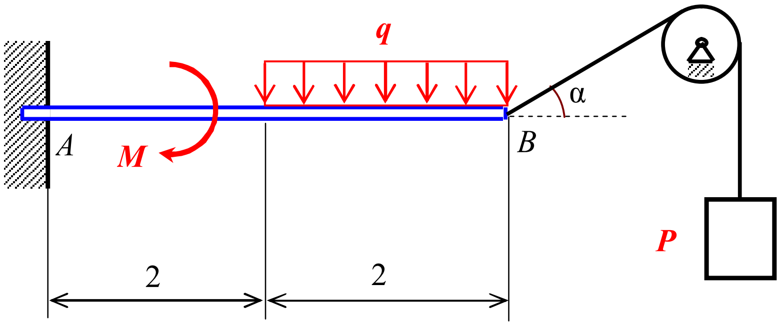
Домашняя работа S-1

Определение реакций опор в случае плоской системы сил

Найти реакции опор данной конструкции.
Необходимые исходные данные приведены при каждом соответствующем варианте, при этом все размеры даны в **метрах**.
Во всех вариантах имеем дело только с одним твердым телом (обьектом равновесия), при этом G_{AB} означает вес стержня *AB*, G_{AD} - вес стержня *AD* и так далее. ***Силы тяжести*** и реакции опор ***на рисунках не показаны***. Если в каком-то варианте у рассматриваемого стержня (или рассматриваемой конструкции) имеются опорные стержни, то всегда они считаются абсолютно твердыми и невесомыми.

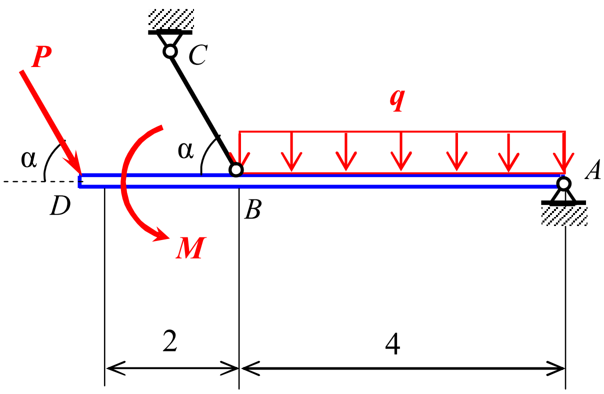
Lehekülje häälestus: paber A4; veerised – ülal 23 mm, all 22 mm, vasakul 25 mm, paremal 15 mm.

Variant 1.



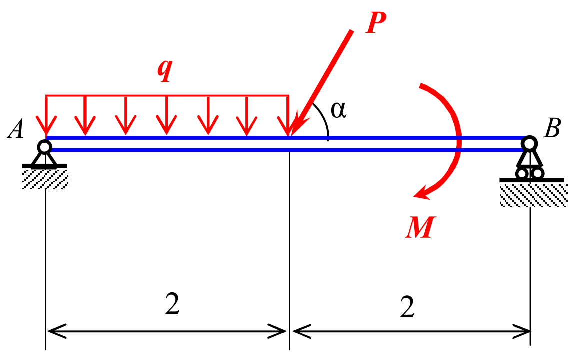
$G_{AB} = G = 10$ kN
$P = 5$ kN
$M = 20$ kN·m
$q = 1$ kN /m
$\alpha = 30^{\circ}$

Variant 2.



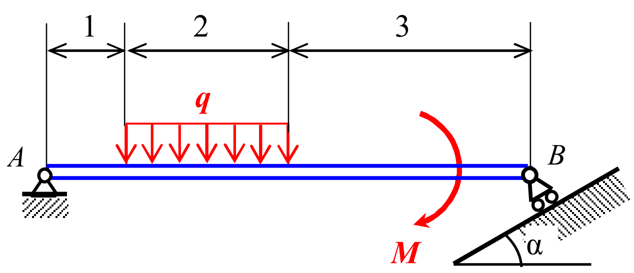
$G_{AD} = G = 12$ kN
$P = 8$ kN
$M = 10$ kN·m
$q = 4$ kN /m
$\alpha = 60^{\circ}$

Variant 3.



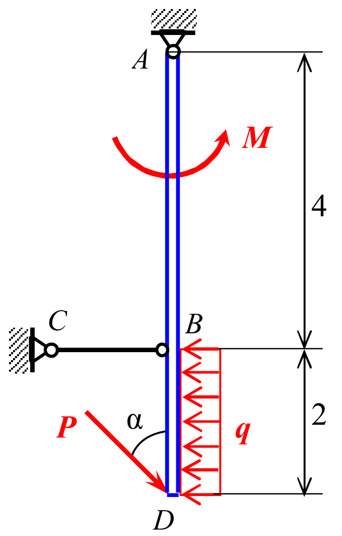
$G_{AB} = G = 8$ kN
$P = 4$ kN
$M = 5$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 60^{\circ}$

Variant 4.



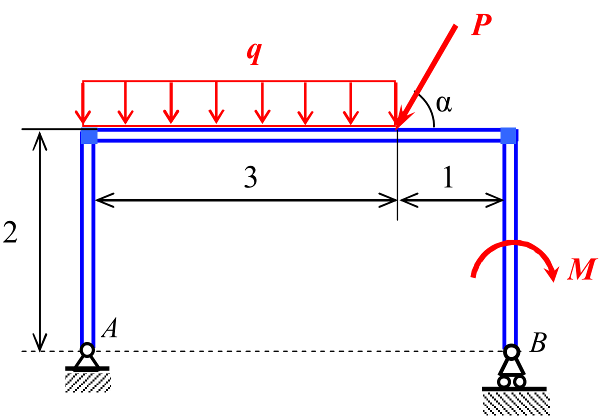
$G_{AB} = G = 14$ kN
$M = 8$ kN·m
$q = 3$ kN /m
$\alpha = 30^{\circ}$

Variant 5.



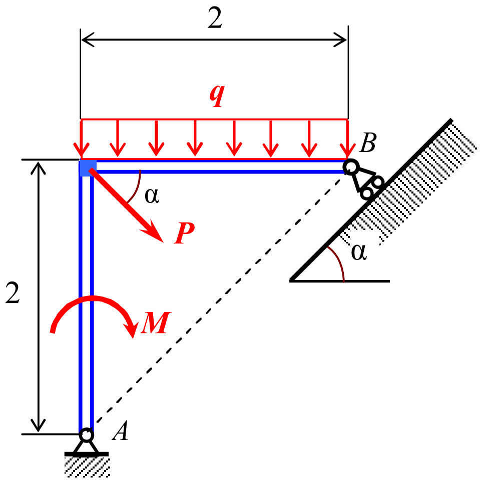
$P = 6$ kN
$M = 7$ kN·m
$q = 1$ kN /m
$\alpha = 45^{\circ}$
$G_{AD} = 0$

Variant 6.



