к 51
547

Экземпляров 16

ПЗВ М

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский технический университет связи и информатики
Кафедра вычислительной математики и программирования

Головацкая А. П.

Сборник заданий для курсовой работы

по курсу

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

для студентов-заочников 3 курса
(специальность 230201)

Москва 2010

УДК 51
Г 547

Перед выполнением работы рекомендуется изучить теоретический материал, включая приведенные примеры и схемы алгоритмов, примеры подготовки к выполнению работы.

Результаты решения и вывод промежуточных значений оформлять в виде таблиц с необходимыми комментариями.

При составлении программы решения той или иной задачи следует включить в текст программы сведения об авторе: фамилия, имя, отчество, номер студенческого билета,номер варианта.

Рекомендуется пользоваться средствами модульного программирования на языке QB. Программа должна состоять из главной (основной) и выбранного модульного средства: процедуры, процедуры-функции и т.п. Необходимо указать имена и назначение каждого модуля с перечнем входных и выходных параметров.

Результаты решения и вывод промежуточных значений оформлять в виде таблиц с необходимыми комментариями.

Номер варианта определяется двумя последними цифрами номера студенческого билета.

Список литературы

1. **Банди Б.** Методы оптимизации. – М.: Радио и связь, 1988. – 128с.
2. **Гловацкая А.П.** Методы и алгоритмы вычислительной математики. – М.: Радио и связь, 1999. – 408с.
3. **Гловацкая А.П.** Информатика. Вычислительная математика. Конспект лекций. – М.,2002.
4. **Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики. Учебное пособие для вузов.– М.: Физматгиз, 1966. – 639с.
5. **Моисеев Н. И., Иванилов Ю.П., Столярова Е. М.** Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352с.
6. **Гловацкая А.П.** Методические указания по выполнению лабораторных работ по курсу «Вычислительная математика». – М.,2006.

УДК 519.6+681.3.06:800[Quik Basic]

1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задание

1. Ознакомиться с теоретическими основами применяемых методов.
2. Выбрать вариант задания из табл. 4.
3. Провести исследование задания (отделение корней; проверка выполнения условий сходимости вычислительного процесса, в случае расходящегося процесса – последовательность шагов для обеспечения сходимости; выбор начального приближения; формулировка условий окончания этапа уточнения корня).
4. Составить схему алгоритма уточнения корня. Составить на языке Quick Basic программу решения уравнения и вычислить x_1, x_2 методами итерации, Ньютона, хорд.
5. Провести оценку погрешности результата.

Содержание отчета

1. Название работы.
2. Задание. Исследование задания.
3. Схема алгоритма метода уточнения корня.
4. Программа решения задачи. Результаты решения.
5. Контроль правильности решения (к примеру, в системе Math CAD).

Пример выполнения задания

Задание

Решить уравнение $f(x) = 1 - 3x + \cos x = 0$ методами итерации, Ньютона, хорд. Составить схему алгоритма уточнения корня. Получить решение по программе на языке Quick Basic. Провести оценку погрешности результата.

Исследование задания

Отделение корней можно провести аналитическим и графическим способами.

При графическом способе отделения корней следует построить графики функций $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = 3x - 1$, затем определить отрезок, содержащий точку пересечения графиков (Рис.1).

Обратимся к аналитическому способу отделения корней.

Определим знаки функции $f(x)$.

x	-1	0	1
$sign\ f(x)$	+	+	–

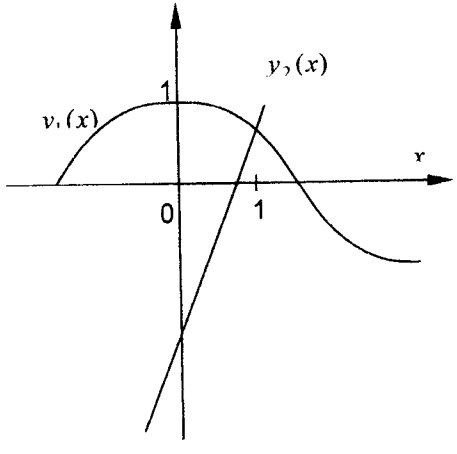

Рис.1

На отрезке [0; 1] функция $f(x)$ меняет знак, следовательно, на отрезке существует хотя бы один корень уравнения. Убедимся, что корень единственный. $f'(x) = -3 - \sin x$, $f''(x) = -\cos x$.

Для любого x из отрезка [0; 1] $f'(x) < 0$ и $f''(x) < 0$.

Так как $f(0) \cdot f(1) < 0$ и на отрезке функция $f'(x)$ сохраняет знак, то уравнение $1 - 3x + \cos x = 0$ имеет единственный корень, принадлежащий отрезку [0; 1].

- При уточнении корня методом итерации приводят уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$. Для сходимости процесса итерации необходимо, чтобы $|\varphi'(x)| < 1$, $x \in [a; b]$. Укажем прием получения функции $\varphi(x)$, если условие сходимости не выполнено.

Построим функцию $\varphi(x) = \lambda f(x) + x$, l - некоторый параметр. Если $f'(x) > 0$, то $-\frac{1}{r} < l < 0$, если $f'(x) < 0$, то $0 < l < \frac{1}{r}$, $r = \max(|f'(a)|, |f'(b)|)$. Такой выбор параметра λ позволяет обеспечить выполнение условий сходимости. Начальное значение в методе итерации – произвольное значение из отрезка $[a; b]$.

Рекуррентная формула метода итерации $x_{n+1} = j(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Погрешность результата, вычисленного методом итерации, оценивается по формуле:

$$|x^* - x_n| \le \frac{mq^n}{1-q}, \quad m = |x_0 - \varphi(x_0)|, \quad q = \max|\varphi'(x)| \quad \text{при } x \in [a; b].$$

Воспользуемся указанным правилом выбора параметра λ.

$f'(x) < 0$, следовательно, $0 < \lambda < \frac{1}{r}$, $0 < \lambda < 0{,}26$. Полагаем λ=0,25. Пусть $x_0 = 0$ - начальное значение. Рекуррентная формула $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Таким образом, $x_{n+1} = 0{,}25(1 + x_n + \cos x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$

Результаты решения уравнения методом итерации в таблице 1.

Таблица 1

n	x	$f(x)$
0	0	2
1	0.5	0.3775826
2	0.5943956	$4.530019 * 10^{-2}$

Оценим погрешность результата, вычисленного методом итерации. m = 0,5 , $\varphi'(x) = 0{,}25(1 - \sin x)$, q = 0,25.

При $n = 2$, $|x^* - 0{,}5943956| \le 0{,}04$.

• Рекуррентная формула уточнения корня методом Ньютона - Рафсона $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0,1,\ldots$

Достаточные условия сходимости метода:

а) $f(a)f(b) < 0$, б) $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны, знакопостоянны и отличны от нуля на отрезке $[a;b]$.

Начальное значение x_0 для метода Ньютона-Рафсона выбирается из условия $f(x_0)\cdot f''(x) > 0$.

Оценка погрешности метода Ньютона-Рафсона:

$\left|x^* - x_n\right| \le \frac{M_2(x_n - x_{n-1})^2}{2m_1}$, M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$,

m_1 - наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке [a;b].

Проверим выполнение достаточных условий сходимости метода для рассматриваемого уравнения.

Выше был определен отрезок $[0;1]$, где выполнены условия

а) f(0)·f(1) < 0, б) f'(x) и f''(x) знакопостоянны и отличны от нуля.

Из условия $f(x_0)\cdot f''(x) > 0$ выбирается начальное значение $x_0 = 1$.

Рекуррентная расчетная формула:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - 3x_n + \cos x_n}{-3 - \sin x_n}, \quad n = 0,1,\ldots.$$

Результаты вычислений методом Ньютона-Рафсона в таблице 2.

Таблица 2

n	x	f(x)
0	1	-1.459698
1	0.620016	$-4.617877 \cdot 10^{-2}$
2	0.6071206	$-6.778597 \cdot 10^{-5}$

Оценим погрешность второго приближения (таблица 2).

$m_1 = |f'(0)| = 3$, $M_2 = |f''(0)| = 1$, $|x^* - x_2| \le \frac{M_2(x_2 - x_1)^2}{2m_1}$, $|x^* - x_2| \le 0{,}00003$.

