расчётными формулами будут следующие:

$$\begin{aligned} V &= \varphi \sqrt{2g \left[\left(H_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(H_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) \right]} = \varphi \sqrt{2g \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z \right)}; \\ Q &= \mu F \sqrt{2g \left[\left(H_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(H_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) \right]} = \mu F \sqrt{2g \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z \right)}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

8.3. Истечение при переменном напоре

Задача об истечении жидкости при переменном напоре сводится к определению времени опорожнения или наполнения всего или некоторой части сосуда, в зависимости от начального уровня, формы и размеров сосуда и отверстия.

Подобные задачи встречаются при расчётах наполнения и опорожнения резервуаров, цистерн, водохранилищ, бассейнов, шлюзовых камер и др.

При переменном напоре имеет место неустановившееся движение жидкости, что делает неприемлемым обычное уравнение Бернулли. Поэтому полное время истечения разделяют на бесконечно малые промежутки, в течение которых напор считается постоянным, а истечение жидкости – установившимся. Это позволяет использовать для решения задач полученные выше зависимости и приводит к достаточно точным результатам.

Рассмотрим простейший пример истечения жидкости в атмосферу через донное отверстие площадью ω из открытого вертикального цилиндрического сосуда, одинакового по всей высоте поперечного сечения F (рис. 8.4).

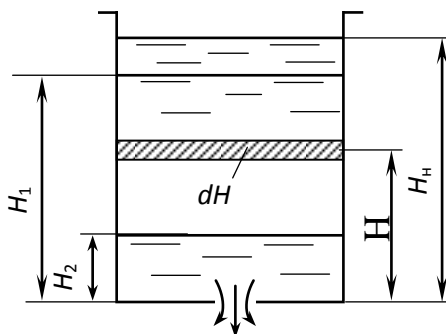


Рис. 8.4

Пусть за время dt через отверстие вытекло dQ жидкости, равное $dQ = \mu \omega \sqrt{2gH} dt$, где H – напор на уровне элементарного элемента dH , который можно считать постоянным; μ – коэффициент расхода (изменяющейся в зависимости от напора, формы и размеров отверстия).

В действительности, за это время уровень жидкости в сосуде опустится на dH и объём жидкости в нём изменился на $dW = -FdH$.

Вследствие неразрывности движения жидкости $dQ = -FdH$ или $\mu \omega \sqrt{2gH} dt = -FdH$.

Отсюда

$$dt = \frac{-FdH}{\mu\omega\sqrt{2gH}}. \quad (8.19)$$

Полное время опорожнения сосуда определяется в результате интегрирования уравнения (8.19):

$$\int_0^t dt = -\int_{H_H}^0 \frac{FdH}{\mu\omega\sqrt{2gH}},$$

где H_H – начальный напор жидкости в сосуде.

Меняя пределы интегрирования в правой части уравнения, принимая $\mu = \text{const}$ и вынося постоянные за знак интеграла, получим

$$t = \frac{F}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_0^{H_H} H^{-1/2} dH = \frac{2F\sqrt{H_H}}{\mu\omega\sqrt{2g}}. \quad (8.20)$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (8.20) на $\sqrt{H_H}$, получим

$$t = \frac{2F\sqrt{H_H}\sqrt{H_H}}{\mu\omega\sqrt{2gH_H}} = \frac{2FH_H}{Q} = \frac{2W}{Q}. \quad (8.21)$$

Из выражения (8.21) следует, что при сохранении постоянного напора в сосуде тот же объём жидкости пройдёт через отверстие за время Δt , вдвое меньшее, чем t , т.е. $t = 2\Delta t$.

Формула (8.20) применима и для случая истечения жидкости из отверстия в боковой стенке сосуда. В этом случае напор H_H отсчитывается от центра тяжести площади отверстия.

При частичном опорожнении сосуда применяется следующая зависимость:

$$t = \frac{2F(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\mu\omega\sqrt{2g}}. \quad (8.22)$$

Пример 8.1. Вода вытекает из малого незатопленного отверстия в вертикальной стенке при постоянном напоре H . Высота расположения отверстия над полом $\Delta z = 1,0$, струя достигает пола на расстоянии $\ell = 1,2$ м. Диаметр отверстия $d = 50$ мм, $\phi = 0,97$. Определить расход Q .

Решение. По формуле (8.10) определяем H :

$$H = \frac{\ell^2}{\phi^2 4 \Delta z} = \frac{1,2^2}{0,97^2 \cdot 4 \cdot 1,0} = 0,315 \text{ м}.$$

Принимая коэффициент расхода $\mu = 0,62$, находим расход

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH} = 0,62 \cdot \frac{3,14 \cdot 5^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 31,5} = 28 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Пример 8.2. Определить расход жидкости, перетекающей из резервуара I в резервуар II (см. рис. 4.3), если диаметр отверстия в вертикальной стенке $d = 0,2$ м, высота $H_1 = 7$ м, $H_2 = 6$ м, давление в I резервуаре $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, а во II резервуаре $p_2 = 1,7 \cdot 10^5$ Па, $\mu = 0,62$. Начальной скоростью пренебречь.

Решение. Определяем площадь отверстия

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} = 0,0314 \text{ м}^2.$$

Находим расход жидкости

$$Q = \mu \omega \sqrt{2g \left(z + \frac{p_1 + p_2}{\rho g} \right)} = 0,62 \cdot 0,0314 \sqrt{19,6 \left(1 + \frac{(2 - 1,7) \cdot 10^5}{1000 \cdot 9,81} \right)} = 0,62 \cdot 0,0314 \cdot 4,43 \cdot 2 = 0,0175 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Пример 8.3. Определить расход воды и скорость ее истечения через круглое незатопленное отверстие диаметром $d = 0,2$ м, если $H = 4$ м, $\mu = 0,62$, $\varphi = 0,97$. Скоростным напором пренебречь.

Решение. Определяем скорость истечения

$$V = \varphi \sqrt{2gH} = 0,97 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4} = 8,58 \text{ м/с}.$$

Площадь отверстия

$$\omega = 0,78 \cdot 0,2^2 = 0,0314 \text{ м}^2.$$

Определяем расход воды через отверстие:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH} = 0,62 \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,0314 = 0,172 \text{ м}^3/\text{с}.$$

8.4. Истечение жидкости через насадки

Насадком называется короткая труба длиной $\ell = (3 - 4) d$ цилиндрической, конической или коноидальной форм. Присоединение насадка к отверстию в тонкой стенке изменяет вытекающий из сосуда расход и оказывает влияние на время опорожнения сосуда, дальность полета струи и т.д. Аналогичное явление наблюдается при истечении из отверстия в толстой стенке, т.е. когда $\delta = (3 - 4) d$.

Характер течения жидкости, ее толщина в различных насадках имеет много общего. Рассмотрим истечение жидкости через внешний цилиндрический насадок (насадок Вентури) (рис. 8.5).

При наличии острой кромки возникает сжатие струи на входе в насадок. Максимальное сжатие образуется на расстоянии от плоскости входа в отверстие, равном $0,5d$.

Площадь сжатого сечения потока $\omega_c = \varepsilon \omega$, причем числовое значение коэффициента сжатия зависит от условий входа. В частности, для рассматриваемого случая (круглое отверстие с острой кромкой) приближенно можно принять $\varepsilon = 0,64$.

После сжатого сечения струя расширяется, заполняя полностью сечение, выходя из него полным сечением. Рассмотрим соотношение скоростей и давлений в сжатом сечении и на выходе из насадка (рис. 8.5). Давление на выходе из насадка равно атмосферному, а скорость – меньше скорости в сжатом сечении. Тогда, согласно уравнению Бернулли, давление в сжатом сечении должно быть меньше атмосферного, т.е. в сжатом сечении образуется вакуум.

Наличие в сжатом сечении вакуума существенно меняет картину истечения. В этом случае жидкость из резервуара изливается в область вакуума, что сопоставимо с увеличением напора и объясняет увеличение действительного расхода. Для доказательства найдем расчетные зависимости для скорости истечения и расхода жидкости через насадок.

Запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2. При следующих условиях истечения:

1. Движение жидкости в насадке установившееся.
2. Входная кромка круглого отверстия – острая, что приводит к сжатию струи, коэффициент сжатия $\varepsilon = \omega_c / \omega = 0,64$.
3. На выходе из насадка струя заполняет все сечение ($\ell = 3...4d$), поэтому $\varepsilon = 1$.
4. Распределение давления в сечении 2–2 подчиняется гидростатическому закону:

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}.$$

5. Коэффициент Кориолиса $\alpha = 1$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum \Delta h_{1-2}. \quad (8.23)$$

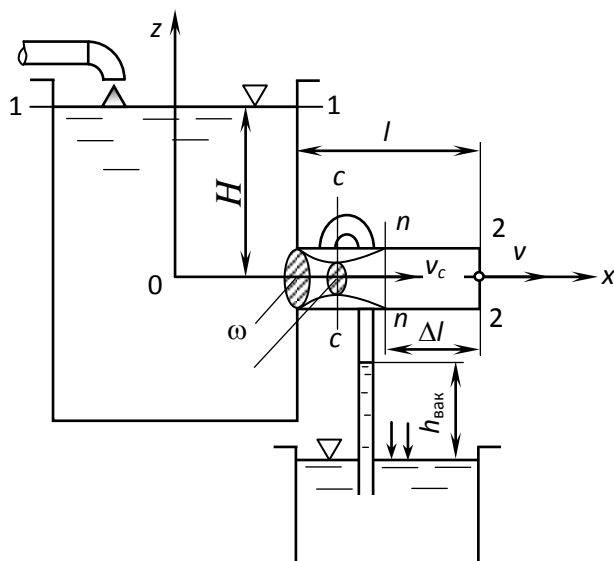


Рис. 8.5

Из анализа уравнения (8.23) в соответствии с расчетной схемой имеем:

$$z_1 = H; \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g}; \frac{\alpha V_1^2}{2g} = 0;$$

$$\sum \Delta h_{1-2} = \lambda \frac{\Delta l}{d} \frac{V^2}{2g} + \xi_{\text{вх}} \frac{V_c^2}{2g} + \frac{(V_c - V_2)^2}{2g},$$

где $\lambda \frac{\Delta l}{d} \frac{V^2}{2g}$ – потери напора на участке Δl пренебрежительно малы;

$\xi_{\text{вх}} \frac{V_c^2}{2g}$ – потери напора на входе до сжатого сечения; $\frac{(V_c - V_2)^2}{2g}$ – потери напора на расширение струи (по теореме Борда).