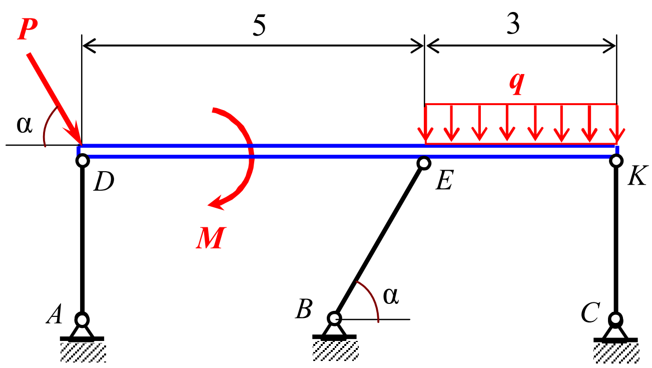
$P = 10$ kN
$M = 4$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 60^{\circ}$
$G_{AB} = 0$

Variant 7.



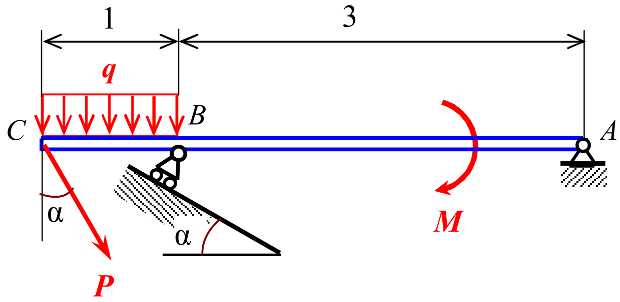
$P = 6$ kN
$M = 5$ kN·m
$q = 1$ kN /m
$\alpha = 45^o$
$G_{AB} = 0$

Variant 8.



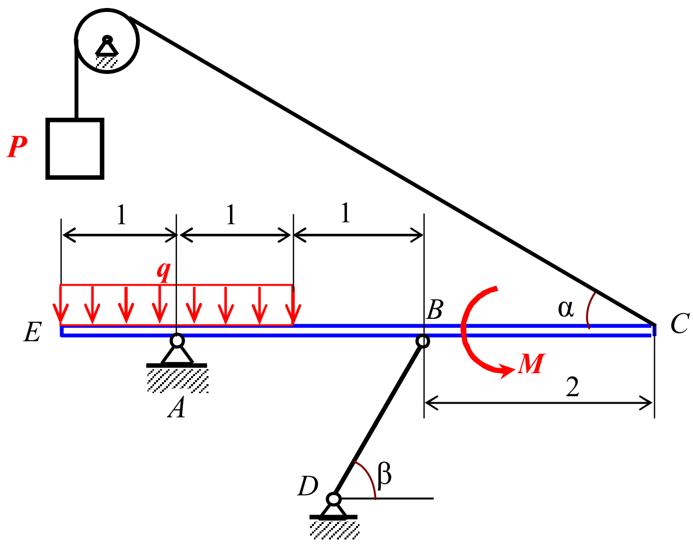
$G_{DK} = G = 16$ kN
$P = 7$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 60^o$

Variant 9.



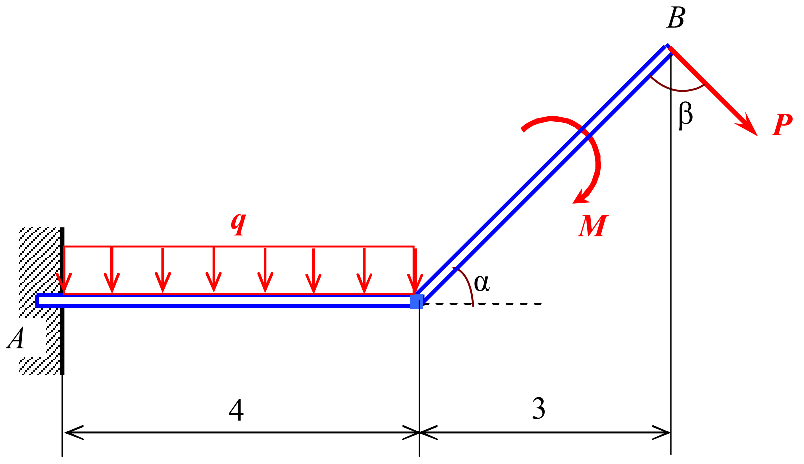
$G_{AC} = G = 6$ kN
$P = 6$ kN
$M = 4$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 30^{\circ}$

Variant 10.



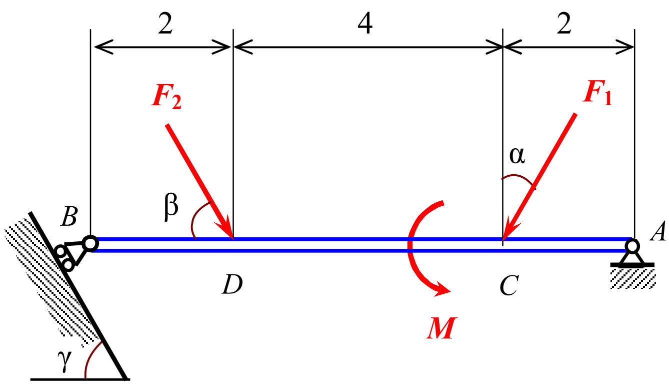
$G_{EC} = G = 10$ kN
$P = 8$ kN
$M = 9$ kN·m
$q = 1$ kN /m
$\alpha = 30^{\circ}$
$\beta = 60^{\circ}$

Variant 11.



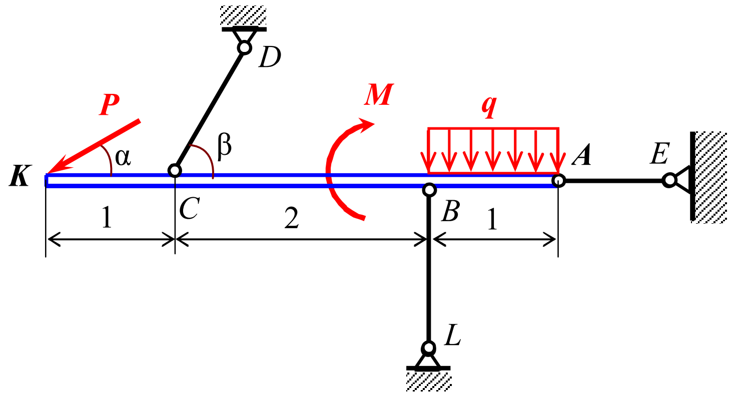
$P = 4$ kN
$M = 7$ kN·m
$q = 0{,}5$ kN /m
$\alpha = 45^{o}$
$\beta = 90^{o}$
$G_{AB} = 0$

Variant 12.



