Контрольная работа №4:
Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Варианты контрольных заданий

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера его зачетной книжки. Первая цифра номера задачи соответствует номеру контрольной работы.

Вариант	Номер задачи					
1	4. 1	4. 11	4. 21	4. 31	4. 41	4. 51
2	4. 2	4. 12	4. 22	4. 32	4. 42	4. 52
3	4. 3	4. 13	4. 23	4. 33	4. 43	4. 53
4	4. 4	4. 14	4. 24	4. 34	4. 44	4. 54
5	4. 5	4. 15	4. 25	4. 35	4. 45	4. 55
6	4. 6	4. 16	4. 26	4. 36	4. 46	4. 56
7	4. 7	4. 17	4. 27	4. 37	4. 47	4. 57
8	4. 8	4. 18	4. 28	4. 38	4. 48	4. 58
9	4. 9	4. 19	4. 29	4. 39	4. 49	4. 59
10	4. 10	4. 20	4. 30	4. 40	4. 50	4. 60

Условия заданий контрольных работ

4.1–4.10. Вычисляя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, найти $f'(x_0)$.

4.1. $f(x)=x+\operatorname{ctg}x$, $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4.2. $f(x)=x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\quad x_0=4$.

4.3. $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2$, $\quad x_0=2$.

4.4. $f(x)=\sin x-x$, $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4.5. $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2}$, $\quad x_0=2$.

4.6. $f(x)=\sin 2x+\cos x$, $\quad x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4.17. $f(x)=x-\cos x$, $\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

4.8. $f(x)=\sqrt{x}-x^2$, $\quad x_0=4$.

4.9. $f(x)=-\operatorname{tg}x-x$, $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4.10. $f(x)=\ln x$, $\quad x_0=2$.

4.11–4.20. Найти производные следующих функций.

4.11. а) $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg}2}$; б) $y=\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)$; в) $y=\dfrac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x-5}{\sqrt{31}}$;

г) $y=x^{\frac{1}{x}}$; д) $\sqrt{xy}=\cos\dfrac{y}{x}$.

4.12. а) $y=\sqrt{xe^{1/x}-x}$; б) $y=\ln\left(\log_2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}\right)$; в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$;

г) $y=\log_x 2^x$; д) $x^y=y^x$.

4.13. а) $y=3^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 2x}}$; б) $y=\lg\cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$; в) $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $y=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$; д) $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

4.14. а) $y=10^{x^2\cdot\mathrm{tg}\,x}$; б) $y=\log_2\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$; в) $y=\frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}-\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$;

г) $y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$; д) $\sin xy+\cos xy=\mathrm{tg}(x+y)$.

4.15 а) $y=5^{x\sqrt{1-x}}$; б) $y=\lg\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$; в) $y=\arccos\ln\frac{1}{x}$;

г) $y=2^{x^x}$; д) $y\ln y=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

4.16. а) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{8}{1+e^{\frac{4}{x}}}$; б) $y=\log_5\mathrm{tg}\,x^2$; в) $y=\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{x}}$;

г) $y=x^{x^2}$; д) $xy=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

4.17. а) $y=e^{\sqrt{x}\ln x}-\sqrt{\mathrm{tg}\,4}$; б) $y=\lg\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$; в) $y=\sqrt{\arcsin\frac{x}{2}}$;

г) $y=x^{2^x}$; д) $\frac{x}{y}=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

4.18. а) $y=\mathrm{tg}\lg\frac{1}{3}+2^{\sqrt{\sin^3 x}}$; б) $y=\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x}$; в) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

г) $y=\sqrt[x]{x}$; д) $\ln_x y=\frac{x}{y}$.

4.19. а) $y=10^{\sqrt{x}\cdot\mathrm{ctg}\,x}$; б) $y=\log_2\sin\frac{x+\sqrt{3}}{4}$; в) $y=\mathrm{arcctg}\left(e^x-e^{-x}\right)$;

г) $y=x^{\sqrt{x}}$; д) $\ln\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$.

4.20. а) $y=3^{\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}}$; б) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$; в) $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^{-x}-3}{\sqrt{2}}$;

г) $y=x^{\arcsin x}$; д) $\ln_y x=x^2+y^2$.

