КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Тема: Аппроксимация функциональных зависимостей

Для установления функциональной зависимости между двумя переменными x и y проведен эксперимент, в результате которого получена совокупность из m пар чисел (x_1,y_1), (x_2,y_2), … (x_m,y_m). Для аналитического описания такой зависимости предлагается некоторая функция

$$y = f(x, a_1, a_2, \ldots a_n), \tag{1}$$

зависящая от n параметров, числовые значения которых требуется определить на основании эксперимента.

В зависимости от требований к свойствам аппроксимирующей функции можно предложить различные критерии определения коэффициентов. Рассмотрим основные методы, нашедшие наибольшее практическое применение.

Метод выборочных значений

В качестве критерия предлагается требование прохождения функциональной зависимости через конкретные экспериментальные точки. При этом возможны следующие случаи.

Если $n = m$, то для определения коэффициентов составляют систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1, a_1, a_2, \ldots a_n) \\ y_2 &= f(x_2, a_1, a_2, \ldots a_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f(x_n, a_1, a_2, \ldots a_n) \end{aligned}$$

Если удается найти решение этой системы относительно коэффициентов $a_1, a_2, \ldots a_n$, то оно и определяет конкретное значение функциональной зависимости, соответствующей эксперименту.

Если $n > m$, то в системе число переменных оказывается больше, числа уравнений и задача не имеет решения. Для определения коэффициентов требуются дополнительные данные.

Если $n < m$, то в системе количество определяемых переменных оказывается меньше, чем уравнений. В этом случае из m уравнений оставляют только n, выбирая наиболее важные из экспериментальных данных.

Полученная с помощью этого метода функциональная зависимость лбычно не обладает достаточной гладкостью, имея в промежуточных точках ($x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots n$) существенные отклонения. Это обстоятельство в ряде случаев служит существенным препятствием применения метода.

Метод наименьших квадратов

В соответствии с этим методом коэффициенты аппроксимирующей функции ищутся, исходя из требований ее максимального приближения ко всем экспериментальным точкам, не зависимо от их количества. При этом аппроксимирующая функция в принципе может и не проходить ни через одну точку экспериментальных данных.

В качестве критерия степени приближения возьмем величину среднего квадратичного отклонения аналитической зависимости от экспериментальных данных

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(a_1, a_2, \ldots a_m, x_i)]^2 . \tag{2}$$

Минимальному значению критерия отвечают условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(a_1, a_2, \ldots a_m, x_i)] \frac{\partial}{\partial a_1} f(a_1, a_2, \ldots a_m, x_i) = 0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial a_2} &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(a_1, a_2, \ldots a_m, x_i)] \frac{\partial}{\partial a_2} f(a_1, a_2, \ldots a_m, x_i) = 0 \\ &\ldots \\ \frac{\partial\theta}{\partial a_m} &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(a_1, a_2, \ldots a_m, x_i)] \frac{\partial}{\partial a_m} f(a_1, a_2, \ldots a_m, x_i) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Часто аппроксимирующую функцию ищут в виде суммы некоторой совокупности более простых базовых функций $f_1(x), f_2(\mathbf{x}), \ldots f_m(x)$, т.е.

$$y = f(a_1, a_2, \ldots a_m, x) = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x) . \tag{4}$$

В этом случае система уравнений (3) принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [y_i - \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(x_i)] f_1(x_i) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(x_i)] f_2(x_i) = 0 \\ &\ldots \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(x_i)] f_m(x_i) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Из (5) следует

$$\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{m} a_j f_j(x_i) f_1(x_i)] = \sum_{i=1}^{n} y_i f_1(x_i) \qquad (6)$$
$$\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{m} a_j f_j(x_i) f_2(x_i)] = \sum_{i=1}^{n} y_i f_2(x_i)$$
$$\ldots$$
$$\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{m} a_j f_j(x_i) f_m(x_i)] = \sum_{i=1}^{n} y_i f_m(x_i)$$

Для получения более компактной формы записи аналитических соотношений введем следующие матричные обозначения. Систему базовых функций $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$ будем рассматривать как матричную функцию скалярного аргумента

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_m(x) \end{bmatrix}.$$

Для числовых значений аргументов, функций и коэффициентов аппроксимирующей зависимости определим соответственно векторы

$$X = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n]$$
$$Y = [y_1 \ y_2 \ \ldots \ y_n].$$
$$A = [a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_m]$$

Для всей системы базовых функций определим матрицу

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_n) \\ & & \ldots & \\ f_m(x_1) & f_m(x_2) & \ldots & f_m(x_n) \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Минимуму квадратичного отклонения соответствуют коэффициенты, рассчитанные по формуле

$$A = \left(FF^T\right)^{-1} FY^T. \qquad (8)$$

При этом величина среднего квадратичного отклонения

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\Delta\,\Delta^T} = \sqrt{\frac{1}{n}(Y-\tilde{Y})(Y-\tilde{Y})^T}. \qquad (9)$$

может быть определена по формуле

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{n}\left(Y - A^T F\right)\left(Y - A^T F\right)^T} \qquad (10)$$