С учетом малости потерь напора на участке Δl по уравнению Бернулли имеем:

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + \xi_{\text{вх}} \frac{V_c^2}{2g} + \frac{(V_c - V_2)^2}{2g}. \quad (8.24)$$

Применяя уравнение расхода для сжатого и выходного сечений

$$V_c = V_2 \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{V_2}{\varepsilon}$$

и исключая V_c из уравнения (8.24), получим

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\xi_{\text{вх}}}{\varepsilon^2} \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\left(\frac{V_2}{\varepsilon} - V_2\right)^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \cdot \left[1 + \frac{\xi_{\text{вх}}}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \right].$$

Отсюда

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi_{\text{вх}}}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2}} \cdot \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}, \quad (8.25)$$

где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi_{\text{вх}}}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{нас}}}}$ – коэффициент скорости.

При $\xi_{\text{вх}} = 0,06$ и $\varepsilon = 0,64$ коэффициент скорости $\varphi = 0,82$. Общий коэффициент сопротивления для насадка

$$\xi_{\text{нас}} = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{0,82} - 1 = 0,5.$$

Определяем расход из уравнения неразрывности с учетом, что $\omega_c = \varepsilon \omega_2$; получим

$$Q = \omega_c V = \varepsilon \omega_2 \varphi \sqrt{2gH}.$$

Обозначая $\varepsilon \varphi = \mu$, и считая, что $\omega_2 = \omega$, получаем

$$Q = \omega \mu \sqrt{2gH}, \quad (8.26)$$

где μ – коэффициент расхода насадка.

Так как для насадка $\varepsilon = 1$, то $\mu = \varphi = 0,82$. Сравнивая коэффициенты расхода и скорости для насадка и отверстия в тонкой стенке, видим, что насадок увеличивает расход и уменьшает скорость истечения.

Действительно, для больших значений Re отношения

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\text{н}}}{\mu_0} &= \frac{0,845}{0,611} = 1,38; \\ \frac{\varphi_{\text{н}}}{\varphi_0} &= \frac{0,845}{1} = 0,845, \end{aligned}$$

то есть расход через насадок увеличивается более чем на 35 % по сравнению со скоростью истечения из отверстия.

8.5. Зависимость коэффициентов истечения от числа Рейнольдса

Полученные выше значения коэффициентов истечения для отверстий и насадков различной формы справедливы для условий, когда влияние вязкости жидкости на истечение не проявляет себя в заметной степени.

Число Рейнольдса для истекающей струи вычисляется по формуле

$$Re_0 = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} \frac{d}{\nu} = \sqrt{2gH} \frac{d}{\nu}. \quad (8.27)$$

При числе $Re_0 > 10^5$ влияние вязкости можно не учитывать.

При $Re_0 > 3 \cdot 10^5$ (область, наиболее характерная для истечения из отверстий воды) практически остается неизменным.

Вместе с тем, коэффициент истечения зависит от числа Re при истечении воды и других маловязких жидкостей из отверстий малого диаметра.

Кроме того, зависимость коэффициента расхода μ от числа Рейнольдса необходимо учитывать при определении времени опорожнения ($t_{оп}$) сосудов.

При малых значениях $Re < 10$ применима зависимость

$$t_{оп} = 29F\nu \frac{(H_1/H_2)}{g\omega d}.$$

Для определения значений μ при $Re_H = 10^2 \dots 10^5$ (при $\ell/d = 2 \dots 5$) применяется эмпирическая формула

$$\mu = \left[1,23 + \frac{58\ell}{Re_H d} \right]^{-1}, \quad (8.28)$$

где Re_H – число Рейнольдса для насадка.

Из графика (рис. 8.6), построенного по формуле (8.28), видно, что при $Re_H \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow 0,813$, что незначительно отличается от $\mu = 0,82$ для цилиндрического насадка.

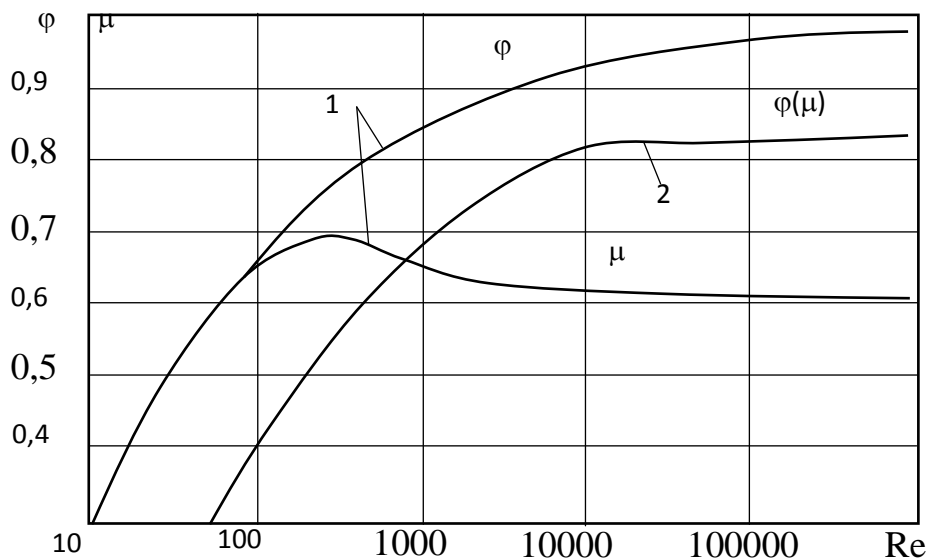


Рис. 8.6

На графике (рис. 8.6) кривая 1 – соответствует случаю истечения из отверстия в тонкой стенке, а кривая 2 – из цилиндрического насадка при $\ell/d=3$. Из графика следует, что при $Re_H < 1000$ применение насадка уменьшает коэффициент расхода по сравнению с истечением из отверстия при одинаковых d .

8.6. Вакуум в цилиндрическом насадке

Определим вакуум в сжатом сечении по формуле

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{абс}}}{\rho g}, \quad (8.29)$$

где $p_{\text{абс}}$ – абсолютное давление в данной точке.

Запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и с–с (см. рис. 8.5):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{M_1}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{V_c^2}{2g} + \Delta h_{1-c}.$$

Здесь имеют место соотношения:

$$z_1 = H; \quad \frac{V_1^2}{2g} = 0; \quad z_c = 0; \quad \Delta h_{1-2} = \xi_{\text{вх}} \frac{V_c^2}{2g}.$$

Тогда

$$H + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{M_c^2}{2g} + \xi_{\text{вх}} \frac{V_c^2}{2g}.$$

Отсюда

$$h_{\text{вак}} = \frac{(p_{\text{атм}} - p_c)}{\rho g} = (1 + \xi_{\text{вх}}) \frac{V_c^2}{2g} - H. \quad (8.30)$$

Выразим

$$V_c = V / \varepsilon;$$
$$V = \varphi \sqrt{2gH}$$

или

$$V_c = \frac{\varphi}{\varepsilon} \sqrt{2gH}. \quad (8.31)$$

Подставляя уравнение (8.29) в выражение (8.28), получим

$$h_{\text{вак}} = (1 + \xi_{\text{вх}}) \frac{(\varphi^2 / \varepsilon^2) 2gH}{2g} - H = \left[(1 + \xi_{\text{вх}}) \frac{\varphi^2}{\varepsilon^2} - 1 \right] H. \quad (8.32)$$

Принимая $\xi_{\text{вх}} = 0,06$; $\varphi = 0,82$; $\varepsilon = 0,64$, получаем

$$h_{\text{вак}} \approx 0,75 H_{\text{ом.мм ст.}}$$

Из этой формулы можно определить предельное значение напора H . Поскольку максимальный вакуум достигается при $h_{\text{вак}} = p_{\text{атм}} / \rho g$, то

$$H_{\text{пр}} \approx 1,3 \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g}.$$

Если принять предельное значение вакуума равным 10 м, то

$$H_{\text{пр}} = \frac{h_{\text{вак}}}{0,75} = \frac{10}{0,75} = 13,33 \text{ м.}$$

Однако в действительности, вследствие вскипания жидкости и нарушения из-за этого сплошности течения струи жидкости, нормальная работа насадка нарушается раньше, а именно: при $h = 7$ м. Отсюда реальный предельный напор равен $H_{\text{пр}} = 7 / 0,75 = 9,3$ м, а не 13,33.

8.7. Практическое применение насадков

Рассмотрим область применения часто встречающихся насадков, а также их достоинства и недостатки (рис. 8.7–8.12).

Внешний цилиндрический насадок применяется для получения компактной дальнобойной струи (рис. 8.7). Как насадки такого типа работают водовыпуски в плотинах, трубы под насыпями и т.д. Значения коэффициентов для воды равны: $\varphi=0,82$, $\mu=0,82$, $\varepsilon=1$, $\xi=0,5$.

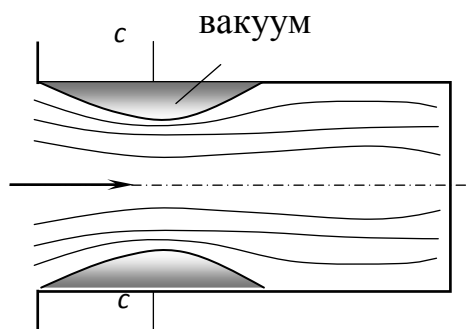


Рис. 8.7

В силу конструктивных причин внутренний цилиндрический насадок может применяться вместо внешнего цилиндрического насадка. В этом случае некоторые линии тока изменяют свое направление на 180° (рис. 8.8).

Сжатие потока и потери энергии в насадке больше, чем для внешнего цилиндрического насадка, т.е.

$$\mu=0,71; \quad \varphi=0,71; \quad \varepsilon=1; \quad \xi_n=1,0.$$

Конические сходящиеся насадки применяются для получения больших выходных скоростей, увеличения силы и дальности полета струи жидкости в пожарных брандспойтах, в форсунках для подачи топлива; гидромониторах для размыва грунта, фонтанных соплах, соплах активных гидравлических турбин и т.д. (рис. 4.9). При углах конусности $\theta = (12-14^\circ)$ коэффициент расхода достигает максимального значения порядка $\mu = 0,94 \dots 0,95$, а коэффициент скорости $\varphi = 0,96$, так как из-за сужающихся направляющих стенок струя выходит из насадка с небольшим сжатием ($\varepsilon = 0,98 \dots 0,99$).