• Уточнение корня методом хорд. Рекуррентные формулы имеют вид:

- в случае, если неподвижна точка a: $x_0 = b$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad n = 0,1,\ldots.$$

- в случае, если неподвижна точка b: $x_0 = a$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_b) - f(x_n)}(b - x_n), \quad n = 0,1,\ldots.$$

Неподвижен тот конец отрезка $[a;b]$, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной. Для сходимости метода необходимо знакопостоянство $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Оценку погрешности можно проводить по любой из формул $\left|x^* - x_n\right| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}$,

или $\left|x^* - x_n\right| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|$, m_1 и M_1-наименьшее и наибольшее значения $|f'(x)|$ на отрезке. Выше было показано, что $f''(x) < 0$ на отрезке [0;1]. Неподвижной точкой является $x = b = 1$, так как $f''(x)\cdot f(1) > 0$. Таким образом, полагая $x_0 = 0$, получим сходящуюся последовательность приближений к корню по формуле $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(1) - f(x_n)}(1 - x_n)$. Результаты решения методом хорд.

Таблица 3

n	x	f(x)
0	0	2
1	0.378035	0.10381
2	0.605938	0.00408

Варианты заданий

Таблица 4

№вар.	Уравнение	№вар.	Уравнение
1	$2 - x = \ln x$	31	$x = \sqrt{\lg(x+2)}$
2	$x^2 + 4\sin x = 0$	32	$\sin 0{,}5x + 2 = (x/2)^2$
3	$tg\,(0{,}36x + 0{,}4) = x^2$	33	$2 = 0{,}5x + \log(x - 1)$
4	$1 + \lg x = 0{,}5$	34	$\sin(0{,}5 + x) = 2x - 0{,}5$
5	$2\lg x - x/2 + 1 = 0$	35	$\lg(2 + x) + x^2 = 3$
6	$x - \sin x = 0{,}25$	36	$\lg(1 + 2x) = 2 - x$
7	$\lg(0{,}4x + 0{,}4) = x^2$	37	$\ln(x/6) + \sqrt{x} = 0$

Окончание табл. 4

8	$\sqrt{x} - \cos 0{,}387x = 0$	38	$\log_2(x) = 1/(x+2)$
9	$\lg x - 7/(2x+6) = 0$	39	$e^x = 2 - x^2$
10	$tg(0{,}5x + 0{,}2) = x$	40	$2e^x = x^2 - 2$
11	$3x - \cos x - 1 = 0$	41	$2x^2 - e^{x/2} = 0$
12	$x + \lg x = 0{,}5$	42	$2\,arctg\,x - 3x + 2 = 0$
13	$1{,}8x^2 - \sin 10x = 0$	43	$\sin(x - 0{,}5) - x + 0{,}8 = 0$
14	$ctg\,1{,}05x - x^2 = 0$	44	$(x-3)^2 \lg(x-2) = -2$
15	$x \lg x - 1{,}2 = 0$	45	$x + 3 + \cos x - x^2 = 0$
16	$2x - x \lg x - 7 = 0$	46	$(x-1)^2 \lg(x+11) = 1$
17	$x + \cos x = 1$	47	$e^{2x} \cos(2x) + x = 0$
18	$x + \lg(1 + x) = 1{,}5$	48	$x^2 \cos 2x = -1$
19	$2\sin(x - 0{,}6) = 1{,}5$	49	$(2 - x)\,2^x = 1$
20	$\lg(1 + 2x) = 2 - x$	50	$(x-2)^2 - 1 = 2^x$
21	$\lg(x)/(x+1)^2 = 0$	51	$e^x + x + 1 = 0$
22	$\sqrt{x+1} = 1/x$	52	$0{,}5^x - 3 = (x+2)^2$
23	$3x + \cos x + 1 = 0$	53	$(x-2)^2 \lg(x+5) = 1$
24	$2 - x \lg(x) = 0$	54	$(x-4)^2 \log(x-3) = 1$
25	$(x-1)^2 = e^x / 2$	55	$2x^2 - 2^x = 20$
26	$(2 - x)e^x = 0{,}5$	56	$x \log_3(x+1) = 1$
27	$2{,}2x - 2^x = 0$	57	$0{,}5^x - 3 + (x+1)^2 = 0$
28	$5x - 8\log(x) = 8$	58	$2\,arcctg\,x - x + 3 = 0$
29	$x - e^x = 0$	59	$5^x - 6x - 3 = 0$
30	$x = (x+1)^3$	60	$2\cos(x) + x^2 = 3x - 2$

2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК)

1. Выбрать вариант задания из таблицы 8.
2. Провести исследование задания.
3. Выполнить линейную и квадратичную аппроксимацию, для чего:
   - составить систему нормальных уравнений и решить её,
   - определить параметры аппроксимации,
   - вычислить значения аппроксимирующих функций в узловых точках,
   - оценить погрешность.
4. Построить график заданной функции (множество точек) и изо – бразить на графике полученные МНК зависимости.
5. Оценить качество аппроксимации.
6. Проверить полученные результаты с помощью математического пакета.
7. Оформить отчёт.

Содержание отчёта

1. Текст задания.
2. Системы нормальных уравнений и их решения.
3. Результаты аппроксимации $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.
4. Таблицы значений функций $\varphi_1(x_i)$ и $\varphi_2(x_i)$, $i = 0, n$
5. Графические иллюстрации исходной зависимости, функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.
6. Результаты аппроксимации, полученные с помощью математического пакета.
7. Оценки качества аппроксимации.

Пример выполнения задания

Функция $y(x)$ задана таблично.

Таблица 5

x_i	2	3	4	6	7
y_i	8	3	1	2	5

1. Построить аппроксимирующие функции $\varphi_1(x)$ и $j_2(x)$, оценить качество аппроксимации.
2. Изобразить графически исходную и аппроксимирующие функции.

Исследование задания

Если набор экспериментальных данных получен со значительной погрешностью или число узловых точек велико, то аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ можно построить с помощью метода наименьших квадратов. Наиболее распространён способ выбора функции $\varphi(x)$ в виде

$j(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m$, $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \ldots \varphi_m(x) = x^m$ - степенные базисные функции, $m \le n$, $\overline{C}^T = (C_0, C_1, \ldots C_m)$ - вектор коэффициентов, определяемых из условия минимизации $S = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - f(x_i)]^2 \to \min$, $n+1$ - число узловых точек.

Если погрешность исходных данных E, то количество базисных функций выбирается так, чтобы $\sqrt{S} \approx E$.

Условие минимума функции S приводит к системе линейных уравнений относительно параметров $C_0, C_1, \dots C_m$ - системе нормальных уравнений, её матрица называется матрицей Грама.

$$G = \begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \dots & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^m & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \dots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

-столбец правых частей системы нормальных уравнений $G \cdot \overline{C} = \overline{B}$.

Рассмотрим частные случаи решения.

Пусть требуется аппроксимировать экспериментальные данные линейной функцией (m=1, n+1 – количество узловых точек). $\varphi(x) = C_0 + C_1 x$.

Система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot \sum x_i^2 + C_0 \cdot \sum x_i = \sum (x_i y_i), \\ C_1 \cdot \sum x_i + C_0 \cdot (n+1) = \sum y_i. \end{cases}$$

Обозначим: $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{n+1}$, $\overline{y} = \dfrac{\sum y_i}{n+1}$. $x_i' = x_i - \overline{x}$, $y_i' = y_i - \overline{y}$,

$\overline{x}, \overline{y}$ - средние значения табличных данных. $C_1 = \dfrac{\sum x_i' y_i'}{\sum (x_i')^2}$, $C_0 = \overline{y} - C_1 \overline{x}$.

В случае применения метода наименьших квадратов для определения коэффициентов эмпирической формулы, имеющей вид алгебраического многочлена второй степени $\varphi(x) = C_0 + C_1(x) + C_2 x^2$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (n+1)C_0 + (\sum x_i)C_1 + (\sum x_i^2)C_2 = \sum y_i, \\ (\sum x_i)C_0 + (\sum x_i^2)C_1 + (\sum x_i^3)C_2 = \sum x_i y_i, \\ (\sum x_i^2)C_0 + (\sum x_i^3)C_1 + (\sum x_i^4)C_2 = \sum x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Качество аппроксимации можно оценить, подсчитав среднее квадратическое отклонение:

- для линейной аппроксимации $S_1 = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=0}^{n} (y_i - C_0 - C_1 x_i)^2}{n+1}}$;
- для квадратичной аппроксимации $S_2 = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=0}^{n} (y_i - C_0 - C_1 x_i - C_2 x_i^2)^2}{n+1}}$.