Метод наименьших квадратов для степенного полинома

В том случае, когда аппроксимирующая функция является степенным полиномом и имеет вид

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} = \sum_{j=1}^{m} a_{j-1} x^{j-1}. \qquad (11)$$

система базовых функций определяется матрицей

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ & \ldots & & \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots & x_n^{m-1} \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Для произведения матриц $\boldsymbol{F F^T}$ и матрицы произведения $\boldsymbol{F Y^T}$ при этом получим

$$F F^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ & \ldots & & \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots & x_n^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \ x_1 \ x_1^2 \ldots x_1^{m-1} \\ 1 \ x_2 \ x_2^2 \ldots x_2^{m-1} \\ \ldots \\ 1 \ x_n \ x_n^2 \ldots x_n^{m-1} \end{bmatrix} = .$$

$$=\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ & & \dots & & \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m-2} \end{bmatrix}.$$

и

$$F\,Y^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ & \dots & & \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_n^{m-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i\, y_i \\ \Sigma x_i^2\, y_i \\ \dots \\ \Sigma x_i^{m-1}\, y_i \end{bmatrix}.$$

На основании полученных произведений определим выражение для матрицы коэффициентов аппроксимирующей полиномиальной функции

$$A=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{m-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ & & \dots & & \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m-2} \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i\, y_i \\ \Sigma x_i^2\, y_i \\ \dots \\ \Sigma x_i^{m-1}\, y_i \end{bmatrix}$$

Для практических вычислений в среде MATLAB удобно пользоваться специальной матрицей, которая носит название матрицы Вандермонда и определяется функцией ***vander(X)***.

Векторный аргумент

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

с компонентами

$$w_{ij}=x_i^{\,n-j},\quad i,j=1,2,\dots n\cdot$$

эта функция преобразует в матрицу, столбцы которой являются степенями (в смысле поэлементного возведения) исходного вектора

$$W(X)=\left[X.\hat{}(n-1)\ \dots\ X.\hat{}(1)\ \ X.\hat{}(0)\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \dots & x_1^1 & x_1^0 \\ x_2^{n-1} & \dots & x_2^1 & x_2^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{n-1} & \dots & x_n^1 & x_n^0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Приняв во внимание вышеизложенное, вычисление матрицы F может быть осуществлено посредством транспонирования матрицы Вандермонда, с последующим выделением из нее m столбцов т.е.

$$W=vander(X)';\quad F=W(:,1:m)\ \cdot$$

Например при $m=2$ для

$$X=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Имеем

$$W=vander\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)'=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix},\qquad F=W(:,1:2)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Использование этого приема позволяет существенно упростить все дальнейшие вычисления.

Задачи исследования

На основании исходных данных, полученных в приложении 1 и содержащих абсциссы x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 и ординаты y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 шести точек, выполнить аппроксимацию степенными полиномами различной степени, показав влияния степени полинома на его аппроксимирующие свойства.

Для этого необходимо:

- определить с помощью метода наименьших квадратов коэффициенты аппроксимирующих полиномов для различных степеней,
- построить совмещенное графические изображения полиномов и исходных точек..

Кроме того, рекомендуется исследовать зависимость погрешности аппроксимации от степени полинома. Последнее задания не является обязательным и служат для повышения рейтинга студента.

В качестве примера в приложении 2 приведен текст файла *aproxw.m*, содержащего программу аппроксимации экспериментальных данных полиномом пятого порядка. Программа разработана на основании приведенной методики и соответствует варианту 25.

В программе приняты следующие обозначения:

X – матрица абсцисс точек эксперимента,

Y – матрица их ординат,

m – степень аппроксимирующего степенного полинома,

W – матрица Вандермонда,

F – матрица системы базовых функций,

A – матрица коэффициентов аппроксимирующего степенного полинома,

xmax – максимальное значение абсциссы точек эксперимента,

DY – матрица разностей фактических значений ординат и их расчетных значений, вычисленных с помощью аппроксимирующего полинома,

n – число точек эксперимента (число элементов в X и Y),

tetamin – величина среднего квадратичного отклонения расчетных значений ординат аппроксимирующей функции от их фактических значений в точках эксперимента,

kt – количество точек в графике выводимой аппроксимирующей функции,

XN, YN, FN и *YN* – матрицы, соответствующие ранее рассмотренным матрицам *X, Y, F* и *Y*, но определенные для выводимой аппроксимирующей функции,

s1 – символьная переменная, содержащая информацию о порядке полинома,

s2 – символьная переменная, содержащая запятую,

s3 – символьная переменная, содержащая информацию о среднем квадратичном отклонении.

Программы производит вычисление коэффициентов аппроксимирующего полинома, вычисляет значения этого полинома во всем диапазоне изменения аргумента в 40 точках, вычисляет величину среднего квадратичного отклонения и строит график аппроксимирующей функции. Одновременно на график наносятся исходные точки эксперимента в виде звездочек.