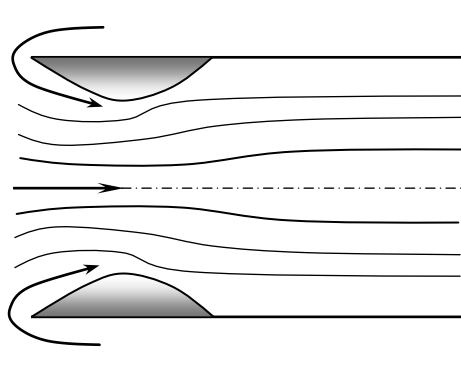


Рис. 8.8

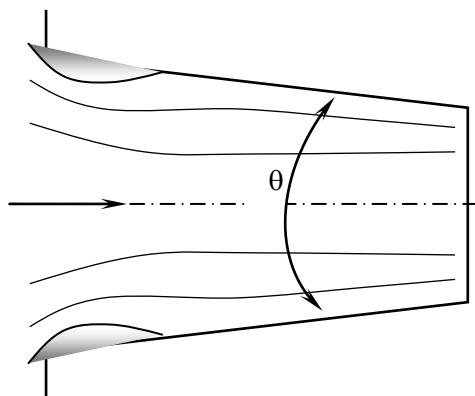


Рис. 8.9

Конические расходящиеся насадки применяются в коротких водах для наполнения шлюзовых камер, в эрлифтах и других установках, где необходим значительный всасывающий эффект для увеличения расхода (рис. 8.10). Такие насадки применяются в механизмах для замедления подачи смазочных веществ.

В насадке после сжатого сечения расширение потока больше, чем в цилиндрической насадке, что приводит к большим потерям напора и к уменьшению скорости.

При этом расход возрастает благодаря увеличению расчетного выпускного сечения.

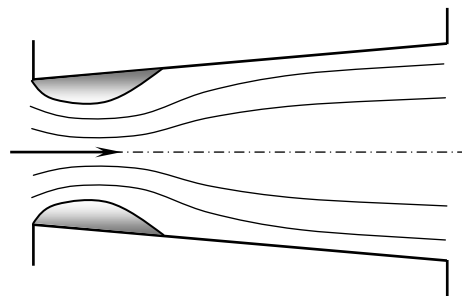


Рис. 8.10

Диаметр выходного сечения

$$D = d + 2\ell \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (8.33)$$

где d – диаметр входного отверстия; θ – угол конусности насадка; ℓ – длина насадка.

Причем сечение насадка может достигать до $9d$, $\ell = 9d$ и $\theta = 8^\circ$, коэффициенты расхода и скорости $\mu = \varphi = 0,45$.

Площадь сечения на выходе по формуле (8.31) в этом случае в 5,1 раза больше площади отверстия. Коэффициент расхода такого насадка в $\varphi_{\text{ц}}/\varphi_{\text{к}} = 0,62/0,45 = 1,38$ раза меньше коэффициента расхода отверстия.

С учетом этого, согласно формуле $Q = \mu \omega \sqrt{2gH}$, при равнозначных условиях расход через конический расходящийся насадок в $5,1/1,38 = 3,7$ раза больше, чем через отверстия в тонкой стенке диаметром d .

В технике для различных целей применяют и другие насадки. Коноидальный насадок (рис. 8.11) имеет форму входной части, близкую к форме вытекающей струи.

Гидравлическое сопротивление в насадке небольшое, поэтому $\mu = \varphi = 0,97 \dots 0,98$, $\mu = 1$, $\xi_{\text{н}} = 0,06$. При особенно тщательном изготовлении и гладких стенках можно получить $\mu = \varphi = 0,995$.

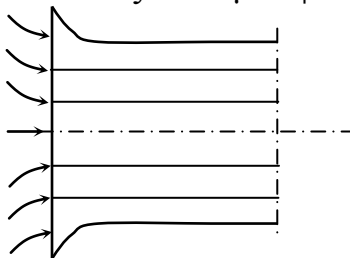


Рис. 8.11

Применяется также комбинация двух насадков: коноидального (сопло) и конического (диффузор) (рис. 8.12).

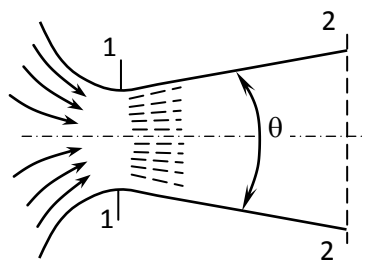


Рис. 8.12

Приставка диффузора к соплу влечет за собой снижение давления в узком месте насадка, что приводит к увеличению расхода и скорости через насадок. При том же диаметре узкого сечения 1–1 и том же напоре диффузорный насадок позволяет увеличить расход в 2,5 раза по сравнению с соплом. Они применяются при малых напорах ($H=1\text{--}4$ м), так как в узком месте (сечение 1–1) возникает кавитация, что увеличивает сопротивление насадка (см. рис. 8.12).

Коэффициент расхода определяется по формуле (рис. 8.13)

$$\mu_1 = \frac{Q}{S_1 \sqrt{2gH}},$$

где S_1 – площадь узкого сечения.

Пример 8.1. Определить расход и скорость истечения воды из круглого отверстия диаметром $d = 0,01$ м в боковой стенке резервуара больших размеров. Напор воды над центром отверстия $H = 1$ м, температура воды $t = 20^\circ\text{C}$ ($\nu = 10^{-6}\text{ м}^2/\text{с}$).

Решение. Число Рейнольдса, характеризующее истечение:

$$\text{Re} = \frac{\sqrt{2gH} \cdot d}{\nu} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,01}}{10^{-6}} = 44300.$$

По рис. 8.6 находим μ и φ при $\text{Re} = 44300$, $\mu = 0,62$, $\varphi = 0,95$; определяем скорость истечения воды через отверстия:

$$v = \varphi \sqrt{2gH} = 0,95 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} = 4,2 \text{ м/с}.$$

Расход вытекающей жидкости через отверстие

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH} = 0,62 \cdot \frac{\pi \cdot 0,01^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} \approx 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Пример 8.2. Определить диаметры: в начале и в конце водовыпуска, имеющего форму конически расходящегося насадка, работающего в затопленном режиме (рис. 8.13), если $Q = 0,5 \text{ м}^3/\text{с}$, $\mu = 0,5$, $z = 0,25$ м, длина насадка $\ell = 4$ м.

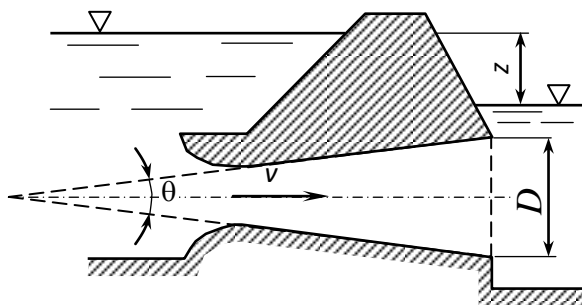


Рис. 8.13

Решение. Расход через насадок

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gz} = \mu \pi (D^2 / 4) \sqrt{2gz}.$$

Находим диаметр

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi \mu \sqrt{2gz}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,5}{\pi \cdot 0,5 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,25}}} = 0,76 \text{ м.}$$

Приняв угол конусности $\theta = 6^\circ$, найдем диаметр входной части насадки (рис. 8.14)

$$\begin{aligned} d &= D - 2l \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 0,76 - 2 \cdot 4 \cdot \operatorname{tg} 3^\circ = \\ &= 0,76 - 2 \cdot 4 \cdot 0,054 = 0,76 - 0,43 \approx 0,33 \text{ м.} \end{aligned}$$

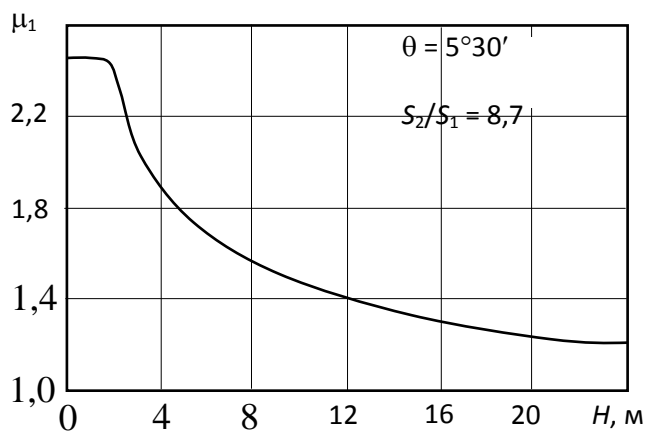


Рис. 8.14

Контрольные вопросы и задания

1. Что понимается под тонкой стенкой, малым отверстием, большим отверстием?
2. Какие виды сжатия струи при истечении из отверстия в тонкой стенке вы знаете?
3. Какими коэффициентами характеризуется истечение жидкости из отверстий и какова между ними аналитическая связь?
4. Чем отличается формула расхода жидкости для незатопленного и затопленного отверстий?
5. Какие технические задачи решаются на основе гидравлического расчёта истечения жидкости?
6. По какой зависимости определяется коэффициент скорости опытным путём?



7. Какие поправочные коэффициенты применяются при расчёте φ и μ при несовершенном сжатии?
8. Какая задача решается при опорожнении ёмкостей и от каких факторов зависит её решение?
9. Что называется насадком и какие насадки вы знаете?
10. При каких условиях образуется сжатое сечение и на каком удалении от входа?
11. Почему в насадках коэффициент сжатия струи $\varepsilon = \omega_c/\omega$ принимается равным единице?
12. Чем отличаются коэффициенты μ и φ для отверстия?
13. Как учитывается влияние вязкости на коэффициенты μ и φ ?
14. Что такое предельное (критическое) значение напора при истечении жидкости через насадки и почему действительное значение меньше критического?
15. Назовите область применения цилиндрических насадков и дайте им краткую характеристику.
16. Назовите область применения конических насадков и дайте им краткую характеристику.



9. ПЕРЕКАЧКА ЖИДКОСТИ ПО ТРУБАМ

Современная буровая установка является мощной и достаточно сложной гидравлической системой, снабженной емкостями, насосами, трубопроводами, лотками и т.п., правильное проектирование которых невозможно без гидравлических расчетов.

Трубопроводный транспорт при современном уровне техники является самым удобным, а при достаточно больших количествах подаваемых жидкостей и самым экономичным. Здесь мы рассмотрим этот вид транспорта лишь с гидравлической точки зрения.

Практически задача гидравлического расчета трубопроводов может ставиться различно, причем можно считать, что основными вариантами расчета являются два.

1. Определение напора в начале линии при известных параметрах трубопровода и заданном расходе жидкости определенных физических свойств.

2. Определение диаметра трубопровода для перекачки заданного количества известной жидкости.

В практике расчетов могут возникнуть и другие варианты постановки задачи, которые в большинстве случаев сводятся к указанным основным.