Составим и решим системы нормальных уравнений (исходные данные в таблице 5)

Таблица 6

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$
1	2	8	16	4	8	16	32
2	3	3	9	9	27	81	27
3	4	1	4	16	64	256	16
4	6	2	12	36	216	1296	72
5	7	5	35	49	343	2401	245
$\sum$	22	19	76	114	658	4050	392

Для линейной функции $\varphi_1(x) = C_0 + C_1 x$ система нормальных уравнений $\begin{cases} 114C_1 + 22C_0 = 76, \\ 22C_1 + 5C_0 = 19. \end{cases}$ Получаем $\varphi_1(x) = 5.744 - 0.442\,x$.

Система нормальных уравнений для квадратичной функции

$\varphi_2(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$ имеет вид $\begin{cases} 5C_0 + 22C_1 + 114C_2 = 19, \\ 22C_0 + 114C_1 + 658C_2 = 76, \\ 114C_0 + 658C_1 + 4050C_2 = 392. \end{cases}$

Решая систему, получим $\varphi_2(x) = 22.507 - 9.299x + 0.974x^2$.

Таблица значений аппроксимирующих функций в узловых точках

Таблица 7

x_i	2	3	4	6	7
y_i	8	3	1	2	5
$\varphi_1(x_i)$	4.86	4.418	3.976	3.092	2.65
$\varphi_2(x_i)$	7.805	3.376	0.895	1.777	5.14
$y_i - \varphi_1(x_i)$	3.14	-1.118	-2.976	-1.092	2.35
$y_i - \varphi_2(x_i)$	0.195	-0.376	0.105	0.223	-0.14

Погрешность линейной аппроксимации $S_1 = 2.343$, погрешность квадратичной аппроксимации $S_2 = 0.228$.

Приведенные расчеты показали, что для рассматриваемой функции предпочтительнее квадратичная аппроксимация, так как $S_2 << S_1$.

Варианты заданий

Таблица 8

№вар.	x	y	№вар.	x	y
1	2,3,4,6,7	8,3,1,2,5	31	5,6,7,8	8,3,1,2 5
2	1,3,5,8,9	6,3,1,2,4	32	3,4,7,9,10	6,3,1,2,4
3	3,4,6,8,9	4,2,1,1,2	33	4,6,8,9,10	4,2,1,1,2
4	1,4,6,8,9	0,6,7,5,3	34	3,5,7,9,11	0,6,7,5,3
5	0,2,3,5,7	6,8,8,7,4	35	2,4,5,7,8	6,8,8,7,4
6	0,2,4,6,8	4,2,1,2,5	36	2,3,5,7,9	4,2,1,2,5
7	3,4,5,8,9	5,3,2,2,4	37	4,5,7,9,11	5,3,2,2,4
8	0,1,3,5,6	0,4,8,4,1	38	1,3,4,6,7	0,4,8,4,1
9	3,4,5,6,7	3,1,0,2,5	39	5,6,7,8,9	3,1,0,2,5
10	2,3,5,8,9	3,5,6,5,3	40	3,4,6,9,11	3,5,6,5,3
11	2,3,4,6,7	6,3,1,3,7	41	3,4,6,7,8	6,3,1,3,7
12	1,2,4,6,7	5,3,0,2,4	42	2,3,5,8,9	5,3,0,2,4
13	0,2,4,7,9	5,3,1,3,5	43	1,3,6,8,11	5,3,1,3,5
14	1,2,4,5,6	6,4,2,3,5	44	2,4,5,7,9	6,4,2,3,5
15	0,1,3,4,5	9,5,2,3,6	45	2,3,5,7,10	9,5,2,3,6
16	1,2,3,5,6	6,4,2,3,7	46	3,4,5,6,8	6,4,2,3,7
17	3,4,6,8,9	3,5,6,5,4	47	5,6,7,10,11	3,5,6,5,4
18	3,4,6,7,9	9,4,1,2,9	48	2,4,5,8,11	9,4,1,2,9
19	0,2,5,8,9	0,4,7,6,4	49	1,3,6,10,11	0,4,7,6,4
20	2,3,5,7,9	5,4,3,4,7	50	3,4,7,9,10	5,4,3,4,7
21	2,3,4,5,6	4,7,8,7,3	51	4,5,6,7,8	4,7,8,7,3
22	1,3,5,8,9	4,1,0,2,4	52	2,5,6,9,10	4,1,0,2,4
23	2,3,4,5,6	7,5,4,5,8	53	3,5,7,8,11	7,5,4,5,8
24	0,2,4,6,9	8,7,2,1,4	54	2,3,5,8,10	8,7,2,1,4
25	0,1,2,3,4	3,1,1,3,8	55	1,3,3,4,7	3,1,1,3,8
26	3,5,6,9,9	0,4,5,1,0	56	4,6,8,10,11	0,4,5,1,0
27	2,3,4,6,7	0,3,4,2,1	57	4,5,6,7,8	0,3,4,2,1
28	4,5,6,7,9	8,4,1,0,4	58	6,7,8,8,10	8,4,1,0,4
29	0,2,4,6,8	6,3,2,3,7	59	1,4,5,8,10	6,3,2,3,7
30	0,2,4,7,9	2,5,7,5,1	60	2,4,6,9,11	2,5,7,5,1

3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Задание

1.Выбрать вариант задания из таблицы 13.

2.Выполнить линейную и квадратичную интерполяцию функции $y = f(x)$, для чего:

- выбрать вид интерполяционного многочлена (Лагранжа или Ньютона);
- для многочлена Ньютона выбрать значение x_0, для многочлена Лагранжа указать последовательность значений $x_0, x_1, \ldots$ из предписанного множества узлов (таблица 13);
- составить программу решения задачи интерполяции;
- вычислить значение интерполирующих многочленов в точке $x = a$ для многочлена Ньютона и в точке $x = b$ для многочлена Лагранжа.

3.Построить интерполяционный многочлен второй степени в явном виде,

- вычислить значения построенного многочлена в узлах интерполяции, записать результаты в виде таблицы;
- оценить погрешности интерполяции по формулам практической оценки погрешности.Результаты записать в таблицу 9

4.Построить график зависимости погрешности от числа узлов.

Таблица 9

Число узлов $n+1$	$P_n(a)$	$L_n(b)$	Оценка погрешности	
			Метод Ньютона $\lvert R_n(a)\rvert$	Метод Лагранжа $\lvert R_n(b)\rvert$
2	$P_1(a)$	$L_1(b)$	$\lvert R_1(a)\rvert$	$\lvert L_2(b) - L_1(b)\rvert$
3	$P_2(a)$	$L_2(b)$	$\lvert R_2(a)\rvert$	$\lvert L_3(b) - L_2(b)\rvert$

Содержание отчета

1. Название работы. Индивидуальное задание.
2. Для многочлена Ньютона указать значение x_0, для многочлена Лагранжа последовательность значений $x_0, x_1, \ldots, x_4$.
3. Программа решения задачи с комментариями.
4. Таблица результатов (9) и таблица вычисленных значений построенного многочлена в узлах интерполяции.

Пример выполнения лабораторной работы

Задание

Выполнить линейную и квадратичную интерполяцию таблично заданной функции $y = f(x)$.

Таблица 10

x	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
$y = f(x)$	0,8881	1,0265	1,1752	1,3366	1,5095	1,6963

Вычислить значения интерполирующей функции в точках $a = 0.58$ и $b = 0.62$. Оценить погрешность интерполяции.

Исследование задания

Шаг таблицы постоянный, поэтому можно построить интерполяционный многочлен Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) + \ldots, \qquad q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Ближайший к точке $x = a$ узел слева $-x = 0.55$, поэтому полагаем $x_0 = 0.55$. Для линейной интерполяции следует взять узлы $x_0 = 0{,}55$, $x_1 = 0{,}60$. Для квадратичной интерполяции последовательность узлов $x_0 = 0{,}55$ $x_1 = 0{,}60$ $x_2 = 0{,}65$ (число узлов равно $n+1$, где n - порядок интерполирующего многочлена). Погрешность можно оценить по формуле: $R_n(a) = \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0$.