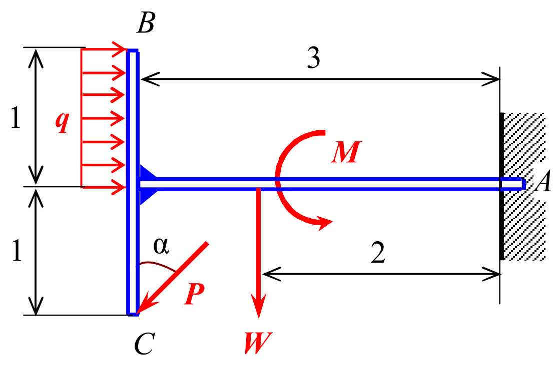
$G_{AB} = G = 8$ kN
$F_1 = 8$ kN
$F_2 = 6$ kN
$M = 6$ kN·m
$\alpha = 30^{o}$
$\beta = 60^{o}$
$\gamma = 60^{o}$

Variant 13.



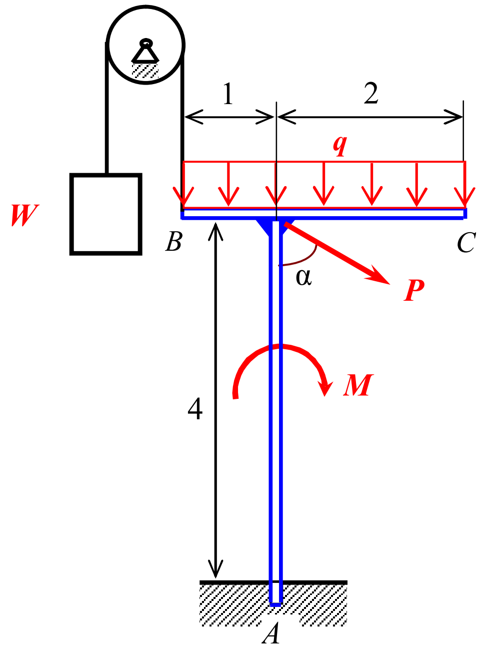
$G_{AK} = G = 12$ kN
$P = 10$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 30^o$
$\beta = 60^o$

Variant 14.



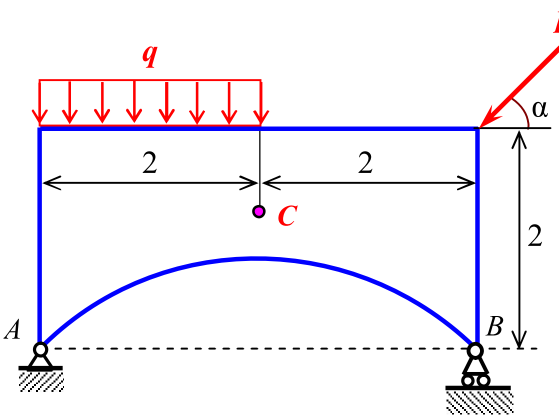
$P = 6$ kN
$W = 10$ kN
$M = 10$ kN·m
$q = 1$ kN /m
$\alpha = 45^o$
$G_{ABC} = 0$

Variant 15.



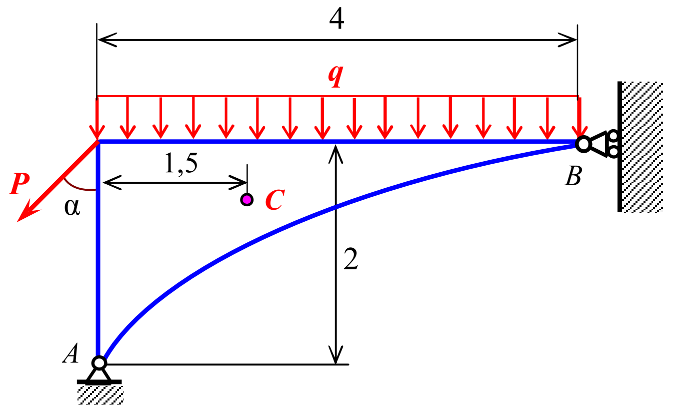
$P = 4$ kN
$W = 4$ kN
$M = 4$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 60^o$
$G_{ABC} = 0$

Variant 16.



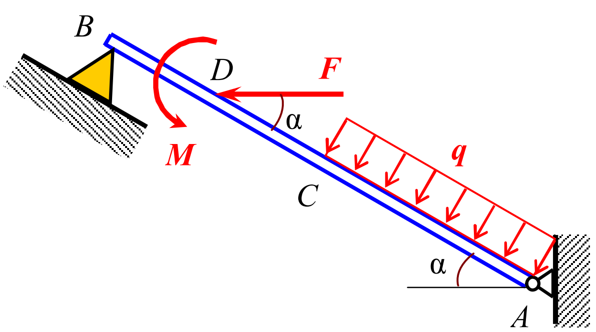
$G_{AB} = G = 20$ kN
$P = 10$ kN
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 45^o$
C = *raskuskese*

Variant 17.



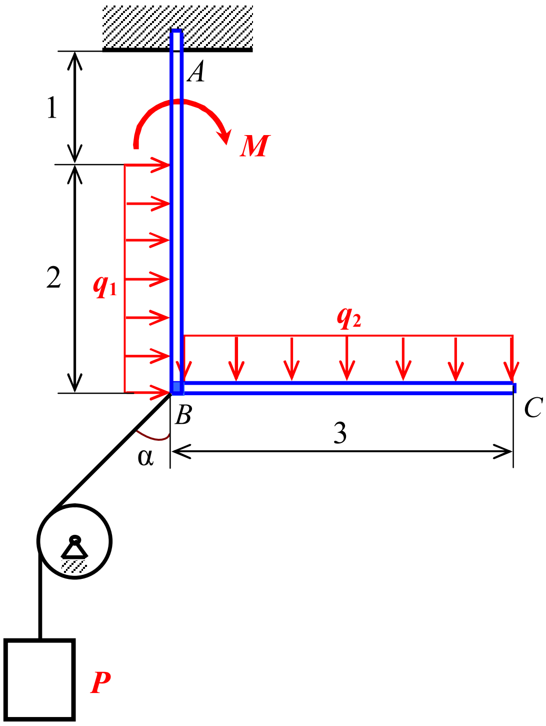
$G_{AB} = G = 25$ kN
$P = 5$ kN
$q = 0{,}5$ kN /m
$\alpha = 45^{o}$
C = *raskuskese*

Variant 18.