Первая задача по определению напора в начале линии является наиболее простой. Из преобразованного основного уравнения Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_w \quad (9.1)$$

при условии, что $V_1 = V_2$ величину напора p_1 / γ в начале линии можно определить следующим образом:

$$\frac{p_1}{\gamma} = z_2 - z_1 + \frac{p_2}{\gamma} + \Delta h_\ell. \quad (9.2)$$

На практике в большинстве случаев давление в конце линии p_2 является величиной заданной и если перекачка происходит в открытый резервуар, то $p_2 = 0$. Разность $z_2 - z_1 = h_0$ есть геометрическая высота перекачки, т.е. высота, на которую поднимается жидкость, протекая от начала до конца расчетного участка трубопровода. Если $z_2 > z_1$, то $h_0 < 0$ (трубопровод проложен сверху вниз и в этом случае h_0 способствует движению жидкости по трубопроводу).

С учетом введенных обозначений уравнение (9.2) примет вид

$$\frac{p_1}{\gamma} = h_0 + \Delta h_\ell \quad (9.3)$$

Величина Δh_ℓ определяется по формуле

$$\Delta h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g}. \quad (9.4)$$

Тогда (9.3) можно представить в виде

$$\frac{p_1}{\gamma} = h_0 + \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g}. \quad (9.5)$$

Значение коэффициента λ определяется в зависимости от условий течения и рода жидкости.

Зависимость давления в начале линии от расхода жидкости для расчетного участка, построенная в виде графика $h = f(Q)$, может облегчить расчет при проектировании трубопровода или выборе режима его работы. Такая зависимость называется гидравлической характеристикой трубопровода. Кривые эти дают наглядное представление об изменении гидравлических сопротивлений. Особенно удобны они для анализа работы трубопровода совместно с насосной станцией. Гидравлическая характеристика трубопровода с учетом потерь на местные сопротивления

$$\frac{p_2}{\gamma} = H = h_0 + \Delta h_w, \quad (9.6)$$

где $\Delta h_w = \Delta h_\ell + \Delta h_m$ – потери энергии по длине и на местные сопротивления.

Рассмотрим решение второй задачи, в которой основным вопросом является определение диаметра трубопровода. В отличие от первой задачи, которая решается однозначно, вторая задача может иметь множество решений, если не ограничивать ее никакими дополнительными условиями. С гидравлической точки зрения можно рассчитать перекачку заданного расхода известной жидкости по трубопроводам различных диаметров от очень малого до очень большого. Однако из этого большого ряда трубопроводов отвечать условиям технико-экономической целесообразности будут один или два диаметра труб.

При малом диаметре трубы для обеспечения заданного расхода мы будем иметь большую скорость течения жидкости и большие потери энергии, т.е. большое давление в начале линии. С переходом к варианту с большим диаметром трубы скорость уменьшается так же, как уменьшается напор в начале линии. Зато в первом случае стоимость труб малого диаметра будет значительно меньше, чем при трубах большого диаметра.

Для решения задачи выбора диаметра трубы обычно задаются средней скоростью течения жидкости, исходя из практических данных, после чего находят диаметр трубопровода, а затем по схеме первой задачи определяют давление в начале линии.

Скорости жидкостей выбирают с учетом их физических свойств и практического опыта:

для водопроводов, м/с	1,8—2,5
– бензинопроводов, м/с	1,6—2,2
– легкой нефти, м/с	1,5—2,0
– тяжелой нефти, м/с	0,9—1,4
– глинистого раствора, м/с	1,4—2,3

Таким способом можно рекомендовать определять диаметр только трубопроводов небольшой длины, стоимость которых сравнительно невелика. В случае трубопроводов больших длин, составляющих десятки километров и более, правильность выбранного диаметра должна быть дополнительно обоснована технико-экономическим и надежностным расчетом. Зная заданный расход Q и выбрав среднюю скорость V , находим диаметр трубы

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}}. \quad (9.7)$$

Так как в общем случае определенный таким способом диаметр не будет соответствовать стандартному размеру труб по сортаменту, то необходимо выбрать ближайший стандартный диаметр. После этого гидравлический расчет может быть приведен к первой задаче. Следует отметить, что при расчете потерь напора величину диаметра нужно вычислять с возможно большей точностью, так как уровень потерь давления изменяется в зависимости от режима течения обратно пропорционально четвертой или даже пятой степени величины диаметра.

При гидравлическом расчете следует принимать действительный внутренний диаметр трубы, который изменяется в зависимости от толщины стенок трубы для одного и того же номинального диаметра. Далее будем подробнее рассматривать расчет трубопроводов различной классификации.

9.1. Классификация трубопроводов

Рассмотрим классификацию трубопроводов по следующим характерным признакам:

1. По функциональному назначению трубопроводы подразделяют:
 - на всасывающие;
 - нагнетательные.

2. С конструктивной точки зрения трубопроводы подразделяют:

- на простые;
- сложные;
- короткие;
- длинные.

Простыми называют трубопроводы, не имеющие ответвлений и обслуживающие только одну точку $\Rightarrow x$.

Причем диаметр трубы, а также расход жидкости на всей длине трубы остается неизменным.

Сложные трубопроводы делятся на тупиковые, параллельные и кольцевые.

Тупиковые состоят из магистрального (главного) трубопровода, от которого в разные стороны отходят ответвления к потребителям.

Параллельные состоят из нескольких параллельно проложенных трубопроводов, связанных между собой перемычками с регулирующими задвижками.

Кольцевые представляют собой замкнутую сеть труб, что обеспечивает подачу воды в любом направлении.

При аварии на каком-либо участке подача воды потребителю не прекращается.

Короткими называют трубопроводы, которые имеют значительные местные сопротивления по сравнению с линейными (путевыми).

Длинными называют трубопроводы, у которых доминируют потери напора по длине трубопровода; местными потерями и скоростным напором пренебрегают.

9.2. Система уравнений и задачи гидравлического расчета трубопроводов

Гидравлический расчет трубопроводов основан на следующих уравнениях, формулах и зависимостях:

- уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g} + \Delta h_w = H = \text{const}; \quad (9.8)$$

- уравнение неразрывности для установившегося потока жидкости (уравнение постоянства расхода):

$$Q = VF = \text{const}; \quad (9.9)$$

- формула Дарси – Вейсбаха для учета потерь на трение (по длине трубопровода):

$$\Delta h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g}; \quad (9.10)$$

– формула для учета местных потерь:

$$\Delta h_m = \xi_m \frac{V^2}{2g}; \quad (9.11)$$

– формула Шези при расчете длинных трубопроводов:

$$V = c\sqrt{iR} \text{ или } Q = Fc\sqrt{iR}, \quad (9.12)$$

где $c = \frac{1}{n} R^y$ – коэффициент Шези; n – коэффициент шероховатости; R – гидравлический радиус; y – показатель степени, $y = f(n, R)$.

Обозначив в формуле (9.12) через $K = Fc\sqrt{R}$, получим

$$Q = K\sqrt{i}, \quad (9.13)$$

где K – расходная характеристика (модуль расхода), представляющая собой расход при гидравлическом уклоне, равном единице;

– формула для определения гидравлического уклона (удельных потерь напора по длине):

$$i = \frac{\Delta h_\ell}{\ell} = \frac{V^2}{c^2 R} = \frac{Q^2}{F^2 c^2 R} \quad (9.14)$$

или [формула Дарси – Вейсбаха (13.10)]

$$i = \frac{\Delta h_\ell}{\ell} = \frac{\lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g}}{\ell} = \frac{\lambda}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Заменяя скорость V на Q , из уравнения расхода $Q = VF$, получим

$$i = \frac{16\lambda Q^2}{2g\pi^2 d^5} = \frac{8\lambda Q^2}{g\pi^2 d^5}. \quad (9.15)$$

Обозначим $A = 8\lambda / g\pi^2 d^5$ – удельное сопротивление трубопровода, получим

$$i = AQ^2. \quad (9.16)$$

Тогда

$$\Delta h_\ell = i\ell = AQ^2\ell = SQ^2, \quad (9.17)$$

где S – линейное сопротивление трубопровода.

Найдем связь между K и A из формул

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} \text{ или } K^2 = \frac{Q^2}{i}. \quad (9.18)$$

Подставляя значение i из формулы (9.15), получим

$$K^2 = \frac{Q_2^2}{8\lambda} \frac{g\pi^2 d^5}{Q^2} = \frac{g\pi^2 d^5}{8\lambda} = \frac{1}{A}. \quad (9.19)$$

Из выражений (9.18) следует:

$$i = \frac{Q^2}{K^2}. \quad (9.20)$$

Тогда потери по длине определяются по формуле

$$\Delta h_\ell = i\ell = \frac{Q^2}{K^2} \ell. \quad (9.21)$$

Учитывая, что $i = \Delta h_\ell / \ell$, имеем

$$Q = K \sqrt{\frac{\Delta h_\ell}{\ell}} = \frac{K}{\sqrt{\ell}} \sqrt{\Delta h_\ell}.$$

Обозначив $P = K / \sqrt{\ell}$, получим окончательно

$$Q = P \sqrt{\Delta h_\ell}, \quad (9.22)$$

где P – проводимость, выражающая собой расход жидкости при $\Delta h_\ell = 1$.

Сравнивая выражения (9.17) и (9.22), найдем связь между P и S . Из выражения (9.17) имеем

$$Q = \sqrt{\Delta h_\ell / S}.$$

Тогда

$$P \sqrt{\Delta h_\ell} = \sqrt{\frac{\Delta h_\ell}{S}} \text{ или } P = \frac{1}{\sqrt{S}}; S = \frac{1}{P^2}. \quad (9.23)$$

Значения A и K приводятся в гидравлических справочниках.

Общая задача гидравлического расчета трубопроводов заключается в определении диаметров труб для пропускa заданного расхода воды и напора, необходимого для подачи воды ко всем точкам водоразбора при оптимальных затратах.

При расчете затрат учитывают расход средств на строительство и эксплуатацию трубопровода.

Например, если принять при расчете высокие скорости движения воды, то за счет этого можно уменьшить диаметры труб, но увеличатся потери напора по длине, что приведет в процессе эксплуатации к большим затратам электроэнергии.

Рекомендации по выбору оптимальных скоростей движения жидкости в трубопроводах приводятся в СНиПах.

При решении инженерных задач четыре величины – расход Q , скорость V , диаметр трубопровода d и потери напора Δh – являются переменными и взаимосвязанными. Их связывают между собой уравнения Бернулли и неразрывности (расхода), потери по длине трубопровода и на местных сопротивлениях, которые учитываются по формулам (9.10) и (9.11) соответственно.

Определенность решения задач гидравлического расчета трубопроводов достигается при следующих условиях:

1. Задается расход воды.
2. Принимаются оптимальные скорости движения воды.