Получим таблицу конечных разностей. Таблица11

x	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,55	1,0265	0,1487	0,0127	-0,0012	0,0036
0,60	1,1752	0,1614	0,0115	0,0024	
0,65	1,3366	0,1729	0,0139		
0,70	1,5095	0,1868			
0,75	1,6963				

Построим $P_1(x)$ и вычислим $P_1(a)$. $P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}q$,

$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0{,}55}{0{,}05}$. При $x = a = 0{,}58$ и $q = 0{,}6$

$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{0{,}05}(x - 0{,}55) = 1{,}0265 + 2{,}974(x - 0{,}55)$. $P_1(0{,}58) = 1{,}1157$.

Аналогично вычисляется $P_2(0{,}58)$.

$$|R_1(a)| = \left|\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0\right|. \qquad |R_1(0{,}58)| = \left|\frac{0{,}6(-0{,}4)}{2!}0{,}0127\right| = 1{,}524\cdot 10^{-3}.$$

$$|R_2(a)| = \left|\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0\right| = 6{,}72\cdot 10^{-5}.$$

$$|R_3(a)| = \left|\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0\right| = 1{,}21\cdot 10^{-4}.$$

Анализируя погрешности, можно сделать вывод, что интерполируемая функция близка к квадратичной, так как конечные разности третьего порядка значительно различаются, и погрешность $|R_3(a)| > |R_2(a)|$.

Для данной таблицы можно построить и интерполяционный многочлен Лагранжа, т.к. формула Лагранжа универсальна.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}y_i.$$

Оценку погрешности определяют по формуле: $|f(x) - L_n(x)| < |L_{n+1}(x) - L_n(x)|$.

Для обеспечения большей точности интерполяции перенумеруем узлы интерполяции: $x_0 = 0.60$, (ближайший к точке $b = 0{,}62$) $x_1 = 0.65, x_2 = 0.55, x_3 = 0.70$

Многочлен Лагранжа при $n = 1$ $L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1$.

При $x = b = 0.62$ $L_1(b) = \frac{0{,}62 - 0{,}65}{0{,}60 - 0{,}65}1{,}1752 + \frac{0{,}62 - 0{,}60}{0{,}65 - 0{,}60}1{,}3366 = 1.2398.$

Результаты интерполяции сведены в таблицу 12.

Таблица 12

Число узлов $n+1$	$P_n(a)$	$L_n(b)$	Оценка погрешности	
			Метод Ньютона	Метод Лагранжа
2	1,1157	1,2398	1,52 Ч 10^{-3}	1,53 Ч 10^{-3}
3	1,1142	1,2382	6,72 Ч 10^{-5}	6,70 Ч 10^{-5}
4	1,1141	1,2383	1,21 Ч 10^{-4}	

Для явного построения многочлена Ньютона можно воспользоваться формулами: $P_1(x) = y_0 - \frac{\Delta y_0}{h}\cdot x_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\cdot x$,

$$P_2(x) = \frac{\Delta^2 y_0}{2\cdot h^2}\cdot x^2 + \left(\frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2\cdot h^2}(x_0 + x_1)\right)\cdot x + y_0 - \frac{\Delta y_0}{h}\cdot x_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2\cdot h^2}x_0\cdot x_1,$$

$$P_3(x) = \frac{\Delta^3 y_0}{6\cdot h^3}\cdot x^3 + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2\cdot h^2} - (x_0 + x_1 + x_2)\frac{\Delta^3 y_0}{6\cdot h^3}\right)\cdot x^2 +$$

$$+\left(\frac{\Delta^3 y_0}{6\cdot h^3}(x_0\cdot x_1 + x_0\cdot x_2 + x_1\cdot x_2) + \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2\cdot h^2}(x_0 + x_1)\right)\cdot x -$$

$$-x_0\cdot x_1\cdot x_2\frac{\Delta^3 y_0}{6\cdot h^3} + x_0\cdot x_1\frac{\Delta^2 y_0}{2\cdot h^2} - x_0\frac{\Delta y_0}{h} + y_0,$$

$Dy_0 = y_1 - y_0$, $D^2y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$, $D^3y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$, $h = x_1 - x_0$.

Многочлен Лагранжа в явном виде $L_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.

$$L_1(x) = \frac{y_0 - y_1}{(x_0 - x_1)}\cdot x - \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{(x_0 - x_1)},$$

$$L_2(x)=\left(\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right)\cdot x^2-$$

$$-\left(\frac{(x_1+x_2)y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{(x_0+x_2)y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{(x_0+x_1)y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right)\cdot x+$$

$$+\left(\frac{x_1\,x_2\,y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{x_0\,x_2\,y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{x_0\,x_1\,y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right).$$

Варианты заданий

Таблица13

	x	f(x)	Nвар.	$x=a$	$x=b$
ВАРИАНТЫ 1 - 12	0.0	0.946083	1	0.175	0.715
	0.1	1.028685	2	0.090	0.826
	0.2	1.108047	3	0.157	0.826
	0.3	1.183958	4	0.053	0.866
	0.4	1.256227	5	0.109	0.71
	0.5	1.324684	6	0.094	0.755
	0.6	1.389181	7	0.132	0.755
	0.7	1.389181	8	0.058	0.731
	0.8	1.449592	9	0.063	0.907
	0.9	1.557775	10	0.182	0.717
			11	0.173	0.759
			12	0.129	0.766
ВАРИАНТЫ 13 - 24	0.0	0.962852	13	0.052	0.882
	0.1	1.044824	14	0.147	0.721
	0.2	1.198709	15	0.148	0.822
	0.3	1.270228	16	0.07	0.901
	0.4	1.337904	17	0.124	0.769
	0.5	1.401593	18	0.009	0.944
	0.6	1.461175	19	0.087	0.778
	0.7	1.516552	20	0.051	0.709
	0.8	1.516552	21	0.083	0.887
	0.9	1.567650	22	0.174	0.902
			23	0.172	0.819
			24	0.16	0.851

Окончание табл. 13

ВАРИАНТЫ 25 - 36	0.0	0.979498	25	0.047	0.805
	0.1	1.060831	26	0.104	0.865
	0.2	1.138837	27	0.095	0.861
	0.3	1.213312	28	0.133	0.879
	0.4	1.284076	29	0.069	0.793
	0.5	1.350965	30	0.076	0.702
	0.6	1.413842	31	0.086	0.711
	0.7	1.472590	32	0.045	0.721
	0.8	1.527116	33	0.182	0.729
	0.9	1.577351	34	0.155	0.892
			35	0.118	0.884
			36	0.041	0.839
ВАРИАНТЫ 37 - 48	0.0	0.996021	37	0.143	0.915
	0.1	1.060831	38	0.042	0.825
	0.2	1.154020	39	0.165	0.705
	0.3	1.227768	40	0.126	0.748
	0.4	1.297768	41	0.096	0.891
	0.5	1.363865	42	0.064	0.843
	0.6	1.425925	43	0.071	0.742
	0.7	1.472590	44	0.105	0.711
	0.8	1.537508	45	0.159	0.819
	0.9	1.586879	46	0.161	0.9
			47	0.104	0.852
			48	0.175	0.779
ВАРИАНТЫ 49- 60	0.0	1.623250	49	0.168	0.823
	0.1	1.664792	50	0.177	0.912
	0.2	1.701997	51	0.08	0.91
	0.3	1.734832	52	0.063	0.763
	0.4	1.763404	53	0.159	0.801
	0.5	1.787764	54	0.172	0.815
	0.6	1.808002	55	0.151	0.815
	0.7	1.824230	56	0.168	0.832
	0.8	1.845201	57	0.11	0.731
	0.9	1.845201	58	0.164	0.707
			59	0.041	0.738
			60	0.153	0.862

4.АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Задание

1.Составить программу интегрирования и вычислить указанными методами интеграл $I=\int_a^b f(x)dx$ с точностью $E=0{,}1*10^{1-i}$, $i=1,2,3,4$.

