

Контрольная работа № 6: Функции нескольких переменных

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера его зачетной книжки. Первая цифра номера задачи соответствует номеру контрольной работы.

Вариант	<i>Номер задачи</i>				
1	6. 1	6. 11	6. 21	6. 31	6. 41
2	6. 2	6. 12	6. 22	6. 32	6. 42
3	6. 3	6. 13	6. 23	6. 33	6. 43
4	6. 4	6. 14	6. 24	6. 34	6. 44
5	6. 5	6. 15	6. 25	6. 35	6. 45
6	6. 6	6. 16	6. 26	6. 36	6. 46
7	6. 7	6. 17	6. 27	6. 37	6. 47
8	6. 8	6. 18	6. 28	6. 38	6. 48
9	6. 9	6. 19	6. 29	6. 39	6. 49
10	6. 10	6. 20	6. 30	6. 40	6. 50

6.1–6.10. Найти область определения функций $z = f(x, y)$ и $u = f(x, y, z)$.
В случае а) изобразить область определения на чертеже.

$$6.1. \text{ а) } z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}};$$

$$\text{б) } u = \arccos \frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{x}.$$

$$6.2. \text{ а) } z = \ln(x + 2y - 1)$$

$$\text{б) } u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - z}{e^{xyz}}}.$$

$$6.3. \text{ а) } z = \frac{1}{\ln(1 - xy)};$$

$$\text{б) } u = \frac{z + 2xy}{x^2 + y^2 + z^2 - 3}.$$

$$6.4. \text{ а) } z = \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2 - y}};$$

$$\text{б) } u = \ln(x + 4y - 2z - 8).$$

$$6.5. \text{ а) } z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1};$$

$$\text{б) } u = \frac{\sqrt{z}}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}.$$

$$6.6. \text{ а) } z = \arccos \frac{x - 2y + 1}{x + 3};$$

$$\text{б) } u = x + \sqrt{yz}.$$

$$6.7. \text{ а) } z = \sqrt{\frac{x^2 + 3y^2}{y - x^2 - 2x - 2}};$$

$$\text{б) } u = \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

$$6.8. \text{ а) } z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{3x + 2y - 6};$$

$$\text{б) } u = \frac{x^2 y}{2x + y - z + 4}.$$

$$6.9. \text{ а) } z = \sqrt{\ln(x^2 - 4y)};$$

$$\text{б) } u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

$$6.10. \text{ а) } z = \arcsin \frac{x + y}{3y};$$

$$\text{б) } u = \frac{1}{x^2 - y^2 + z^2}.$$

6.11 – 6.20. Даны функция $z = f(x, y)$ и точки $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$.

Найти:

- 1) полный дифференциал;
- 2) уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0)$;
- 3) приближенное значение в точке $M_1(x_1, y_1)$, используя дифференциал.

$$6.11. z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad M_0(0;1), \quad M_1(1,02;0,05).$$

$$6.12. z = \ln(x^2 + yx), \quad M_0(1;0), \quad M_1(1,2;0,04).$$

$$6.13. z = e^{x^2 - xy}, \quad M_0(1;1), \quad M_1(1,2;0,85).$$

$$6.14. z = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad M_0(1;0), \quad M_1(1,98;1,03).$$

$$6.15. z = \frac{1}{x} + 2xy^2, \quad M_0(1;1), \quad M_1(0,84;2,12).$$

$$6.16. z = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad M_0(1;1), \quad M_1(1,92;8,08).$$

$$6.17. z = \sqrt{\frac{x}{x+y}}, \quad M_0(1;1), \quad M_1(1,09;2,88).$$

$$6.18. z = \ln(4 - x^2 y), \quad M_0(1;1), \quad M_1(1,22;3,09).$$

$$6.19. z = \sqrt[3]{x^2 + y}, \quad M_0(1;0), \quad M_1(2,96;-1,12).$$

$$6.10. z = e^{yx^2 - 1}, \quad M_0(1;1), \quad M_1(1,21;0,88).$$

6.21–6.30. Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что выполняется соотношение $F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}) = 0$.

$$6.21. z = \operatorname{arctg} xy; \quad F = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$6.22. z = \cos(x - at) + e^{x+at}, \quad a - \text{const}; \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

$$6.23. z = e^{-\cos(ax+y)}, \quad a - \text{const}; \quad F = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$6.24. \quad z = \frac{y}{x}; \quad F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$6.25. \quad z = \frac{\sin(x-y)}{x}; \quad F = 2 \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$6.26. \quad z = e^{\frac{y}{x}}; \quad F = 2x \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$6.27. \quad z = y \sqrt{\frac{y}{x}}; \quad F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$6.28. \quad z = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}; \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial z}{\partial t}.$$

$$6.29. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$6.30. \quad z = \sin^2(y-ax); \quad F = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

6.31 – 6.40. Даны функции $z = z(u, v)$ и $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z = z(u(x, y), v(x, y))$.

$$6.31. \quad z = e^{2uv}, \quad u = \sin(x-y), \quad v = \cos(x-y).$$

$$6.32. \quad z = uv, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

$$6.33. \quad z = u^3 + v^3, \quad u = x + y, \quad v = x^2 + y^2.$$

$$6.34. \quad z = \ln \sqrt{u^2 + v^2}, \quad u = e^{x+y}, \quad v = e^{x-y}.$$

$$6.35. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}, \quad u = x \cos y, \quad v = x \sin y.$$

$$6.36. z = u^v, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = xy.$$

$$6.37. z = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad u = xe^y, \quad v = ye^x.$$

$$6.38. z = uv, \quad u = x + y - \cos x, \quad v = x - y + \cos x.$$

$$6.39. z = \arctg \frac{u}{\sqrt{v}}, \quad u = xy, \quad v = 1 + x^2 + y^2.$$

$$6.40. z = u^2 \ln v, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = x^2 + y^2.$$

6.41 – 6.50. Дана функция $z = f(x, y)$ и область D .

Найти:

1) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

2) наибольшее и наименьшее значения в области D .

$$6.41. z = x^2 + y^2 - xy + x + y, \quad D : x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad x + y \geq -3.$$

$$6.42. z = x^3 + y^3 - 3x, \quad D : 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 2, \quad x + y \geq -3.$$

$$6.43. z = x^2 - 3y^2 + 2xy + y, \quad D : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1.$$

$$6.44. z = y^2 - 3x^2 + 2xy + x, \quad D : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 2.$$

$$6.45. z = x^2 + y^2 - xy - 4x, \quad D : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + 3y \leq 12.$$

$$6.46. z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 3.$$

$$6.47. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1, \quad D : 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

$$6.48. z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x, \quad D : x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad x + y + 2 \geq 0.$$

$$6.49. z = 3 - 2x^2 - y^2 - xy, \quad D : x \leq 1, \quad y \geq 0, \quad y \leq x.$$

$$6.50. z = x^2 + 2xy + 8y - 4x, \quad D : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2.$$