Наряду с общей задачей гидравлического расчета трубопроводов решаются следующие частные задачи:

1. Проверяется пропускная способность трубопровода при заданных значениях диаметров труб и напора.
2. Определяется напор при заданных значениях диаметров труб и расхода воды.

Рассмотрим определение напора по схеме, представленной на рис. 9.1.

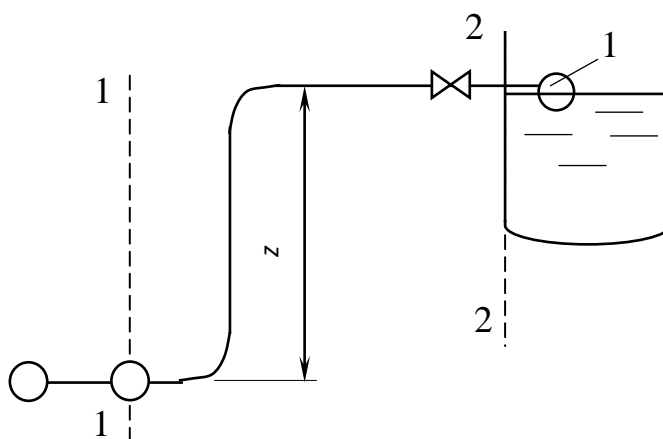


Рис. 9.1

Применяя уравнение Бернулли, для сечений 1–1 и 2–2 запишем:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2}, \quad (9.24)$$

где $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $\frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$, так как величина скоростных напоров городского водопровода мала и ею можно пренебречь ($V_1 \approx V_2$) (на практике эта разность около 5 см)

Тогда уравнение (9.24) примет вид

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + z + \Delta h_{1-2}, \quad (9.25)$$

где $p_1 / \rho g$ – величина пьезометрического напора в сечении 1–1. Он расходуется для подъема воды на высоту z и на преодоление гидравлических сопротивлений в трубопроводе Δh_{1-2} , $p_2 / \rho g$ – свободный напор, необходимый для преодоления местного сопротивления клапана 1 и создания скорости излива воды в бак.

Свободный напор в местах водоразбора принимается в пределах 1...4 м и обозначается $H_{\text{св}}$.

Тогда уравнение Бернулли (9.25) можно записать так:

$$H = H_{\text{св}} + z + \Delta h_{1-2}. \quad (9.26)$$

Для определения напора в любом сечении трубопровода необходимо знать:

- разность геометрических отметок z между наиболее высоко расположенным водоразбором и данным сечением потока; если точка потребления расположена ниже заданного сечения, то z принимается со знаком минус;
- уровень свободного напора $H_{\text{св}}$ в высшей точке водоразбора;
- уровень потерь напора на гидравлических сопротивлениях по пути движения воды от заданного сечения до наиболее удаленной точки водоразбора.

Так как разность отметок z и свободный напор обычно задаются, то для определения требуемого напора производится расчет потерь напора, связанных с гидравлическим сопротивлением трубопровода.

3. Напор задан. Определяются диаметры труб таким образом, чтобы выполнялось условие

$$H_{\text{тр}} = H_{\text{св}} + z + \Delta h_{1-2}. \quad (9.27)$$

9.3. Метод расчета простых трубопроводов

Применение тех или иных методов расчета напорных трубопроводов обусловлено конструктивными характеристиками и их назначением.

При расчете простого трубопровода находится расчетная зависимость из уравнения Бернулли и уравнения расхода, а также из формулы для учета потерь по длине и на местных сопротивлениях.

Рассмотрим две основные расчетные схемы: истечение в атмосферу и истечение под уровень.

Схема истечения в атмосферу показана на рис. 9.2.

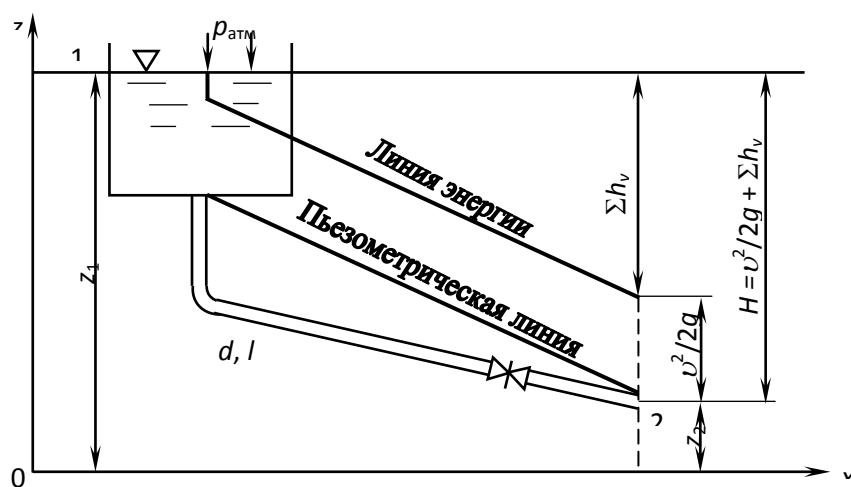


Рис. 9.2

Напишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \sum \Delta h_{1-2}, \quad (9.28)$$

где $H = z_1 - z_2$; $\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{ат}}{\rho g}$; $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$; $\frac{V_1^2}{2g} \approx 0$.

Тогда

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + \sum \Delta h_{1-2}, \quad (9.29)$$

где $\sum \Delta h_{1-2} = \frac{V_2^2}{2g} \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi_i \right)$ – сумма потерь по длине и местных сопротивлений.

Подставляя последнее выражение в (9.29), получим зависимость:

$$H = \frac{V_2^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi_i \right). \quad (9.30)$$

Схема истечения под уровень показана на рис. 9.3.

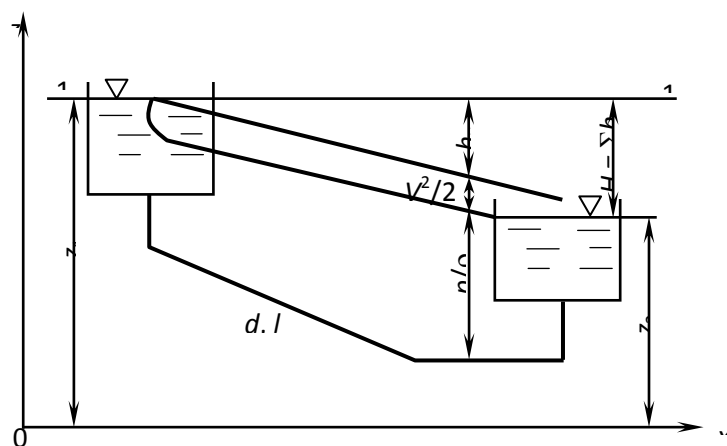


Рис. 9.3

Напишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \sum \Delta h_{1-2}, \quad (9.31)$$

где $H = z_1 - z_2$; $\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{ат}}{\rho g}$; $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$; $\frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} = 0$.

Тогда

$$H = \sum \Delta h_{1-2}, \quad (9.32)$$

где

$$\sum \Delta h_{1-2} = \lambda \frac{\ell}{2g} \cdot \frac{V^2}{2g} + \xi \frac{V^2}{2g} + \frac{(V - V_2)^2}{2g}. \quad (9.33)$$

В выражении (9.33) два последних члена представляют собой потери на местных сопротивлениях, причем последнее слагаемое определяет потери напора при внезапном расширении и вычисляется по теореме Борда.

Решая совместно уравнения (9.32) и (9.33) и учитывая, что $V_2^2 / 2g = 0$, получим

$$H = \frac{V^2}{2g} \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi_i + 1 \right). \quad (9.34)$$

Сопоставляя уравнения (9.30) и (9.34), можно видеть, что по форме написания они совершенно тождественны.

Различие между уравнениями по физическому смыслу заключается лишь в том, что единица, стоящая в скобках правой части уравнения (9.30), относится к скоростному напору на выходе потока из трубы в атмосферу.

Следовательно, единица определяет кинетическую энергию, которую поток уносит с собой и которая может быть в дальнейшем использована для совершения работы.

При истечении под уровень единица в скобках в уравнении (9.34) определяет собой потерянный напор на внезапное расширение при входе потока из трубы в резервуар.

Следовательно, при истечении под уровень вся энергия, которой располагает поток, расходуется только на преодоление сопротивлений.

При расчете простого трубопровода решаются три основные задачи:

Первая задача. Требуется определить необходимый действующий напор H для трубопровода длиной ℓ , м, диаметром d , м, для пропуска расхода Q .

Решение сводится к прямому вычислению напора по формуле (9.30).

Коэффициенты λ и ξ могут быть связаны с числом Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{Qd}{F\nu},$$

где Q и d заданы по условию задачи.

Вторая задача. Требуется определить расход Q при заданных H , ℓ и d .

Расход определяется из уравнения расхода $Q = VF$ и выражения (9.30). При совместном решении получаем формулу для вычисления расхода:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi_i}}. \quad (9.35)$$

Для определения λ и ξ необходимо знать скорость V или искомый расход, поэтому Q можно найти по формуле (9.35) методом попыток или графоаналитическим способом, путем использования формулы (9.30) и построения графика $H = f(Q)$ (рис. 9.4).

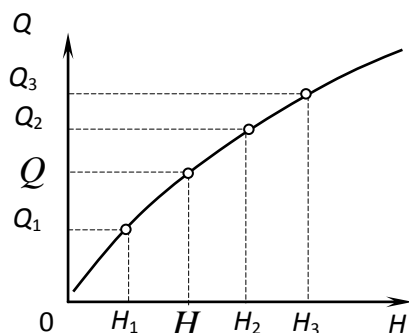


Рис. 9.4

Задаваясь значениями Q_1, Q_2, \dots, Q_n , по формуле

$$H = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} \left(1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum \xi \right)$$

вычисляем ряд значений H_1, H_2, \dots, H_n .

Третья задача. Требуется определить диаметр трубопровода d по заданным H, Q , и ℓ .

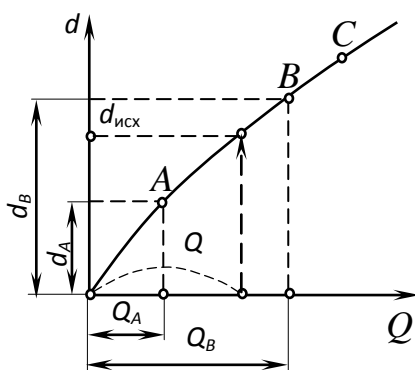


Рис. 9.5

Диаметр трубопровода d определяется графоаналитическим способом. Строится кривая $d = F(H)$: задаваясь рядом значений d_1, d_2, \dots, d_n , вычисляем H_1, H_2, \dots, H_n (рис. 9.5). При этом для каждой точки графика вычисление H_1, H_2, \dots, H_n проводится без подбора, так как при каждом d_1, d_2, \dots, d_n число Рейнольдса вычисляется непосредственно по формуле $Re = Qd / Fv$.