Подынтегральная функция $y=f(x)$ и значения параметров a,b,t,h_0 приведены в таблице 18.

Признак метода интегрирования:

t = 1 – метод средних прямоугольников;

t = 2 – метод трапеций;

t = 3 – метод Симпсона.

2.Результаты вычислений записать в таблицу 14.

3.Построить график зависимости величины шага h от заданной точности.

4.Вычислить интеграл с шагом h_0 и $h_0/2$ (I_{h0} и $I_{h0/2}$).

5.Вычислить погрешность методом двойного просчета с шагами h_0, $h_0/2$.

6.Проверить результат с помощью пакета MathCAD.

7.Оформить отчет.

Содержание отчета

1. Название работы. Индивидуальное задание.
2. Схемы алгоритмов методов интегрирования.
3. Программа решения задачи.
4. Таблица результатов (14), I_{h0}, $I_{\frac{h0}{2}}$, $R=\left|I_{h0}-I_{\frac{h0}{2}}\right|$.
5. График $h(E)$ в логарифмическом масштабе.

Таблица 14

i	E	n	h	I
1	0,1			
2	0,01			
3	0,001			
4	0,0001			

Пример выполнения задания

Задание

1.Требуется вычислить $\int_1^3 \ln x\,dx$ с точностью $E=0{,}1\cdot 10^{1-i}$, $i=1,2,3,4$ методами: средних прямоугольников, трапеций, Симпсона.

2.Вычислить погрешность интегрирования методами двойного просчета и аналитическим. Начальный шаг h = 1.

3.Построить график зависимости h (E).

Исследование задания

Правило Рунге применяют для вычисления погрешности путем двойного просчета интеграла с шагами $h/2$ и h. Погрешность $R=\frac{|I_h-I_{h/2}|}{2^p-1}$. Полагают, что интеграл вычислен с точностью E, если $R<E$.

$I=I_{h/2}+R$, I – уточненное значение интеграла, p – порядок метода.

Таким образом, метод двойного просчета, применённый необходимое число раз, позволяет вычислить интеграл с заданной степенью точности.

- Для вычисления интеграла методом средних прямоугольников используют формулу: $\int_a^b f(x)dx=h\cdot\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha+kh)$, $\alpha=a+\frac{h}{2}$, $n=\frac{b-a}{h}$.

Погрешность интегрирования методом средних прямоугольников – метода второго порядка - может быть вычислена по формуле

$|R|=\frac{(b-a)^3|f''(x^*)|}{24n^2}$. $f''(x^*)$ - наибольшее значение второй производной подынтегральной функции $y=f(x)$ при $x\in[a;b]$.

Значения интеграла $\int_1^3 \ln x\,dx$, вычисленные по формуле средних прямоугольников,приведены в таблице 15.

Таблица 15

E	n	h	I
0.1	8	0,25	1,29756
0.01	16	0,125	1,29627
0.001	32	0,0625	1,29594
0.0001	64	0,03125	1,29586

Оценка погрешности для метода средних прямоугольников: методом двойного просчета: $I_h=1(\ln 1{,}5+\ln 2{,}5)=1{,}321756$.

$I_{h/2}=0{,}5(\ln 1{,}25+\ln 1{,}75+\ln 2{,}25+\ln 2{,}75)=1{,}302645$ $\frac{|I_h-I_{h/2}|}{3}=0{,}00637$.

Аналитическим методом по формуле $|R|\le\frac{(b-a)^3|f''(x^*)|}{24n^2}$.

$|f''(x^*)|=\max|f''(x)|$ при $x\in[1;3]$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $|f''(x^*)|=1$.

При $h=1$, $n=2$ $|R|\le 0{,}0833$.

График зависимости шага интегрирования от точности при использовании метода средних прямоугольников

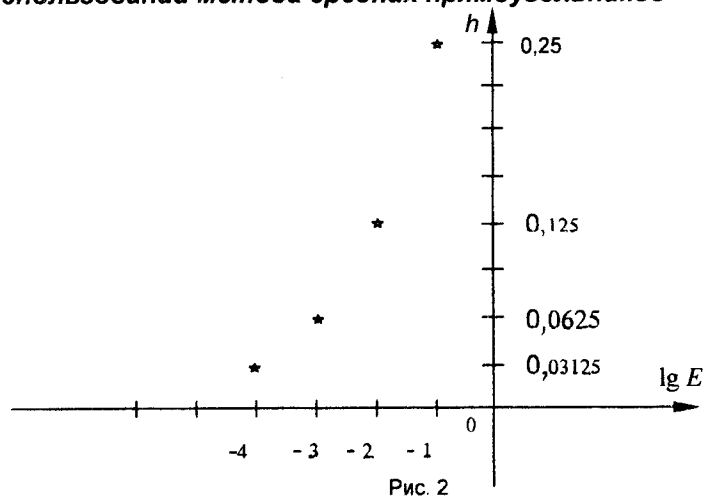

Рис. 2

- Формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) + y_n).$$

Погрешность формулы трапеций (погрешность усечения)

$$|R| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}|\ f''(x^*)\ |,\quad f''(x^*) = \max|\ f''(x)\ |,\quad x, x^* \in [a,b].$$

Значения интеграла,вычисленные по формуле трапеций,в таблице 16.

Таблица 16

E	*n*	*h*	*I*
0.1	4	0,5	1,28211
0.01	16	0,125	1,29497
0.001	32	0,0625	1,29562
0.0001	128	0,015625	1,29582

Оценка погрешности интегрирования по формуле трапеций методом двойного просчета: $I_h = 0{,}5(\ln 1 + 2\ln 2 + \ln 3) = 1{,}24245$

$I_{h/2} = 0{,}25(\ln 1 + 2(\ln 1{,}5 + \ln 2 + \ln 2{,}5) + \ln 3) = 1{,}2821$ $\quad |I_h - I_{h/2}|/3 = 0{,}013218.$

- При интегрировании по методу Симпсона число отрезков, на которые разбивается интервал интегрирования, должно быть четным, т.е. $n = 2m,\quad m = \frac{b-a}{2h}.$ Формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2})],$$

Погрешность формулы Симпсона - метода четвертого порядка:

$$|R| = \frac{(b-a)^5}{180n^4}|\ f^{(IV)}(x^*)\ |,\quad f^{(IV)}(x^*) = \max|\ f^{(IV)}(x)\ |,\quad x, x^* \in [a;b].$$

Значения интеграла, вычисленные по формуле Симпсона,в таблице.17

Таблица 17

E	*n*	*h*	*I*
0.1	2	1	1,2904
0.01	16	0,125	1,24833
0.001	128	0,015625	1,29009
0.0001	1024	0,001953	1,29512

Оценим погрешность интегрирования по формуле Симпсона методом двойного просчета $I_h = \frac{1}{3}(\ln 1 + 4\ln 2 + \ln 3) = 1{,}29040,$

$$I_{h/2} = \frac{1}{6}(\ln 1 + 4(\ln 1{,}5 + \ln 2{,}5) + 2\ln 2 + \ln 3) = 1{,}29532,\ \frac{|I_h - I_{h/2}|}{15} = 0{,}000328.$$

Аналитическая оценка погрешности интегрирования по формуле Симпсона (при h=1, т.е. n=2) :

$$|R| \le \frac{(b-a)^5}{180(n)^4}|f^{(IV)}(x^*)|,\quad |R| \le 0{,}0667.$$

Отметим, что аналитические оценки погрешностей грубее, чем оценки, полученные методом двойного просчета.