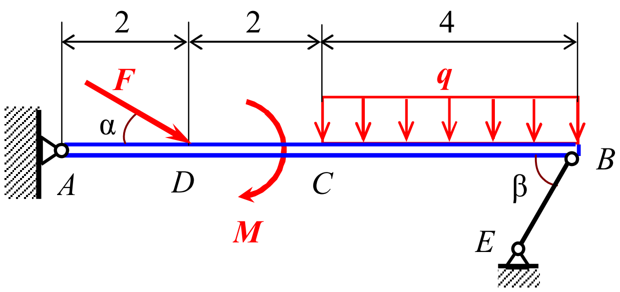
$G_{AB} = G = 10$ kN
$F = 8$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$q \rightarrow$ risti vardaga
$\alpha = 30^{o}$
$AC = CB = 4$ m
$BD = 2$ m

Variant 19.



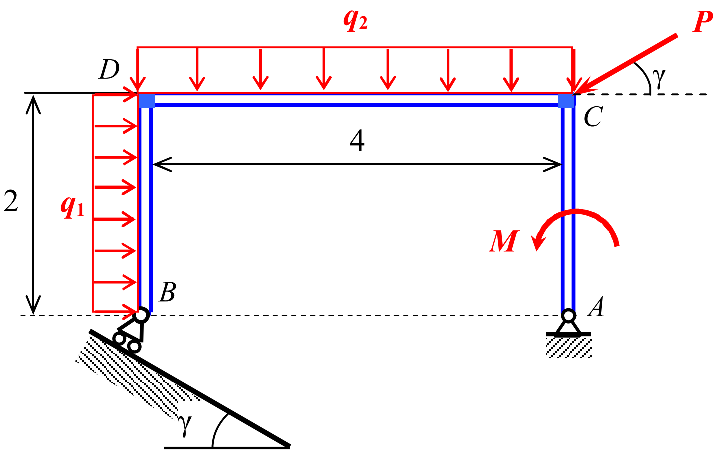
$P = 4$ kN
$M = 8$ kN·m
$q_1 = 1$ kN /m
$q_2 = 2$ kN /m
$\alpha = 45^o$
$G_{ABC} = 0$

Variant 20.



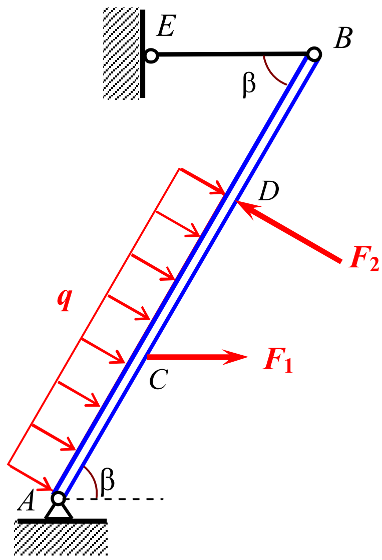
$G_{AB} = G = 10$ kN
$F = 6$ kN
$M = 8$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 30^o$
$\beta = 60^o$

Variant 21.



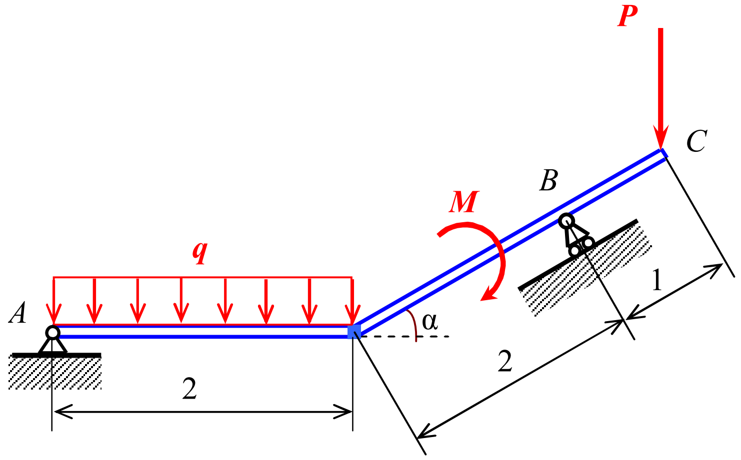
$P = 10$ kN
$M = 8$ kN·m
$q_1 = 4$ kN /m
$q_2 = 6$ kN /m
$\gamma = 30^{\circ}$
$G_{AB} = 0$

Variant 22.



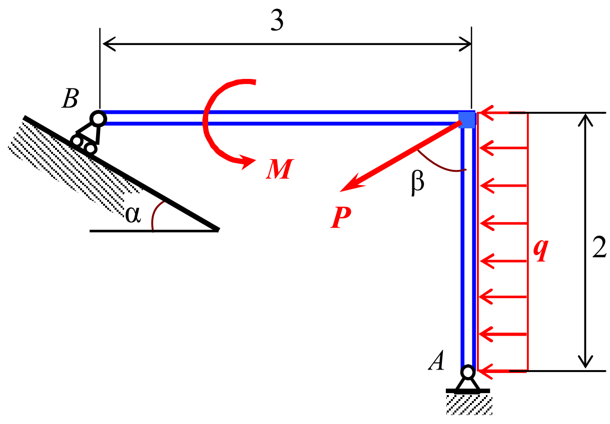
$G_{AB} = G = 8$ kN
$F_1 = 8$ kN
$F_2 = 10$ kN
$q = 2$ kN /m
$F_2 \rightarrow$ risti vardaga
$q \rightarrow$ risti vardaga
$\beta = 60^{\circ}$
$AC = CD = DB = 2$ m

Variant 23.



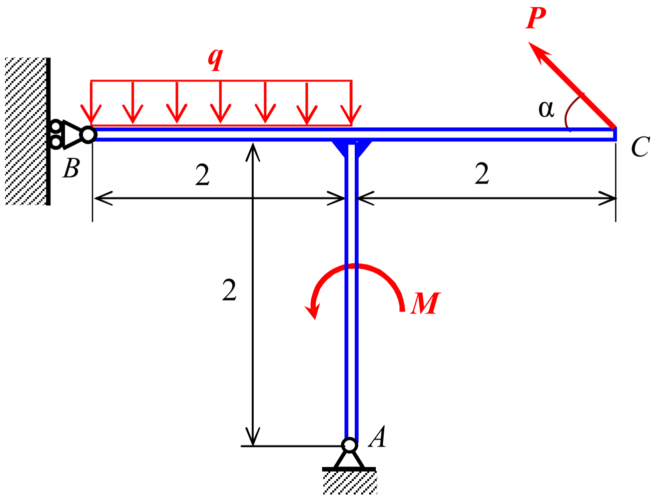
$P = 7$ kN
$M = 10$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 30^{\circ}$
$G_{ABC} = 0$

Variant 24.



