**Цель работы:** Получить навыки математического моделирования различных процессов.

**Задание:** Исследовать динамическую систему, заданную математической моделью

 **(1)**

**Выполнение работы:**

Уравнение  нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Перепишем в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$y=\frac{dx}{dt}$ , тогда $\left\{\begin{array}{c}\frac{dy}{dt}=ω\_{0}^{2}\sin(\left(x\right))+γy,\\\frac{dx}{dt}=y.\end{array}\right.$

В особых точках правые части этой системы обращаются в ноль, поэтому система уравнений для определения особых точек ($x\_{0},y\_{0}$) имеет вид:

 $y\_{0}=0$ , $ω\_{0}^{2}\sin(\left(x\_{0}\right))+γy\_{0}=$0 . Откуда $y\_{0}=0$ и уравнение для $x\_{0}$:

 $\sin(\left(x\_{0}\right))=0,$ поэтому особых точек бесконечное число и они имеют вид $y\_{0}^{(n)}=0, $ $x\_{0}^{(n)}=πn$, где n- любое число. (Решение $\sin(x=0) :x=πn, n\in Z$).

Исследуем характер особых точек в линейном приближении. Система уравнений

$\frac{dx}{dt}=f\_{1}(x,y)$, $\frac{dy}{dt}=f\_{2}(x,y)$ **(2)**

В окрестности особой точки ($x\_{0},y\_{0}$) сопоставляется линеаризованная система

$\left\{\begin{array}{c}\frac{dx^{'}}{dt}=ax^{'}+by^{'},\\\frac{dy^{'}}{dt}=cx^{'}+dy^{'}.\end{array}\right.(4)$ , где $a=\frac{∂f\_{1}}{∂x}(x\_{0},y\_{0})$, $b=\frac{∂f\_{1}}{∂y}(x\_{0},y\_{0})$, $c=\frac{∂f\_{2}}{∂x}(x\_{0},y\_{0})$, $d=\frac{∂f\_{2}}{∂y}(x\_{0},y\_{0})$.

Для заданного уравнения $f\_{1}=y, f\_{2}=ω\_{0}^{2}\sin(\left(x\right))+γy$, поэтому a = 0, b = 1, $c=ω\_{0}^{2}\sin(\left(x\_{0}\right))$, $d= γ.$

*Таблица №1.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Условия** | **Тип особой точки** | **Вид фазовых траекторий** |
| \* | и - действительные числа разного знака, особая точка - «седло» (неуст.) | Гиперболы |
|  | и - пара мнимых корней, особая точка - «центр» (уст.) | Эллипсы |
|  | и - оба действительных положительных корня, особая точка - «узел» (неуст.) | Параболы |
|  | и - оба действительных отрицательных корня, особая точка - «узел» (уст.) | Параболы |
|  | и - комплексно-сопряженные корни с действительной положительной частью, особая точка - «фокус» (неуст.) | Спирали |
|  | и - комплексно-сопряженные корни с действительной отрицательной частью, особая точка - «фокус» (уст.) | Спирали |

Далее характер особой точки определяется собственными значениями матрицы $\left(\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}\right)$.

Так как $cos\left(x\_{0}^{(n)}\right)=\cos(\left(πn\right))=(-1)^{n}=\left\{\begin{array}{c}1 при чётных n\\-1 при нечетных n\end{array}\right.$

То рассматриваем два случая.

**1-ый.**  Особая точка $x\_{0}=πn, y\_{0}=0,$ где n – чётное целое.

Тогда $с=ω\_{0}^{2}\sin(\left(x\_{0}\right))=ω\_{0}^{2}$. Найдём собственные значения матрицы

$$\left(\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0&1\\ω\_{0}^{2}&γ\end{matrix}\right)$$

По формуле  **(5)**

Имеем: $λ\_{1,2}=\frac{γ^{2}}{2}\pm \sqrt{\frac{γ^{2}}{4}+ω\_{0}^{2}}$ Очевидно, при любом $γ $ $λ\_{1}$ и $λ\_{2}$ - действительные числа разных знаков(считаем$ ω\_{0}^{2}>0, это $

$$же считали при нахождении особых точек, иначе, при$$

$ ω\_{0}, будет вырожденный $случай, когда вся линия y=0 – особые точки).

Этот случай соответствует верхней строке таблицы (неравенство $ad-bc<0$ выполнено, так как $ad-bc=-ω\_{0}^{2}$), поэтому в линейном приближении характер рассматриваемых особых точек: «седло» (неустойчивая), траектории гиперболы.

Согласно пункту 4 из методички характер особой точки исходной нелинейной системы совпадает с найденным характером особой точки линеаризованной системы (для нелинейной системы – не «центр», а «седло» и ни одного из $λ\_{1}$ и $λ\_{2}$ не равно нулю).

**2-ой.**  Особая точка $x\_{0}=πn, y\_{0}=0,$ где n – нечётное целое.

Тут $с=ω\_{0}^{2}\sin(\left(x\_{0}\right))=-ω\_{0}^{2}$. Собственные значения матрицы

$$\left(\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0&1\\-ω\_{0}^{2}&γ\end{matrix}\right)$$

Имеет вид

$$λ\_{1,2}=\frac{γ}{2}\pm \sqrt{\frac{γ^{2}}{4}-ω\_{0}^{2}}$$

Так как теперь число под корнем может быть любого знака, в зависимости от соотношения между $γ и ω^{2}\_{0}$, рассматриваем варианты.

1. При $γ^{2}\geq 4ω\_{0}^{2}$ имеем: $λ\_{1}$ и $λ\_{2}$ - вещественные числа одного знака (т.е. не нулевые, в частности).

а) при $γ>0: λ\_{1}$ и $λ\_{2}$ – положительные. Согласно таблице из методички : особая точка – «узел», траектории- параболы (неустойчивый). Согласно пункту 4 в методичке это относится и к линеаризованной и к нелинейной системе.

б) при $γ<0: λ\_{1}$ и $λ\_{2}$ – отрицательные. Этот случай – третья строка снизу таблицы из методички. Согласно пункту 4 из методички получаем одинаковый характер особой точки линейной и нелинейной систем – тот же что в а), с тем отличием что здесь «узел» устойчивый.

1. При $γ^{2}<4ω\_{0}^{2}$ В этом случае $λ\_{1}$ и $λ\_{2}$ – комплексно сопряженные друг другу.

а) $γ>0 Действительная часть λ\_{1}$ и $λ\_{2}$ $>0=>$ вторая строчка в таблице в методичке. Согласно пункту 4 из методички характер особой точки нелинейной системы совпадают с характером особой точки линейной системы: неустойчивый «фокус», траектории – спирали.

б) при $γ<0:действительная часть λ\_{1}$ и $λ\_{2}$ $<0=>$. Этот случай – первой строка снизу таблицы из методички. Все как в пункте а), только «фокус» - неустойчивый.

в) $γ>0 λ \_{1}$ и $λ\_{2}$ – чисто мнимые, случай строки пять снизу в таблице. Для линейной системы – устойчивый «центр», траектории – эллипсы. Для нелинейной: по пункту 4 из методички – либо «центр», либо «фокус».