Варианты заданий

Таблица 18

№	a	b	t	p	h_0	Подынтегральная функция $y = f(x)$
1	2	3	1		0,25	x - cos(x/3)
2	0	2	2	1	0,5	x + ln(4x) – 1
3	3	4	3	1	0,25	$e^x - 4e^{-x} - 1$
4	2	4	1	3	0,5	$x\,e^x - 2$
5	1	3	2	1	0,5	$4(x^2+1)\ln(x) - 1$
6	0,2	1,2	3	2	0,25	2 – x - sin(x/4)
7	-0,5	0,5	2	3	0,25	$x^2 + \ln(x) - 2$
8	1	2	1	3	0,25	$\cos(x) - (x+2)^{1/2} + 1$
9	1,2	3,2	3	2	0,5	$4(1+x^{1/2})\ln(x) - 1$
10	3,5	5	1	2	0,5	$5\ln(x) - x^{1/2}$
11	0	1	2	1	0,25	$e^x + x^3 - 2$
12	1	2	1	3	0,25	$3\sin(x^{1/2}) + x - 3$

Продолжение табл. 18

13	-1	1	1	2	0,5	$0{,}1\,x^2 - x\ln(x)$
14	-2,5	-1,5	1	3	0,25	$\cos(1 + 0{,}2x^2) - x$
15	-4	-2	3	1	0,5	$3\,x - 4\ln(x) - 5$
16	1	2	2	3	0,25	$\sin(1 - 0{,}2\,x^2) - x$
17	1	2	2	1	0,25	$e^x - e^{-x} - 2$
18	1	3	3	1	0,5	$x - \sin(1/x)$
19	-1	1	1	2	0,5	$e^x + \ln(x) - x$
20	-1,5	0,5	2	3	0,5	$1 - x + \sin(x) - \ln(1+x)$
21	0	2	1	3	0,5	$(1-x)^{1/2} - \cos(1-x)$
22	1	3	3	2	0,5	$\sin(x^2) + \cos(x^2) - 10\,x$
23	1,5	2,5	1	2	0,25	$x^2 - \ln(1+x) - 3$
24	-1	2	2	3	0,75	$\cos(x/2)\ln(x-1)$
25	1	2	3	1	0,25	$\cos(x/5)\,(1+x)^{1/2} - x$
26	1	4	2	3	0,75	$3\,x - e^{-x}$
27	0,4	1,4	1	3	0,25	$4(1+x^{1/2})\ln(x) - 10$
28	-1,4	-0,4	2	1	0,25	$\sin(x) - \cos(x) + 4\,x - 4$
29	3	4	3	2	0,25	$x - 1/(3+\sin(3{,}6x))$
30	1	3	1	3	0,5	$0{,}25\,x^3 + \cos(x/4)$
31	1,2	3,2	3	2	0,5	$8\,e^{-x}\sin(-2x)$
32	3,5	5	1	2	0,5	$e^{-x}\sin(2x)$
33	0	1	2	1	0,25	$x^{3/2} - 2\,x\sin(x)$
34	1	2	1	3	0,25	$e^{-x}\cos(-2x)$
35	-1	1	1	2	0,5	$\cos(2x) + 2\sin(x)$
36	0,2	1,2	3	2	0,25	$8\sin(2x) - x$
37	-0,5	0,5	2	3	0,25	$5\cos(-2x)\,e^{-x}$
38	1	2	1	3	0,25	$x\sin(x+1) - \cos(x-5)$
39	1,2	3,2	3	2	0,5	$8\,(x-1)\,e^{-x^2/2}$
40	3,5	5	1	2	0,5	$\sin(2x) - 2\sin(x)$
41	0	1	2	1	0,25	$\sin(e^x) - e^{-x} + 1$
42	1	2	1	3	0,25	$5x\sin(x+1) + 2\cos(x)$
43	-1	1	1	2	0,5	$5e^{-x} + 4x + x^3/3$
44	-2,5	-1,5	1	3	0,25	$-2\sin(4x)\ln(-x) + 5$
45	-4	-2	3	1	0,5	$\sin(x-1) - x\cos(x+3)$
46	1	2	2	3	0,25	$4\sin(x) - x^{1/2}$
47	1	2	2	1	0,25	$5\sin^3(x) + \cos^3(x)$
48	1	3	3	1	0,5	$\cos(2x+1)\ln(2/x) + 3$
49	-1	1	1	2	0,5	$3\cos(x^2)/\ln(x+5)$

Окончание табл. 18

50	-1,5	0,5	2	3	0,5	$\sin(x^2) + 1/(2-x)$
51	0	2	1	3	0,5	$x\sin(x) + \cos(x) + 5$
52	1	3	3	2	0,5	$-\cos(x) - \cos(2x) - x + 5$
53	1,5	2,5	1	2	0,25	$1+\sin(4x)/\ln(x)$
54	-1	2	2	3	0,75	$(1+x^2)^{1/2} + e^{-x}$
55	1	2	3	1	0,25	$\sin(x+1)\,e^{2/x}$
56	1	4	2	3	0,75	$2\,(1+x)\,e^{-x} - 2\cos(x)$
57	0,4	1,4	1	3	0,25	$-8\sin(-x^3)\,e^{-x}$
58	-1,4	-0,4	2	1	0,25	$-10\sin(x^3)\cos(-x)$
59	3	4	3	2	0,25	$x^2\cos(x+3) - 4$
60	1	3	1	3	0,5	$-\cos(x-5)\,e^{2x/3}$

Примечание: t - номер метода для вычисления интеграла (п.1 задания),
p - номер метода для вычисления интеграла (п.4 и п. 5 задания).

Номера обозначают: t =1 - метод средних прямоугольников,
t=2 - метод трапеций,
t=3 - метод Симпсона.

5.ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задание

1.Найти аналитическое решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$ (из таблицы 21), полагая его точным. Вычислить значения решения $y(x)$ на отрезке $[x_0; b]$ с шагом $h_0/2$.

2.Найти численное решение методом Эйлера заданного уравнения в точках отрезка $[a;b]$ с шагом $h_0/2$. $(y^э(x))$.

3.Вычислить погрешность $E = \left| y(x_i) - y^э(x_i) \right|$ для $x_i = x_0 + i\dfrac{h_0}{2}$,

$i = 0, 1, \ldots, n, \quad n = 2\dfrac{b-a}{h_0}, \quad h_0 = 0.4$.

4.Составить программу интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта 4-го порядка и вычислить решение $y^{pk}(x_i)$ с шагом $h_0/2$.

5.Вычислить погрешность $\Delta = \left| y(x_i) - y^{pk}(x_i) \right|, \quad i = 0, 1, \ldots, n$.

6.Результаты записать в таблицу 19.

7.Дать графическую иллюстрацию решений $y(x)$, $y^э(x)$, $y^{pk}(x)$.

8.Оформить отчет.

Содержание отчета

1. Название работы.Текст задания.
2. Решение уравнения аналитическим методом.
3. Схема алгоритма решения дифференциального уравнения.
4. Программа решения задачи методом Рунге-Кутта.
5. Таблица результатов.
6. Графические иллюстрации решений.

Таблица19

x	$y(x)$	$y^э(x)$	E	$y^{р.к.}(x)$	Δ_i
x_0	$y(x_0)$	$y^э(x_0)$		$y^{р.к.}(x_0)$	
...	...	...	...	...	...
x_n	$y(x_n)$	$y^э(x_n)$	E_n	$y^{р.к.}(x_n)$	Δ_n

Пример выполнения задания

1. Решить дифференциальное уравнение $y' = y,\quad x_0 = 0,\quad y_0 = 1,\quad h = 0.1$, на отрезке [0; 1]

- аналитическим методом (решение $y = y(x)$);
- методом Рунге-Кутта 1-го порядка (методом Эйлера). $(y^э(x))$.
- методом Рунге-Кутта 4-го порядка ($y^{pk}(x)$).

2. Вычислить погрешности $E = \left| y(x_i) - y^э(x_i) \right|,\quad \Delta = \left| y(x_i) - y^{pk}(x_i) \right|$.

3. Результаты записать в таблицу.Построить графики решений.

Исследование решения

Аналитический способ решения данного уравнения – метод разделения переменных.

Запишем уравнение в виде $\frac{dy}{y} = dx$ и проинтегрируем с учетом начальных условий. Получаем $\ln(y) = x + c,\ y = e^{x+c}$. Из начальных условий следует с=0.

Аналитическое решение дифференциального уравнения $y(x) = e^x$.