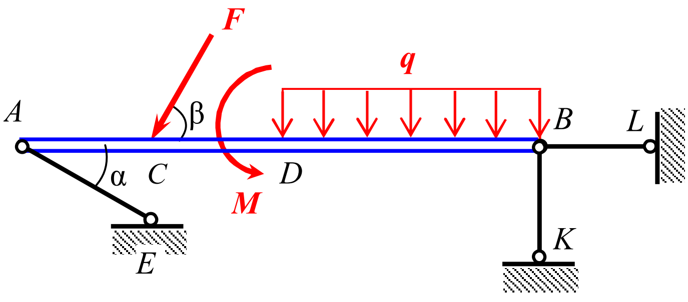
$P = 6$ kN
$M = 7$ kN·m
$q = 1{,}5$ kN /m
$\alpha = 30^{\circ}$
$\beta = 60^{\circ}$
$G_{AB} = 0$

Variant 25.



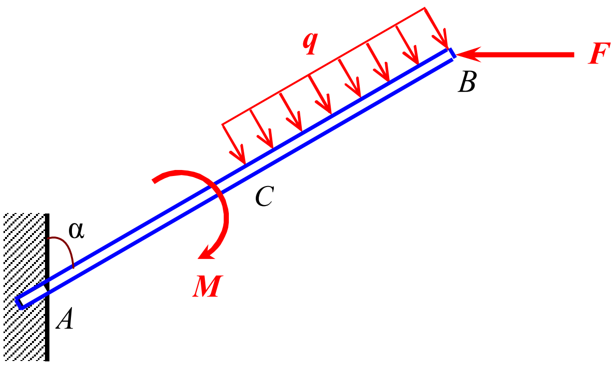
$P = 14$ kN
$M = 20$ kN·m
$q = 0{,}5$ kN /m
$\alpha = 45^o$
$G_{ABC} = 0$

Variant 26.



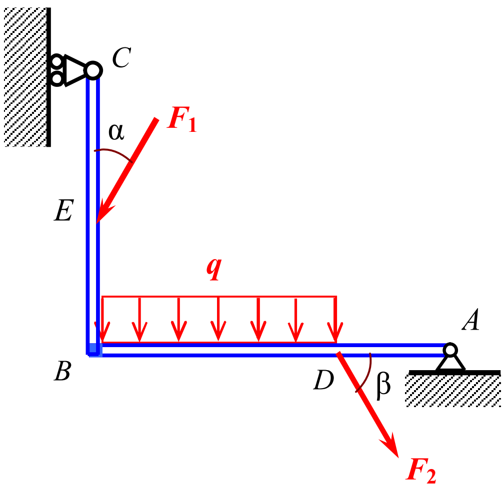
$G_{AB} = G = 6$ kN
$F = 6$ kN
$M = 8$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 30^o$
$\beta = 60^o$
$AC = CD = 2$ m
$DB = 4$ m

Variant 27.



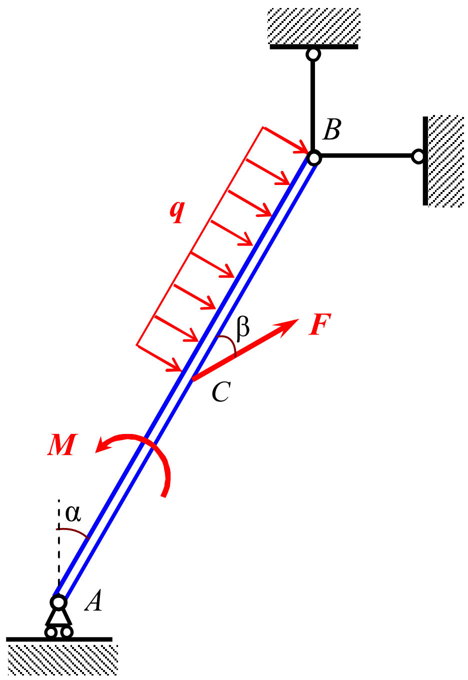
$F = 4$ kN
$M = 8$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 60^{\circ}$
$G_{AB} = 6$ kN
$AC = CB = 2$ m

Variant 28.



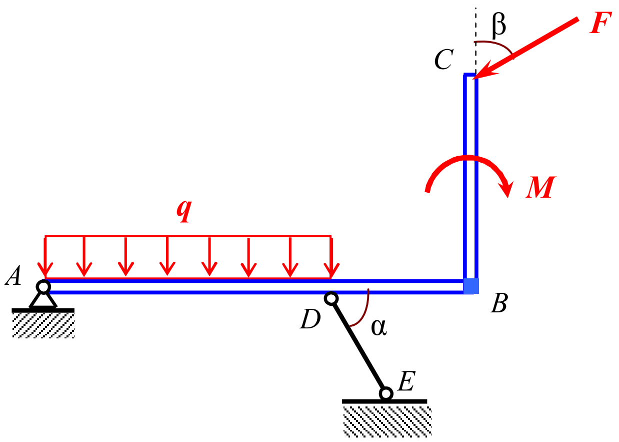
$F_1 = 4$ kN
$F_2 = 6$ kN
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 30^{\circ}$
$\beta = 60^{\circ}$
$G_{ABC} = 0$
$BE = EC = 2$ m
$BD = 4$ m
$AD = 2$ m

Variant 29.



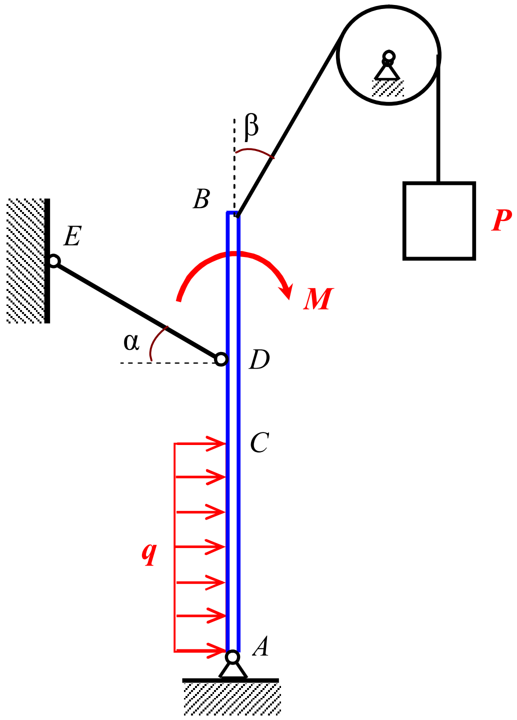
$G_{AB} = G = 8$ kN
$F = 4$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$q \rightarrow$ risti vardaga
$\alpha = 30^{o}$
$\beta = 30^{o}$
$AC = CB = 2$ m

Variant 30.