В приложении 3 приведен другой вариант программы анализа аппроксимирующих свойств степенного полинома. В основу программы положены следующие функции полиномиальной алгебры, входящие в состав MATLAB:

P=polyfit(XT,YT,N) – функция, определяющая коэффициенты *P* степенного полинома *N*-й степени, наилучшим образом соответствующие исходным данным, заданным векторами *XT* и *YT;*

Y=polyval(P,X) - функция, определяющая значение ординат *Y* степенного полинома, заданного вектором *P*, в точке с абсциссой *X*.

Текст программы находится в файле *aproxp.m,* формирующей цикл аппроксимаций с разными значениями степеней полинома. Результаты расчетов выводятся в различные окна, сформированные функцией *subplot.*

В процесс вычислений программа обращается к функции *aprox*(*XT,YT,N*), осуществляющей решение задачи аппроксимации исходных данных *XT* и *YT* полиномом заданной степени *N* с последующим вычислением значений полинома в промежуточных точках диапазона [*min*(XT),*max*(*XT*)].

С целью уменьшения общей трудоемкости работы при разработке программы анализа студентами могут быть использованы приведенные функции или их фрагменты.

Приложение 1

Варианты задания

Вари-ант	Значения функции y_i					
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
Вар.1	0.1	3.2	2.4	4.1	4.9	5.4
Вар.2	0.2	3.1	2.2	4.3	4.8	4.9
Вар.3	0.1	2.9	1.8	4.7	5.0	5.1
Вар.4	0.2	3.2	1.9	3.8	5.1	5.4
Вар.5	0.1	3.1	2.4	3.7	4.9	4.9
Вар.6	0.2	2.9	2.2	4.1	4.8	5.1
Вар.7	0.1	3.2	1.8	4.3	5.0	5.4
Вар.8	0.2	3.1	1.9	4.7	5.1	4.9
Вар.9	0.1	2.9	2.4	3.8	4.9	5.1
Вар.10	0.2	3.2	2.2	3.7	4.8	5.4
Вар.11	0.1	3.1	1.8	4.1	5.0	4.9
Вар.12	0.2	2.9	1.9	4.3	5.1	5.1
Вар.13	0.1	3.2	2.4	4.7	4.9	5.4
Вар.14	0.2	3.1	2.2	3.8	4.8	4.9
Вар.15	0.1	2.9	1.8	3.7	5.0	5.1
Вар.16	0.2	3.2	1.9	4.1	5.1	5.4
Вар.17	0.1	3.1	2.4	4.3	4.9	4.9
Вар.18	0.2	2.9	2.2	4.7	4.8	5.1
Вар.19	0.1	3.2	1.8	3.8	5.0	5.4
Вар.20	0.2	3.1	1.9	3.7	5.1	4.9
Вар.21	0.1	2.9	2.4	4.1	4.9	5.1
Вар.22	0.2	3.2	2.2	4.3	4.8	5.4
Вар.23	0.1	3.1	1.8	4.7	5.0	4.9
Вар.24	0.2	2.9	1.9	3.8	5.1	5.1
Вар.25	0.1	3.2	2.7	4.6	4.9	5.1

Приложение 2

Текстовый файл ***aproxw.m*** программы аппроксимации данных полиномом пятого порядка для варианта 25.

```
%                    <<< aproxw >>>
X=[1 2 3 4 5 6];
Y=[0.1 3.2 2.7 4.6 4.9 5.1];
m=5;
W=flipud(vander(X)');
F=W(1:m,:);
A=(((F*F')^-1)*F)*Y';
xmax=max(X);
DY=Y-A'*F;
n=length(Y);
tetamin=sqrt(DY*DY'/n);
kt=40;
XN=1:xmax/kt:xmax;
WN=flipud(vander(XN)');
FN=WN(1:m,:);
YN=A'*FN;
plot(X,Y,'*',XN,YN,'LineWidth',3)
grid
s1=strcat('m =  ',num2str(m));
s2=',';
s3=strcat('     tetamin =   ',num2str(tetamin));
title(strcat(s1,s2,s3))
```

По этой программе тоже.

Приложение3

```
%=======================================
%          <<< aproxp >>>
% SUB: aprox
%=======================================
XT=[1 2 3 4 5 6 7 8 9];
YT=[1 2 4 7 5 3 2 1 0];
for i=1:8
   subplot(2,4,i)
   P=aprox(XT,YT,i);
   tit=strcat('N=',num2str(i));
   title(tit)
end

%-----------------------------------------------------------------
%                    <<< aprox >>>
%   Аппроксимация степенным понимномом
%    Построение графика и исходных точек
%    IN: XT,YT - абсциссы и ордигаты точек
%                N - стапень полинома
% OUT: P - коэффициенты полинома
%-----------------------------------------------------------------
function P=aprox(XT,YT,N)
P=polyfit(XT,YT,N);
ki=20;
xmax=max(XT);
xmin=min(XT);
dx=(xmax-xmin)/ki;
X=xmin:dx:xmax;
Y=polyval(P,X);
plot(X,Y,XT,YT,XT,YT,'o')
grid
```