Расчётная формула метода Эйлера $y_{x+1} = y_x + h \cdot f(x_x, y_x)$

Расчётная формула метода Рунге-Кутта 4-го порядка может иметь различный вид, например:

$$y_{x+1} = y_x + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)\ .$$

$$k_0 = h \cdot f(x_x, y_x),$$
$$k_1 = h \cdot f(x_x + h/2, y_x + k_0/2),$$
$$k_2 = h \cdot f(x_x + h/2, y_ь + k_1/2),$$
$$k_3 = h \cdot f(x_x + h, y_x + k_2).$$

Таблица решений уравнения

Таблица 20

x	$y(x)$	$y^э(x)$	E	$y^{pk}(x)$	Δ
0	1				
0,1	1,1051711	1,1000	0,005171	1,105171	0,0000001
0,2	1,2214026	1,210000	0,011403	1,221403	0,0000004
0,3	1,3498585	1,331000	0,018858	1,349859	0,0000005
0,4	1,4918243	1,4641001	0,027724	1,491825	0,0000007
0,5	1,6487202	1,6105101	0,038211	1,648721	0,0000008
0,6	1,8221179	1,7715611	0,050557	1,822119	0,0000011
0,7	2,0137515	1,9487172	0,065034	2,013753	0,0000015
0,8	2,2255394	2,1435795	0,081960	2,225541	0,0000016
0,9	2,4596014	2,3579478	0,101654	2,459603	0,0000016
1	2,7182798	2,5937426	0,124537	2,718282	0,0000022

В данном случае решение $y(x)$ совпадает с $y^{pk}(x)$.

Оценку погрешности решения методами Рунге-Кутта проводят следующим образом (метод двойного просчета, правило Рунге).

Пусть E - требуемая точность, p - порядок метода.

y_h - решение, полученное с шагом h,

$y_{h/2}$ - решение, полученное с шагом $\frac{h}{2}$.

Если $\frac{|y_h - y_{h/2}|}{2^p - 1} < E$, то можно продолжить решение с шагом $\frac{h}{2}$, полагая

$y(x) = y_{h/2}(x) + \frac{y_{h/2}(x) - y_h(x)}{2^p - 1}$, иначе - уменьшать шаг интегрирования дифференциального уравнения.

Варианты заданий

Таблица 21

№	$f(x)$	x_0	y_0	b	№	$f(x)$	x_0	y_0	b
1	$y^2 \sin x$	0	1	1	31	$3 (\sin x) y$	0	1	1
2	$\cos(x)\ y$	0	1	1	32	$(\cos x)/y$	0	1	1
3	$2x\sqrt{y}$	0	1	1	33	$x\sqrt{y+1}$	0	1	1
4	$(x-1)^2 y^2$	0	1	1	34	$(x-1)^2 y^2/2$	0	1	1
5	$y^2 \cos(x)$	0	-1	1	35	$1.5\, y^2 \cos(x)$	1	1	2
6	$0.5\, y^2$	1	1	2	36	$y^2/4$	1	1	2
7	$y^2 x$	0	-2	1	37	$2\, y^2 x^3$	0	-2	1
8	$\sqrt{xy}$	3	3	4	38	$1.7\sqrt{xy}$	3	3	4
9	$y^2 e^x$	1	-1	1	39	$y^2 e^{x/2}$	0	-1	1
10	e^{-y}	1	0	2	40	ye^{-y+x}	1	0	2
11	$y\,(x-1)$	0	1	1	41	$y\,(x-1)/2$	0	1	1
12	$3\, y^2 x^2$	0	-4	1	42	$3\,(x+1)\, y^2$	0	-1	1
13	$(x+1)\, e^y$	0	1	1	43	$2\, e^y x$	0	-1	1
14	$y \cos(x$	0	1	1	44	$0.5\, y \cos(x)$	0	1	1
15	$2y\sqrt{x}$	0	1	1	45	$y\sqrt{x}/5$	0	1	1
16	$\sqrt{1-y^2}$	0	0	1	46	$\sqrt{4-y^2}\ x$	0	1	1
17	$x^2\sqrt{y}$	0	1	1	47	$2\, y^2/x$	0	1	1
18	y^2/x	1	1	2	48	$(4-x^2) \cos(y)$	0	1	1
19	y/x^2	1	1	2	49	$(2+y) \sin(x)$	0	1	1
20	$(1-x^2)/\cos(y)$	1	1	2	50	$y\, tg(x)$	0	1	1
21	$(1+y) \sin(x)$	0	2	1	51	$y\, e^x$	0	1	1
22	$y\, e^{-2x}$	0	1	1	52	$2\sqrt{x}\, y$	0	1	1
23	$x \cos^2(y)$	0	1	1	53	$x \sin^2(y)$	1	1	2
24	$\cos(y)/(1+x)$				54	$3\, x^2 y$	0	1	1
25	$0.5\,(x+2)\, y^2$	0	1	1	55	$y' = 0.5\, e^{x-y}$	1	1	2
26	$x \cos(н)$	1	2	2	56	$\sqrt{e^x}\ y$	1	1	2
27	$x^2 \sin(y)$	1	$\pi/2$	2	57	$y' = \sin(x)\, e^{-y}$	1	1	2
28	$y^2 e^{-x}$	0	1	1	58	$(x/\sqrt{2})y^2$	0	1	1
29	$y^2\sqrt{x}$	0	1	1	59	$x^2 y^3/4$	0	1	1
30	$e^{-y/x}$	0	1	1	60	$\sqrt{x(y-1)}$	1	2	2

6. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задание

1.Выбрать вариант задания из таблицы 26.

2.Решить задачу оптимизации с точностью $E = 10^{-4}$ в соответствии с заданием (таблица 26), для чего необходимо:

- построить график функции $y = f(x)$;
- проверить выполнение аналитического условия унимодальности функции на заданном отрезке;
- выбрать начальный отрезок неопределенности (отрезок, содержащий точку минимума);
- составить программу решения задачи оптимизации указанным методом;
- вычислить количество итераций, необходимых, чтобы локализовать точку минимума с точностью $E_1 = 10^{-2}$, расчет сравнить с результатом, полученным по программе. Результаты записать в таблицу 22.

3.Решить задачу оптимизации (метод оптимизации указан):

- определить длину отрезка, содержащего точку минимума, после трех итераций;
- вычислить теоретическую точность оптимизации и сравнить с полученной расчетной, сделать выводы;
- дать графическую иллюстрацию процесса оптимизации.

4.Решить задачу оптимизации с помощью математического пакета. Сравнить результаты. Оформить отчет.

Таблица 22

№ итерации	a	b	f(a)	f(b)	b – a
0					
1					
…					

Координаты точки минимума $((x^*, f(x^*))$.

Содержание отчета

1.Название работы.

2.Текст задания (функция, метод оптимизации, заданная точность).

3.График исследуемой функции на отрезке $[a;b]$.

4.Результаты выполнения пунктов задания, в том числе схема и программа алгоритма и заполненная таблица 22.

Пример выполнения задания

Задание

1.Решить задачу оптимизации функции $f(x) = x\cos(x) - \sin(x)$ с точностью $E = 10^{-4}$ методом золотого сечения.

2.Вычислить число итераций, необходимых, чтобы локализовать

точку минимума с точностью E.

3.Методом дихотомии решить задачу оптимизации (три итерации).

4.Определить длину конечного отрезка, содержащего точку минимума.

5.Вычислить теоретическую точность оптимизации. Сравнить с результатом, полученным в п.4.

6.Проиллюстрировать графически решение задачи.

Исследование задания

График функции $f(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.

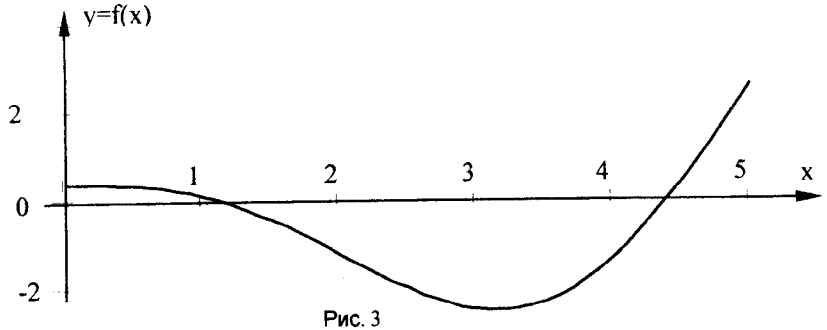

Рис. 3

Определим отрезок унимодальности функциии $f(x)$. Практический критерий унимодальности функции требует непрерывности функции и выполнения условия $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$ или неубывания $f'(x)$.

Вычислим $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x)$, $\quad f'(x) = -x\sin(x)$.