Замечание 1. Для длинных трубопроводов, когда потерями на местных сопротивлениях можно пренебречь, все три основные задачи решаются на основе использования формулы

$$H = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{8Q^2 \ell}{g\pi^2 d^5}. \quad (9.36)$$

Следовательно, методика расчета сохраняется, но расчёты значительно упрощаются.

Замечание 2. При квадратичном законе сопротивления, т.е. когда λ , а также коэффициент Шези C не зависят от Re , расчёт можно выполнить по формуле

$$H = \frac{Q^2}{K^2} \ell. \quad (9.37)$$

Первые две задачи сводятся к прямому вычислению их по формуле (9.37), причём K определяется по таблицам по заданному диаметру d .

Для решения третьей задачи (определить d по данным H , Q и ℓ) сначала вычисляется по формуле (9.37) необходимое значение K , по которому затем из таблиц находится ближайшее большее и ближайшее меньшее значения K_1 и K_2 ($K_1 > K > K_2$), и по технико-экономическим условиям принимается d .

9.4. Методики расчета сложных трубопроводов

Гидравлический расчет трубопроводов производят по методикам:

- 1) удельных гидравлических сопротивлений;
- 2) удельных потерь напора на трение;
- 3) приведенного коэффициента местного сопротивления на трение;
- 4) приведения местных сопротивлений к линейным.

Для упрощения гидравлического расчета используют обобщенные гидравлические параметры трубопровода:

- удельное линейное сопротивление трубопровода $A = 8\lambda / g\pi^2 d^5$;
- линейное сопротивление трубопровода $S = A\ell$;
- расходную характеристику трубопровода, или модуль расхода, т.е. $K^2 = 1/A$;
- проводимость трубопровода $P^2 = 1/S$.

Последние два параметра связаны между собой выражением $K = P\sqrt{\ell}$.

Для гидравлического расчета трубопроводов используются приведенные формулы и в зависимости от задания определяются по таблицам значения A , S , K или P .

Рассмотрим **последовательное соединение трубопроводов** разных диаметров (рис. 9.6).

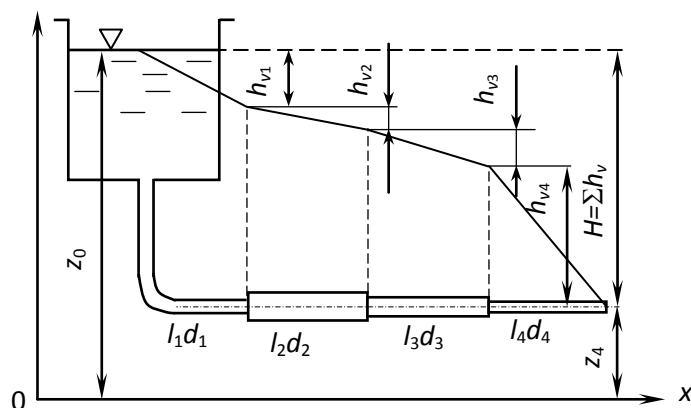


Рис. 9.6

Пренебрегая местными потерями, потери по длине можно определить по формулам

$$\Delta h_{дл i} = Q^2 \ell_i / K_i^2 \text{ или } \Delta h_{дл i} = A_i Q^2 \ell_i. \quad (9.38)$$

Потери напора в трубопроводе получают путем суммирования потерь напора, определенных на каждом отдельном участке:

$$\sum \Delta h_{дл} = \Delta h_{дл 1} + \Delta h_{дл 2} + \Delta h_{дл 3} + \Delta h_{дл 4}.$$

С учетом приведенных формул (9.38), получим

$$\sum \Delta h_{дл} = Q^2 \left(\frac{\ell_1}{K_1^2} + \frac{\ell_2}{K_2^2} + \frac{\ell_3}{K_3^2} + \frac{\ell_4}{K_4^2} \right)$$

или

$$\sum \Delta h_{дл} = Q^2 (A_1 \ell_1 + A_2 \ell_2 + A_3 \ell_3 + A_4 \ell_4).$$

Для области квадратного сопротивления можем написать

$$\Delta h_{дл} = Q^2 (S_1 + S_2 + S_3 + S_4),$$

т.е.

$$\Delta h_{дл} = Q^2 \sum S,$$

где $\sum S = S_c$ – сопротивление системы трубопроводов.

Таким образом, систему с последовательным соединением трубопроводов можно рассматривать как один простой трубопровод, сопротивление которого равно сумме сопротивлений отдельных, последовательно соединенных трубопроводов разного диаметра.

Используя формулу (9.38) и учитывая, что весь напор H затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений, т.е. $H = \sum h_v$, можно решить обратную задачу, а именно: при заданных

$H, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ и d_1, d_2, d_3, d_4 определить пропускную способность всей системы по формуле

$$Q = \sqrt{\frac{H}{S_c}} = \sqrt{\frac{H}{\sum_1^4 \left(\frac{\ell}{K^2} \right)}}$$

Рассмотрим вариант **параллельного соединения трубопроводов**.

Из рис. 9.7 видно, что в узловой точке A поток жидкости в магистрали делится на четыре потока в ветвях 1–4, которые объединяются в точке B , образуя далее продолжение магистрального трубопровода.

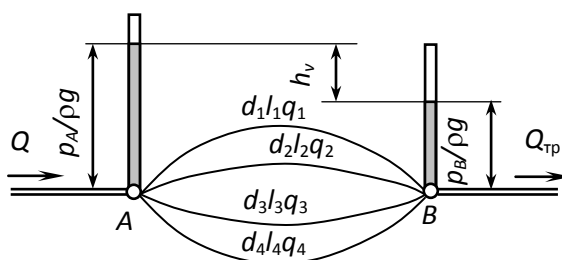


Рис. 9.7

Основной задачей является определение расхода каждой ветки $q_1...q_4$ и потеряннного напора $\Delta h_{дл}$ на пути от точки A до точки B .

Решение задачи основано на том, что напоры H_A и H_B в узловых точках являются общими для каждой из веток, а их разность

$$\Delta H = H_A - H_B \quad (9.39)$$

представляет одну и ту же потерю напора $\Delta h_{дл}$ одновременно для каждой из веток.

Учитывая, что

$$\Delta H = \frac{Q^2}{K^2} \ell = Q^2 A_1 \ell = \frac{Q^2}{P^2},$$

можно записать следующую систему равенств:

$$\left. \begin{aligned} \Delta H &= \frac{Q_1^2}{K_1^2} \ell_1 = \frac{Q_2^2}{K_2^2} \ell_2 = \frac{Q_3^2}{K_3^2} \ell_3 = \frac{Q_4^2}{K_4^2} \ell_4; \\ \Delta H &= Q_1^2 A_1 \ell_1 = Q_2^2 A_2 \ell_2 = Q_3^2 A_3 \ell_3 = Q_4^2 A_4 \ell_4; \\ \Delta H &= \frac{Q_1^2}{P_1^2} = \frac{Q_2^2}{P_2^2} = \frac{Q_3^2}{P_3^2} = \frac{Q_4^2}{P_4^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.40)$$

В системе (9.40) имеем (для каждого из трех выражений ΔH) четыре уравнения (по числу веток) и пять неизвестных величин, из них четыре неизвестных расхода $Q_1 \dots Q_4$ и один неизвестный потерянный напор ΔH .

Для замыкания системы (9.40) требуется ещё одно уравнение, которое может быть уравнением узловых расходов, а именно:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4. \quad (9.41)$$

Рассмотрим определение неизвестных величин с учетом выражений ΔH в системе уравнений (9.40).

Выразим расходы Q_2, Q_3, Q_4 через расход Q_1 и получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= Q_1 \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}; \quad Q_3 = Q_1 \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_3}}; \quad Q_4 = Q_1 \frac{K_4}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_4}}; \\ Q_2 &= Q_1 \frac{A_2 \ell_2}{A_1 \ell_1} = Q_1 \frac{S_2}{S_1}; \quad Q_3 = Q_1 \frac{A_3 \ell_3}{A_1 \ell_1} = Q_1 \frac{S_3}{S_1}; \quad Q_4 = Q_1 \frac{A_4 \ell_4}{A_1 \ell_1} = Q_1 \frac{S_4}{S_1}; \\ Q_2 &= Q_1 \frac{P_2}{P_1}; \quad Q_3 = Q_1 \frac{P_3}{P_1}; \quad Q_4 = Q_1 \frac{P_4}{P_1}. \end{aligned} \right\} \quad (9.42)$$

В соответствии с системой равенств (9.42) получим

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_1 \left(1 + \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} + \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_3}} + \frac{K_4}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_4}} \right); \\ Q &= \frac{Q_1}{S_1} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4); \\ Q &= \frac{Q_1}{P_1} (P_1 + P_2 + P_3 + P_4). \end{aligned} \right\} \quad (9.43)$$

Из выражений (9.43) находим расход Q_1 :

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(1 + \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} + \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_3}} + \frac{K_4}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_4}}\right)};$$
$$Q_1 = \frac{QS_1}{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)};$$
$$Q_1 = \frac{QP_1}{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)}.$$
(9.44)

Значения Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 найдём из выражений (9.42). Потерянный напор ΔH находится по одному из равенств (9.40), например:

$$\Delta H = \frac{Q_1^2}{K_1^2} \ell_1 \text{ или } \Delta H = Q_1^2 A_1 \ell_1, \text{ или } \Delta H = \frac{Q_1^2}{P_1^2}.$$

В водопроводных сетях потери напора на местные сопротивления, кроме некоторых случаев, незначительны по сравнению с линейными потерями. Поэтому при большом напоре их не принимают во внимание. При расчёте внутренних водопроводов на линейные потери напора вводят поправочный коэффициент K_M , учитывающий местные сопротивления:

$$\Delta h_{\text{дл}} = K_M \sum_1^n \Delta h_{\ell},$$

где $\sum_1^n \Delta h_{\ell}$ – сумма линейных потерь напора на всех последовательно (по ходу воды) расположенных участках водопровода от начального до самого удаленного.

Только при очень ограниченном напоре местные сопротивления определяются расчётом.

Такой случай может быть, например, при питании внутреннего водопровода от бака, установленного в здании.