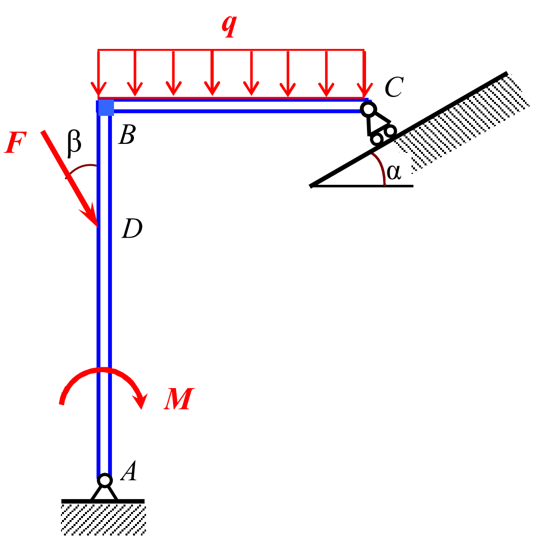
$F = 8$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 60^{o}$
$\beta = 60^{o}$
$G_{ABC} = 0$
$AD = 3$ m
$DB = 1$ m
$BC = 2$ m

Variant 31.



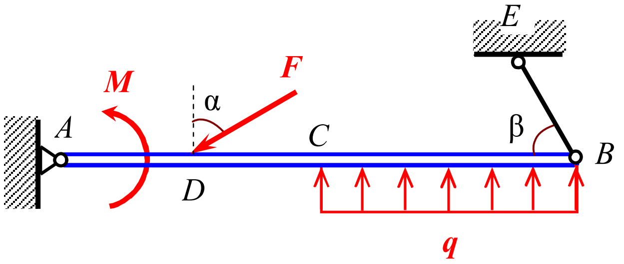
$P = 6$ kN
$M = 5$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$G_{AB} = 2$ kN
$\alpha = 30^{o}$
$\beta = 30^{o}$
$AC = CB = 3$ m
$BD = 2$ m

Variant 32.



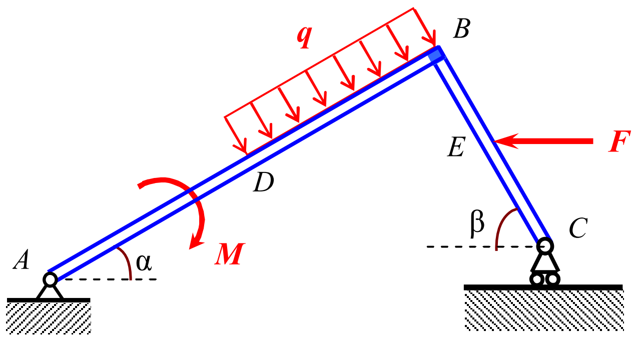
$F = 6$ kN
$M = 4$ kN·m
$q = 3$ kN /m
$G_{ABC} = 0$
$\alpha = 30^{o}$
$\beta = 30^{o}$
$AD = 2$ m
$DB = 1$ m
$BC = 2$ m

Variant 33.



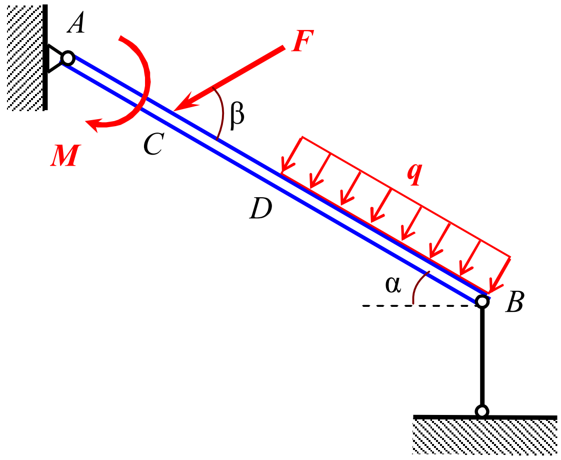
$G_{AB} = G = 4$ kN
$F = 6$ kN
$M = 8$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 60^{o}$
$\beta = 60^{o}$
$AC = CB = 4$ m
$AD = DC$

Variant 34.



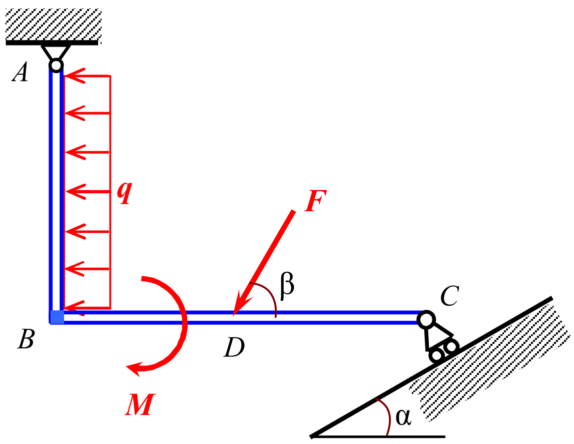
$F = 4$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 3$ kN /m
$q \rightarrow$ risti osaga AB
$G_{ABC} = 0$
$\alpha = 30^{o}$
$\beta = 60^{o}$
$AD = DB = 2$ m
$BE = EC = 1$ m

Variant 35.



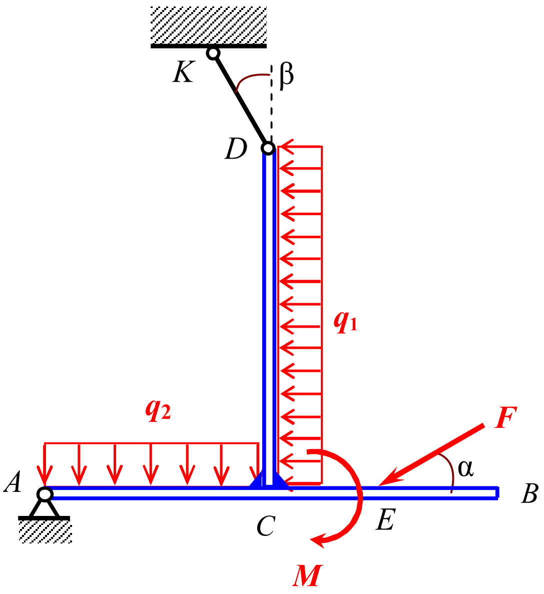
$G_{AB} = G = 4$ kN
$F = 8$ kN
$M = 4$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$q \rightarrow$ risti vardaga
$\alpha = 30^{o}$
$\beta = 60^{o}$
$AD = DB = 2$ m
$AC = CD = 1$ m

Variant 36.