Таблица значений функции $f'(x)$.

Таблица 23

x	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$f'(x)$	-1,44	-1,34	-1,15	-0,94	-0,69	-0,42	-0,13	0,19	0,52	0,87	1,23

На отрезке [2.5;3.5] функция $f'(x)$ возрастает, следовательно, функция $y = f(x)$ унимодальная на этом отрезке.

Отрезок [2.5;3.5] – начальный отрезок неопределенности.

Теоретическая величина погрешности определяется соотношениями:

$L_N = \dfrac{L_0 + (2^N - 1)\cdot E_1}{2^N}$ - длина конечного отрезка после N итераций для метода дихотомии, $L_0 = b - a$, $E_1 \in (0; 2E)$.

Для метода золотого сечения длина конечного отрезка после N итераций $L_N = 0.618^N (b - a)$.

Полагаем, что длина конечного отрезка неопределенности – мера погрешности.

Решение задачи оптимизации методом золотого сечения

Таблица24

$N+1$	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$b-a$
1	2,5	3,5	-2,60133	-2,92682	1
2	2,88197	3,5	-3,04210	-2,92682	0,61803
3	2,88197	3,26393	-3,04210	-3,11750	0,38197
4	3,02786	3,26393	-3,112179	-3,11750	0,23607
5	3,02786	3,17376	-3,12179	-3,13996	0,14590
6	3,08359	3,17376	-3,13637	-3,13996	0,09017
7	3,11803	3,17376	-3,14073	-3,14141	0,05573
8	3,11803	3,15248	-3,14073	-3,14141	0,034444
9	3,13119	3,15248	-3,14142	-3,14158	0,02129
10	3,13119	3,14435	-3,14142	-3,14158	0,01316
11	3,13621	3,14435	-3,14155	-3,14158	0,008113
12	3,13932	3,14435	-3,14158	-3,14158	0,00503
13	3,13932	3,14243	-3,14158	-3,14159	0,00311
14	3,14051	3,14243	-3,14159	-3,14159	0,00192
15	3,14124	3,14243	-3,14159	-3,14159	0,00119
16	3,14124	3,14197	-3,14159	-3,14159	0,00073
17	3,14152	3,14197	-3,14159	-3,14159	0,00045
18	3,14169	3,14197	-3,14159	-3,14159	0,00028
19	3,14169	3,14187	-3,14159	-3,14159	0,00017
20	3,14176	3,14187	-3,14159	-3,14159	0,00011
21	3,14180	3,14187	-3,14159	-3,14159	0,00007

$x^* = (a+b)/2 = 3.1418, \quad f^* = -3.1418.$

Определим число итераций N, необходимых для локализации точки минимума с точностью $E_1 = 10^{-4}$ из условия, что длина конечного отрезка неопределенности не превышает заданной точности.

$0.618^N \le 10^{-4}$.

$$N \ge \frac{\lg 10^{-4}}{\lg 0.618}, \quad N > 19.$$

При *N*=20 длина конечного отрезка (таблица 24) равна 0.00011. Точность достигнута при *N*=21, т.е. расчет примерно совпадает с теоретической оценкой.

Решение задачи оптимизации методом дихотомии в таблице 25.

Таблица 25

$N+1$	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$b-a$
1	2,5	3,5	-2,60133	-2,92682	1
2	2,99997	3,5	-3,11109	-2,92682	0,50003
3	2,99997	3,25001	-3,11109	-3,12272	0,25004
4	3,12497	3,25001	-3,14116	-3,13825	0,12504

При $E_1 = d = 3 \cdot 10^{-5}$ определим длину конечного отрезка неопределенности и сравним с расчетом $L_N = \dfrac{L_0 + (2^N - 1) \cdot E_1}{2^N}$,

$L_3 = 0.125026$

Расчетная длина $[a;b]$ (табл.25) $L_3 = b - a = 0.12504$.

Графическая иллюстрация процесса оптимизации

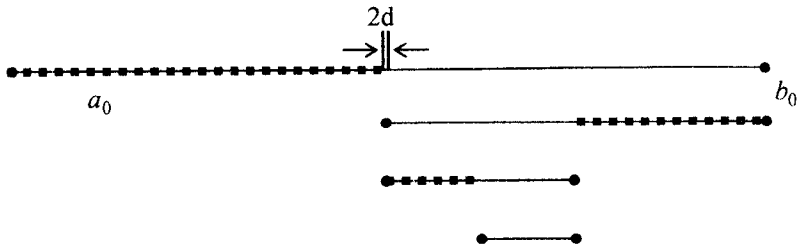

Рис.4

Варианты заданий

Таблица 26

№	Функция f(x)		Функция f(x)	t	p
1	$x^2 - 6\ln(1 + x)$	31	$x^2 - \sin(x + 2)$	1	2
2	$x^2 + 4\sin(x)$	32	$\sin(0,5x) + 1 + x^2$	2	1
3	$tg(0,36x + 0,4) + x^2$	33	$0,5 + 0,5x^2 + \sin(x-1)$	1	2
4	$x^2 + \sin(x) - 0,5$	34	$\sin(0,5 + x) + 2x^2 + 0,5$	2	1
5	$2x\cos(x) + 2x^2 + 1$	35	$\sin(2 + x) + 2x^2 - 3$	1	2
6	$x^2 - \sin(x) - 0,25$	36	$\cos(1 + 2x) - 2 + x^2$	2	1
7	$tg(0,4x + 0,4) + x^2$	37	$\sin(x) + 3x^2$	1	2
8	$2\cos(x) + \sqrt{x}$	38	$\cos(-x) + 1/(x + 2)$	2	1
9	$\lg(x) + 2\sin(x)$	39	$x^{1/2} - \sin(\pi x)$	1	2
10	$tg(0,5x + 0,2) + x^2$	40	$2\exp(x) - 5x - 2$	2	1
11	$3x^2 - \cos(x) - 1$	41	$2x^2 - \exp(x/2)$	1	2
12	$x^2 + \sin(x) - 0,5$	42	$2tgx - 3x + 2$	2	1
13	$1,8x^2 - \sin(10x)$	43	$\sin(x - 0.5) - x^2 + 0.8$	1	2
14	$ctg(x) - 0,5x - x^2$	44	$2\exp(-x) - 2 + x^2$	2	1
15	$x\sin(x) + 1,2x^2 - 2$	45	$(x - 1)\ln x - 1$	1	2
16	$2x^2\cos(x) - 7$	46	$x^{1/2} - \sin(\pi x)$	2	1
17	$x^2 + 2\cos(x) - 1$	47	$2\exp(-2x^2) - 2x^2 + 1$	1	2
18	$x^2 - 2\sin(1 + x) - 1,5$	48	$x^2\cos x + 1$	2	1
19	$2\sin(x - 0,6) - 1.5 + x^2$	49	$(x - 1)^2 - 2^x + 1$	1	2
20	$\cos(1 + 2x) - 2 + x^2$	50	$(x - 1)^2 - 2^{-x} + 1$	2	1
21	$\cos(x) + (x + 1)^2$	51	$\exp(x) + x^2 + 1$	1	2
22	$x^{1/2} + 2 + x^2$	52	$0.5^x - (x^2 + 2)$	2	1
23	$3x^2 + \cos(x) + 1$	53	$(x - 2)^2\lg(x + 5)$	1	2
24	$2 + x^2 - \cos(x)$	54	$(x - 4)^2\lg(x^2 + 3) + 1$	2	1
25	$(x - 1)^2 - 2x$	55	$2x^2 - 0.5^x - 2$	1	2
26	$(2 - x)^2 - 0,5x$	56	$x\ln(x + 2) - 1$	2	1
27	$2,2x + x^2$	57	$0.5^x - 3 + (x + 1)^2$	1	2
28	$2x^2 - 2\sin(x) - 8$	58	$2\cos(x) + x^2 - 3x + 2$	2	1
29	$3x^2 - 2\lg x$	59	$5^x - 6x - 3$	1	2
30	$\lg x + (x + 1)^2$	60	$2x^2 - 0.5^x - 3$	2	1

t - номер метода для вычисления минимума с точностью 10^{-4} (п. 2 задания),
p - номер метода для вычисления трех итераций (п. 3 задания).