4.21–4.30. Найти производные 2-го порядка для следующих функций:

4.21. а) $y=x^2e^{-x^2}$, б) $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin^2 t\end{cases}$.

4.22. а) $y=x\cos x^2$, б) $\begin{cases}x=\operatorname{arctg} t\\ y=\ln\left(1+t^2\right)\end{cases}$.

4.23. а) $y=\frac{\ln x}{x^3}$, б) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=b\sin^3 t\end{cases}$.

4.24. а) $y=(2x+1)\ln^2 x$, б) $\begin{cases}x=\sec t\\ y=\operatorname{tg} t\end{cases}$.

4.25. а) $y=\left(x^3+2\right)e^{4x+3}$, б) $\begin{cases}x=\arcsin t\\ y=\ln\left(1-t^2\right)\end{cases}$.

4.26. а) $y=\frac{\log_2 x}{x^2}$, б) $\begin{cases}x=e^{-t}\\ y=t^3\end{cases}$.

4.27. а) $y=e^{\frac{x}{2}}\sin 2x$, б) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.

4.28. а) $y=\frac{\cos 2x}{x}$, б) $\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^3\end{cases}$.

4.29. а) $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x$, б) $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$.

4.30. а) $y=(3x-1)2^{-x}$, б) $\begin{cases}x=\arcsin t\\ y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$.

4.31. Найти координаты точек пересечения с осями координат касательной к графику функции $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$, у которой угловой коэффициент $K = 4$.

4.32. Найти точки, в которых касательная к кривой $y = \dfrac{3}{5-2x}$ параллельна прямой $2x - 3y + 6 = 0$.

4.33. Показать, что касательные к гиперболе $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ в точках её пересечения с осями координат параллельны между собой.

4.34. Составить уравнения нормалей к параболе $y = x^2 - 4x + 5$ в точках её пересечения прямой $x - y + 1 = 0$.

4.35. В какой точке кривой $y^2 = 2x^3$ касательная перпендикулярна прямой $4x - 3y + 2 = 0$.

4.36. Составить уравнение нормали к графику функции $y = -\sqrt{x} + 2$ в точке пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

4.37. Показать, что гиперболы $y = \dfrac{\sqrt{5}}{x}$ и $y = \sqrt{x^2 + 4}$ пересекаются под прямым углом.

4.38. Написать уравнение нормали к параболе $y = x^2 + 4x + 1$, которая перпендикулярна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

4.39. Найти точки, в которых касательная к кривой $y = \dfrac{3x-4}{2x-3}$ параллельна биссектрисе второго координатного угла.

4.40. Найти угол, под которым кривая $y = e^x$ пересекает ось *OY*.

4.41–4.50. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближённое значение функции $y = f(x)$ в заданной точке x_0.

4.41. $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 65$.

4.42. $y = \lg x$, $x_0 = 10{,}23$.

4.43. $y = \cos x$, $x_0 = 32^0$.

4.44. $y = \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 33$.

4.45. $y = \operatorname{ctg} x$, $x_0 = 45^0, 15'$.

4.46. $y=\sqrt{4x-3}$, $x_0=1{,}78$.

4.47. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x_0=1{,}58$.

4.48. $y=\operatorname{arctg} x$, $x_0=0{,}97$.

4.49. $y=\ln x$, $x_0=1{,}02$.

4.50. $y=\sin x$, $x_0=29^0$.

4.51–4.60. Записать формулу Тейлора 4-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $y=f(x)$ в точке x_0.

4.51. $y=\dfrac{x}{x+2}$, $x_0=1$.

4.52. $y=xe^{2x}$, $x_0=0$.

4.53. $y=\ln\left(2x+1\right)$, $x_0=0$.

4.54. $y=x^2e^x$, $x_0=0$.

4.55. $y=\sin^2 x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4.56. $y=\cos^2 x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4.57. $y=x\ln x$, $x_0=1$.

4.58. $y=\dfrac{x}{x-1}$, $x_0=2$.

4.59. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$.

4.60. $y=\dfrac{x}{2+x}$, $x_0=-1$.