Расчёт потерь производится по формуле

$$\sum \Delta h_{\text{дл}} = \Delta h_{\ell} + \Delta h_M = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g} + \sum_1^n \xi \left(\frac{V^2}{2g} \right) = \left[\left(\frac{\lambda}{d} \right) \ell + \sum_1^n \xi \right] \frac{V^2}{2g}, \quad (9.45)$$

где $\sum_1^n \xi \left(\frac{V^2}{2g} \right)$ – сумма потерь напора на местных сопротивлениях.

Из уравнения расхода выразим скорость $V = 4Q / \pi d^2$ и, подставив в формулу (9.45), получим

$$\Delta h_{\text{дл}} = \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi \right) \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} = BQ^2, \quad (9.46)$$

где $B = \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi \right) \frac{8}{2g\pi^2 d^4}$ – характеристический коэффициент или гидравлическая характеристика трубопровода.

Она выражает суммарные сопротивления в трубопроводе длиной ℓ при единичном расходе.

Принимая с некоторой погрешностью $\lambda/d = \text{const}$, независимо от диаметра трубопровода, при одних и тех же значениях Q , $\sum \xi$ и l , найдём отношение B_1/B для диаметров d/d_1 из формулы (9.46):

$$\frac{B_1}{B} = \frac{d^4}{d_1^4} \quad (9.47)$$

или

$$\frac{B_1}{B} = \frac{H_p}{h_v} = \frac{d^4}{d_1^4}, \quad (9.48)$$

где H_p – заданный напор (располагаемый).

Отсюда $d_1 = d \cdot \sqrt[4]{h_v / H_p}$ или в общем виде

$$d_1 = d \cdot \sqrt[4]{\frac{H}{H_1}}. \quad (9.49)$$

Из формулы (9.49) следует, что диаметры труб изменяются обратно пропорционально корню четвёртой степени из величины напора или потерь напора.

Пусть напор увеличился в 2 раза: $H_1 = 2H$, тогда

$$d_1 = d \cdot \sqrt[4]{0,5} = 0,84d.$$

Новый расчётный диаметр d_1 будет на 16 % меньше предыдущего d .

10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ, МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

10.1. Основные положения

Решение дифференциальных уравнений гидродинамики охватывает ограниченный круг задач. В ряде случаев аналитическое решение сопряжено со значительными математическими трудностями. В частности, не всегда можно получить удовлетворительный результат и с помощью численных методов. В таких случаях на помощь приходят экспериментальные методы исследования.

Цель этих исследований состоит в том, чтобы получить данные, необходимые для расчета других процессов, родственных изучаемому.

Эксперименты проводятся на специально создаваемых лабораторных установках, моделирующих определенным образом исследуемые устройства и протекающие в них физические процессы.

Известны физический и математический методы моделирования.

При физическом моделировании исследуемая модель обычно выполняется в меньшем масштабе, чем оригинал (натура), и воспроизводит изучаемое явление с сохранением его физической природы.

Математическое моделирование осуществляется путем изучения явлений, имеющих иное, чем исследуемый процесс, физическое содержание, но описываемых аналогичными математическими уравнениями.

10.2. Законы механического подобия

Полученные на модели результаты опытных исследований обобщаются и затем переносятся на натуру. Выполнение этой процедуры требует знаний законов, связывающих между собой величины, полученные при исследованиях на модели, и соответствующие им величины в натуре.

Эти законы называются законами подобия. Они устанавливают определенные соотношения между геометрическими размерами, кинематическими и динамическими характеристиками потоков в модели и натуре.

Законы подобия подробно изучаются в специальных курсах теории подобия и моделирования.

Следует отметить, что теория подобия имеет большое теоретическое и практическое значение не только для моделирования различных явлений и процессов, но и прежде всего для научного обоснования экспериментальных исследований, обработки их результатов и построения на их основе рациональных эмпирических формул.

Динамическое или вообще физическое подобие является обобщением геометрического подобия.

Рассмотрим способы получения масштабных коэффициентов для геометрического, кинематического и динамического подобия.

10.2.1. Геометрическое подобие

Пусть имеем натурный объект (поток) (рис. 10.1), подлежащий гидродинамическому исследованию, и его модель.

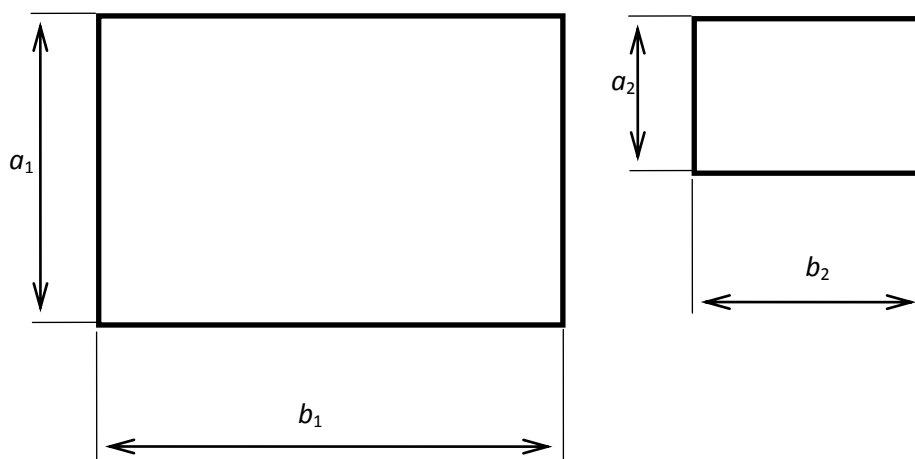


Рис. 10.1

Обозначим геометрические размеры объекта (натурного потока) индексом 1, а модельного – индексом 2.

Чтобы получить область течения в модели, геометрически подобную натурному потоку, разделим все линейные размеры натурного потока на некоторое число k , которое называется линейным масштабом. Таким образом получаем связь между геометрическими размерами a_1 и a_2 , b_1 и b_2 в виде равенств:

$$\frac{a_1}{a_2} = k \text{ и } \frac{b_1}{b_2} = k. \quad (10.1)$$

Линейные размеры, связанные соотношением (10.1), называют ответственными, или сходственными. Точки, координаты которых удовлетворяют этому соотношению, называют сходственными.

Безразмерные координаты сходственных точек одинаковы.

Обычно за единицу измерения всех линейных величин в соответствующих потоках принимают L_1 (натура), L_2 (модель) и находят линейный масштаб k_ℓ :

$$\frac{L_1}{L_2} = k_\ell. \quad (10.2)$$

Для площадей и объемов соответственно имеем:

$$\frac{F_1}{F_2} = k_\ell^2; \quad \frac{W_1}{W_2} = k_\ell^3. \quad (10.3)$$

Очевидно, что для геометрических подобных потоков необходима пропорциональность соответствующих площадей и объемов.

10.2.2. Кинематическое подобие

Кинематическое подобие обязательно включает в себя геометрическое подобие, т.е. для кинематического подобия необходимо, чтобы траектории частиц обоих потоков были подобны геометрически.

Кроме того, для кинематически подобных потоков отрезки траекторий соответствующих частиц натурального и модельного потоков, а также отрезки времени, в течение которых протекают соответствующие процессы в натуре и в модели, должны быть пропорциональны.

Другими словами, если в первом потоке (натуре) частицы проходят путь L_1 за время t_1 , то во втором потоке (модели) – путь L_2 за t_2 .

Причем, отрезки L_1 и L_2 должны быть геометрически подобны, а отношение t_1/t_2 должно быть одинаковым для сходственных точек обоих потоков.

Отношение t_1/t_2 называется масштабом времени и обозначается kt . Например, для скоростей частиц жидкости в сходственных точках потока получаем следующие выражения:

$$V_1 = \frac{L_1}{t_1}, \quad V_2 = \frac{L_2}{t_2}.$$

Тогда

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1}{t_1} \cdot \frac{t_2}{L_2} = \frac{L_1 \cdot t_2}{L_2 \cdot t_1} = \frac{k_\ell}{k_t}.$$

Очевидно, что

$$k_v = \frac{V_1}{V_2} = \frac{k_\ell}{k_t}.$$

Аналогично находим масштаб ускорений:

$$k_a = \frac{k_\ell}{k_t^2}.$$

Таким образом, скорости и ускорения в сходственных точках потока связаны соотношениями

$$V_1 = k_v V_2; \quad a_1 = k_a a_2. \quad (10.4)$$

10.2.3. Динамическое подобие

Динамическое подобие обязательно включает в себя геометрическое и кинематическое подобия. В любых потоках, если физическая природа действующих на жидкость сил одинакова и силы образуют геометрически подобные силовые многоугольники, они являются динамически подобными.

В динамически подобных потоках отношение одноименных сил в сходственных точках в натуре и на модели постоянны, т.е.

$$\frac{P_1}{P_2} = k_p = \text{const}, \quad (10.5)$$

где P – любая сила, в том числе и равнодействующая; k_p – масштабный коэффициент сил или масштаб сил.

К силам, действующим в потоке жидкости, можно отнести силы: внутреннего трения жидкости, тяжести, поверхностного натяжения и др.

Для динамически подобных потоков отношение плотностей жидкости в натуре и на модели должно быть постоянным:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = k_\rho = \text{const}. \quad (10.6)$$

Обозначим действующие в сходственных точках натурального и модельного потоков силы P_1 и P_2 соответственно. По закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение:

$$P = ma,$$

где m – масса жидкости; a – ускорение.

Учитывая, что масса равна произведению плотности на ее объем $m = \rho W$, где $W = L^3$, тогда $m = \rho L^3$.

Ускорение определяется приращением скорости $V = \ell / t$ в единицу времени t , т.е. $a = \ell / t^2$.

Следовательно,

$$P = ma = \rho \ell^3 \left(\frac{\ell}{t^2} \right) = \frac{\rho \ell^4}{t^2} = \rho V^2 \ell^2. \quad (10.7)$$

Таким образом, для динамического подобия необходимо, чтобы силы находились в соотношении

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1 V_1^2 \ell_1^2}{\rho_2 V_2^2 \ell_2^2} = k_p = k_p k_v^2 k_\ell^2. \quad (10.8)$$

Выражение (10.8) является математическим выражением общего закона динамического подобия, впервые сформулированным Ньютоном.

Преобразуем выражение (10.8) к виду

$$\frac{P_1}{\rho_1 V_1^2 \ell_1^2} = \frac{P_2}{\rho_2 V_2^2 \ell_2^2} = \text{idem}. \quad (10.9)$$

Следовательно, $P / \rho V^2 \ell^2 = \text{Ne}$ – критерий Ньютона, являющийся обобщенным критерием динамического подобия механических систем.