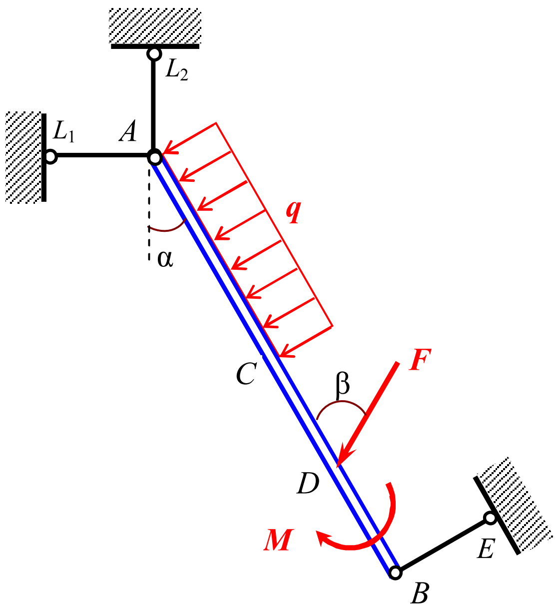
$F = 6$ kN
$M = 4$ kN·m
$q = 3$ kN /m
$G_{AB} = G_1 = 2$ kN
$G_{BC} = G_2 = 3$ kN
$\alpha = 30^{o}$
$\beta = 60^{o}$
$AB = 2$ m
$BC = 3$ m
$BD = DC$

Variant 37.



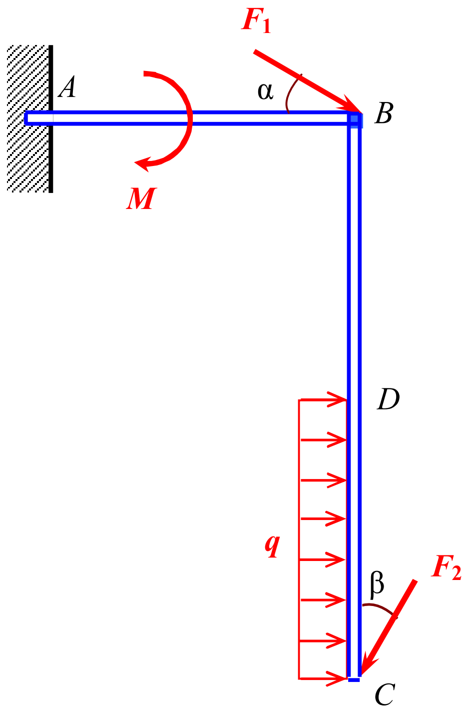
$F = 6$ kN
$M = 8$ kN·m
$q_1 = 2$ kN /m
$q_2 = 2$ kN /m
$G_{ABCD} = 0$
$\alpha = 30^{\circ}$
$\beta = 30^{\circ}$
$AC = CB = 2$ m
$CD = 3$ m
$CE = EB$

Variant 38.



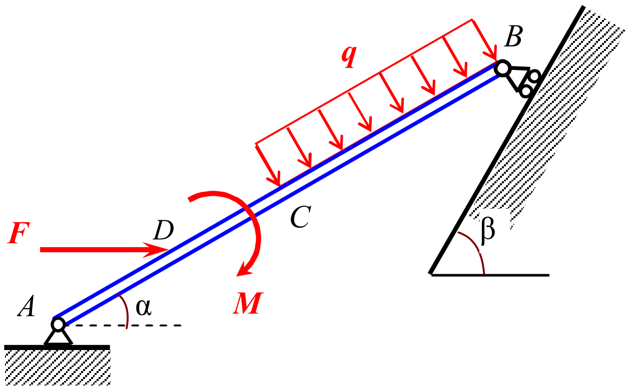
$G_{AB} = G = 6$ kN
$F = 8$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$q \rightarrow$ risti vardaga
$BE \rightarrow$ risti vardaga
$\alpha = 30^{\circ}$
$\beta = 60^{\circ}$
$AC = CB = 2$ m
$CD = DB$

Variant 39.



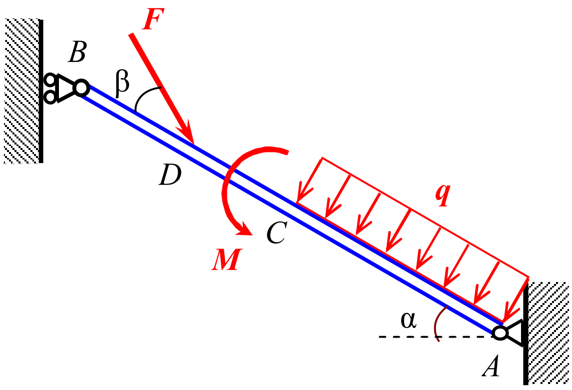
$F_1 = 4$ kN
$F_2 = 8$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$\alpha = 30^o$
$\beta = 30^o$
$G_{AB} = G_1 = 2$ kN
$G_{BC} = G_2 = 4$ kN
$AB = 2$ m
$BD = DC = 2$ m

Variant 40.



$G_{AB} = G = 4$ kN
$F = 6$ kN
$M = 5$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$q \rightarrow$ risti vardaga
$\alpha = 30^o$
$\beta = 60^o$
$AC = CB = 2$ m
$AD = DC = 1$ m

Näiteülesanne nr.1.



$G_{AB} = G = 6$ kN
$F = 8$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 3$ kN /m
$q \rightarrow$ risti vardaga
$\alpha = 30^{\circ}$
$\beta = 30^{\circ}$
$AB = l = 4$ m
$AC = CB = 2$ m
$CD = DB = 1$ m

Joonis 1.1

Lahendus.

Vaatleme absoluutselt jäiga varda AB tasakaalu. Leida tuleb vardale mõjuvad toereaktsioonid. Selle ülesande lahendamiseks tuleb kõigepealt teha jõudude skeem. Suurem osa jõududest on juba joonisele kantud, puuduvad toereaktsioonid ja varda raskusjõud. Peale selle – jaotatud jõu tuleb alati asendada koondatud jõuga ehk üksikjõuga, mille tähistame $\vec{Q}$. Kuna kõikide variantide puhul on alati tegemist ***ühtlaselt*** jaotatud jõuga, siis tuleb vastava koondatud jõu $\vec{Q}$ rakendada jaotus-piirkonna keskpunkti, siin lõigu AC keskpunkti K (joonis 1.2). Selle jõu $\vec{Q}$ suund peab olema täpselt ühesugune jaotatud jõu $\vec{q}$ suunaga. Koondatud jõu $\vec{Q}$ mooduli arvutame alati valemiga

$$Q = q \cdot l_q$$

kus l_q on jaotuspiirkonna pikkus, siin lõigu AC pikkus mis on 2 meetrit. Seetõttu saame