В гидродинамических исследованиях во многих случаях оказывается невозможным найти количественные оценки действующих внешних сил, а, следовательно, и их равнодействующей. Поэтому при изучении гидравлических явлений часто выделяют только одну силу, а действием остальных пренебрегают. В этом случае применяют частные критерии Рейнольдса, Фруда, Вебера и др.

10.3. Гидродинамические критерии подобия

Рассмотрим порядок получения критериев, в которых учитывается действие тех или иных сил.

1. Рассмотрим движение вязкой жидкости по горизонтальному трубопроводу. В этом случае решающее значение имеют силы внутреннего трения.

По гипотезе Ньютона эти силы могут быть выражены следующим образом:

$$P = \mu S \frac{dV}{dn} \quad \text{или} \quad P = \mu \ell^2 \left(\frac{V}{\ell} \right) = \mu V \ell. \quad (10.10)$$

Для натурального и модельного потоков получим отношение вида

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\mu_1 V \ell_1}{\mu_2 V_2 \ell_2}. \quad (10.11)$$

Приравнивая правую часть отношения (10.11) к полученному выше основному уравнению динамического подобия, получим

$$\frac{\rho_1 V_1^2 \ell_1^2}{\rho_2 V_2^2 \ell_2^2} = \frac{\mu_1 V \ell_1}{\mu_2 V_2 \ell_2}. \quad (10.12)$$

Преобразуем выражение (10.12) к виду

$$\frac{\rho_1 V_1 \ell_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 V_2 \ell_2}{\mu_2}.$$

Заменяя отношение μ/ρ кинематической вязкостью ν , получим

$$\frac{V_1 \ell_1}{\nu_1} = \frac{V_2 \ell_2}{\nu_2} = \text{idem} \quad (10.13)$$

Отсюда критерий Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{V \ell}{\nu}, \quad (10.14)$$

где ℓ – характерный размер, в частном случае – диаметр трубы:

$$\text{Re} = \frac{V d}{\nu}. \quad (10.15)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае критерием динамического подобия является число Рейнольдса и условие подобия (10.13). Это равносильно тому, что число Re одинаково для обоих потоков.

Физический смысл критерия Рейнольдса заключается в том, что он характеризует отношение силы инерции к силе трения (вязкости).

Рассмотрим движение по трубопроводу неньютоновской вязкопластичной жидкости при определении сил внутреннего трения, которые в этом случае обусловлены как вязкими, так и пластичными ее свойствами. Тогда необходимо учитывать напряжение сдвига τ_0 , а именно:

$$P = \left(\tau_0 + \frac{\mu V}{\ell} \right) \ell^2 = \tau_0 \ell^2 + \mu V \ell. \quad (10.16)$$

Запишем уравнение (10.8) с учетом уравнения (10.16):

$$\frac{\rho V_1^2 \ell_1^2}{\rho_1 V_2^2 \ell_2^2} = \frac{\tau_{01} \ell_1^2 + \mu_1 V_1 \ell_1}{\tau_{02} \ell_2^2 + \mu_2 V_2 \ell_2}.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{\rho_1 V_1^2}{\tau_{01} + \mu_1 V_1 \ell_1} = \frac{\rho_2 V_2^2}{\tau_{02} + \mu_2 V_2 \ell_2}.$$

Тогда

$$\frac{\frac{V_1 \ell_1 \rho_1}{\mu_1}}{1 + \frac{\tau_{01} \ell_1}{V_1 \mu_1}} = \frac{\frac{V_2 \ell_2 \rho_2}{\mu_2}}{1 + \frac{\tau_{02} \ell_2}{V_2 \mu_2}},$$

где $V \ell \rho / \mu = \text{Re}$ – критерий Рейнольдса для ньютоновской жидкости;
 $\tau_0 \ell / V \mu = \text{Sen}$ – критерий Сен-Венана (Ильюшина), характеризующий
пластические свойства жидкости.

Окончательно можно записать:

$$\frac{\text{Re}_1}{1 + \text{Sen}_1} = \frac{\text{Re}_2}{1 + \text{Sen}_2} = \text{idem}. \quad (10.17)$$

2. Если влияние вязкости жидкости незначительно и движение
жидкости преимущественно обусловлено действием сил тяжести, то
в основное уравнение динамического подобия (10.8) вместо силы P на-
до подставить значение силы тяжести:

$$P = mg = \rho \ell^3 g, \quad (10.18)$$

где $m = \rho W = \rho \ell^3$ – масса жидкости; g – ускорение тяжести.

Запишем уравнение (10.8) с учетом формулы (10.18):

$$\frac{\rho_1 V_1^2 \ell_1^2}{\rho_2 V_2^2 \ell_2^2} = \frac{\rho_1 \ell_1^3 g_1}{\rho_2 \ell_2^3 g_2}$$

или после сокращений

$$\frac{V_1^2}{g_1 \ell_1} = \frac{V_2^2}{g_2 \ell_2} = \text{idem}. \quad (10.19)$$

Соотношение (10.19) называется законом подобия Фруда,
а $F_r = V^2 / g \ell$ – критерием Фруда. Он характеризует отношение силы
инерции к силе тяжести.

Критерий Фруда применяется при моделировании большинства гидротехнических сооружений, истечении жидкости через водосливы, при изучении волнового сопротивления, испытываемого движущимися кораблями.

Если преобладающее влияние имеет сила поверхностного напряжения (например при истечении жидкости из капиллярных отверстий), то в уравнение (10.8) вместо силы P следует подставить выражение силы поверхностного натяжения:

$$P = p\ell^2 = \frac{\sigma}{\ell}\ell^2 = \sigma\ell. \quad (10.20)$$

Тогда имеем

$$\frac{\rho_1 V_1^2 \ell_1^2}{\rho_2 V_2^2 \ell_2^2} = \frac{\sigma_1 \ell_1}{\sigma_2 \ell_2}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\rho_1 V_1^2 \ell_1}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 V_2^2 \ell_2}{\sigma_2} = \text{idem}. \quad (10.21)$$

Соотношение (10.21) называется законом подобия Вебера, а выражение $We = \frac{\rho V^2 \ell}{\sigma}$ – критерием Вебера, который характеризует отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения.

Контрольные вопросы и задания

1. Раскройте сущность физического моделирования.
2. Какова роль математического моделирования?
3. Что называется законами механического подобия?
4. В чем заключается сущность геометрического, кинематического и динамического подобия?
5. Что такое коэффициенты подобия?
6. Что такое критерий Ньютона?
7. Каков физический смысл критерия Рейнольдса?
8. Каков физический смысл критерия Фруда?
9. Каков физический смысл критерия Вебера?
10. Что характеризует критерий Сен-Венана (Ильюшина)?

Литература

1. Шищенко Р.И., Есьман Б.И. Практическая гидравлика в бурении. – М.: Недра, 1966. – 318 с.
2. Есьман Б.И. Термогидравлика при бурении скважин. – М.: Недра, 1982. – 247 с.
3. Гукасов Н.А., Кочнев А.М. Гидравлика в разведочном бурении. – М.: Недра, 1982. – 247 с.
4. Эйрих Ф. Реология. Теория и приложения. – М., 1962. – 824 с.
5. Рабинович Е.З., Евгеньев А.Е. Гидравлика. – М.: Недра, 1987. – 225 с.
6. Альтшуль А.Д. Местные гидравлические сопротивления при движении вязких жидкостей. – М.: Гостоптехиздат, 1962. – 115 с.
7. Альтшуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П. Гидравлика и аэродинамика: учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1987. – 414 с.
8. Примеры расчета по гидравлике: учеб. пособие для вузов / под ред. А.Д. Альтшуля. – М.: Стройиздат, 1976. – 255 с.
9. Брюховецкий О.С. Основы гидравлики. – Недра, 1991. – 156 с.
10. Шищенко Р.И. Гидравлика глинистых растворов. – Баку: Азнефтеиздат, 1951. – 152 с.
11. Симонов В. В. Экспериментальные исследования коэффициентов расхода жидкости при движении через промывочные сопла долот // Известия вузов. Нефть и газ. – 1958. – № 8. – С. 31–36.
12. Кулиев С., Есьман Б.И., Абдинов М. Вопросы гидравлики глинистых и цементных растворов. – Баку: Азернефтнешр, 1963.
13. Козодой А.К. О конструкции и расположении насадок в гидромониторных долотах // Известия вузов. Нефть и газ. – 1959. – № 6.
14. Пирвердян А.М., Адонин А.Н. Вопросы гидравлики и работоспособности глубинного насоса. – Баку: Азнефтеиздат, 1955.
15. Мительман Б.И. Справочник по гидравлическим расчетам в бурении. – М.: Гостоптехиздат, 1963. Есьман И.Г. Гидравлика. М.: Недра, 1952. – 229 с.
16. Башлык С.М., Коваленко А.В., Загибайло Г.Т. Основы гидравлики и промывочные жидкости. – М.: Наука, 1992. – 247 с.
17. Мирзаджанзаде А.Х. Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. – Баку: Азернефтнешр, 1959.
18. Фукс Г.И. Вязкость и пластичность нефтепродуктов. – М.: Гостоптехиздат, 1951. – 165 с.
19. Козодой А.К., Зубарев А.В., Федоров В.С. Промывка скважин при бурении. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 235 с.



20. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа : учебник. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
21. Валуева Е.П., Свиридов В.Г. Введение в механику жидкости : учеб. пособие. – М.: Изд-во МЭИ, 2001. – 212 с.
22. Медведев В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: учеб. пособие. – Минск: Высшая школа, 1998. – 311 с.
23. Павленко В.Г. Основы механики жидкости. – Л.: Судостроение, 1988. – 240 с.
24. Сборник задач по машиностроительной гидравлике / ред. М.И. Куколевского, Л.Г. Подвиза. – М.: Машиностроение, 1972. – 120 с.
25. Чугаев Р.Р. Гидравлика; Техническая механика жидкости: учебник. – 4-е изд., доп. и перераб. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 672 с.
26. Попов Д.Н., Панайоти С.С., Рябинин М.В. Гидромеханика: учебник. – М.: Изд-во МГТУ, 2002. – 365 с.
27. Штеренлихт Д.В. Гидравлика: учебник для вузов: в 2 кн. – М.: Энергоатомиздат, 1991.





Учебное издание

БУЛЬБА Елена Евгеньевна
ЗИЯКАЕВ Григорий Ракитович

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Учебное пособие

В авторской редакции

Верстка *А.А. Цыганкова*

**Зарегистрировано в Издательстве ТПУ
Размещено на корпоративном портале ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати Формат 60×84/16.

Бумага «Снегурочка». Печать Хероx.

Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 5,68.

Заказ . Тираж экз.



Национальный исследовательский
Томский политехнический университет
Система менеджмента качества



Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru