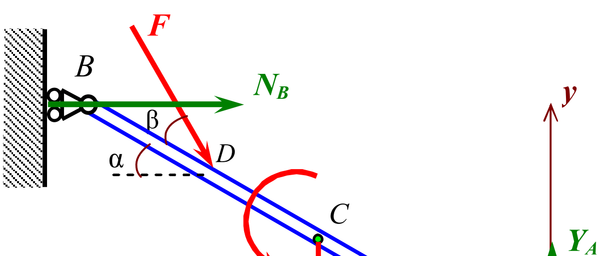
$$Q = 3 \cdot 2 = 6 \text{ kN.}$$

Järgmine on raskusjõud. Sellega on asi lihtne – raskusjõu rakendame varda keskpunkti ja suuname otse alla. Nüüd toereaktsioonid. Tugesid on kaks. Punktis A on silindriline liigend, mis on seina küljes kinni. Punktis B on küll ka silindriline liigend, kuid see toetub ratastele ja on seetõttu hoopis teises olukorras kui ots A. Tuletame siinjuures meelde kaht tähtsat reeglit:

1. Kui mingi keha on kinnitatud silindrilise liigendiga, mis on aluse (või seina) **küljes kinni, siis tuleb alati joonistada kaks reaktsioonjõudu – teineteisega risti, telgede positiivsetes suundades.**

2. Kui keha on kinnitatud liigendiga, mis toetub ratastele, siis joonistatakse ainult üks jõud, mis on risti pinnaga, kuhu rattad toetuvad.

Nüüd on selge, et varda otsa A tuleb joonistada 2 reaktsioonjõudu, millede suunad määravad koordinaatteljed. Selleks defineerime kõigepealt teljed. Võtame koordinaattelgede alguspunktiks näiteks punkti A ja suuname x-telje mööda horisontaali paremale, y-telje otse üles (joonis 1.2). Kanname sinna nüüd ka kõik puuduvad jõud, millest oli juttu. Tulemus on näha joonisel 1.2, kus tundmatud toereaktsioonid on joonistatud selguse mõttes rohelistena.



Joonis 1.2

Varda otsas *B* on reaktsioonjõud $\vec{N}_B$ tõepoolest risti vertikaalseinaga, sest liigendi rattad toetuvad just selle seina vastu. Jõudude skeem ongi valmis. Vardale *AB* mõjub seega 6 jõudu ja 1 jõupaar momendiga *M*. Tundmatuid on kolm: reaktsioonjõud $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ ja $\vec{N}_B$, millede suurused tulebki leida. Tasapinnalise jõusüsteemi puhul on ühe keha korral kasutada just 3 tasakaaluvõrrandit:

1) *kõikide jõudude projektsioonide summa x-teljele on võrdne nulliga*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,, \tag{1.1}$$

2) *kõikide jõudude projektsioonide summa y-teljele on võrdne nulliga*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,, \tag{1.2}$$

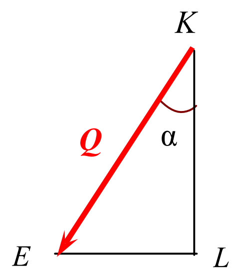
3) *kõikide jõudude momentide summa suvalise punkti suhtes on võrdne nulliga*. Selle punkti on kasulik valida nii, et võimalikult palju tundmatuid toereaktsioone langeks välja. Antud juhul on kohe näha, et momendid võiks leida punkti *A* suhtes, sest jõud $\vec{X}_A$ ja $\vec{Y}_A$ omaenda rakenduspunkti *A* suhtes momenti ju ei anna. Seega

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0\,. \tag{1.3}$$

Enne kui hakkame projektsioonivõrrandeid koostama, kontrollime, kas kõik vajalikud nurgad on joonisel olemas. Selleks eraldame oma mõttes välja need jõud, mis ei ole paralleelsed ei *x*-teljega ega *y*-teljega. Neid võiks mugavuse mõttes tinglikult nimetada nn „viltusteks“ jõududeks. Antud ülesandes on neid ainult kaks: $\vec{F}$ ja $\vec{Q}$. Kõikidel nn „viltustel“ jõududel ***peab*** joonisel olema näidatud nurk. Ei ole tähtis, kas see nurk on *x*-telje sihiga või *y*-telje sihiga, aga mingi nurk peab olema näidatud. Paneme tähele, et jõud $\vec{Q}$ moodustab vertikaaliga (mis on ju *y*-telje sihiks) nurga α. Jõud $\vec{F}$ aga moodustab horisontaaliga nurga $\alpha+\beta$. Nüüd võib hakata projektsioonvõrrandeid koostama. Kindluse mõttes kordame siiski veel üle kolm tähtsat projekteerimise reeglit:

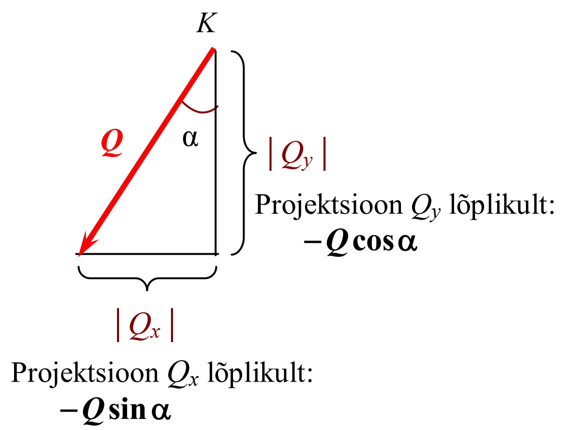
1. ***kui jõud on risti teljega, millele me projekteerime, siis see jõud antud teljele projektsiooni ei anna***;
2. ***kui jõud on paralleelne teljega, millele me projekteerime, siis selle jõu projektsioon on võrdne jõu mooduliga, võetuna vastava märgiga***. Plussmärgi (+) paneme ette siis, kui jõu suund ühtib vaadeldava telje positiivse suunaga; miinusmärgi (-) paneme siis, kui jõu suund on vastupidine telje positiivse suunaga;
3. ***nende jõudude puhul, mis ei ole vaadeldava teljega risti ega ka mitte paralleelsed*** (nn „viltuste“ jõudude puhul) ***on vaja tegelikult lahendada täisnurkse kolmnurga.*** See kolmnurk koostatakse nii, et vaadeldav jõud oleks hüpotenuusiks, *kaatetid* peavad

seejuures tingimata olema *paralleelsed koordinaattelgedega*. Kolmnurgas tuleb ära märkida ka üks nurk. Näiteks jõu $\vec{Q}$ puhul näeks see kolmnurk suurendatult välja nii



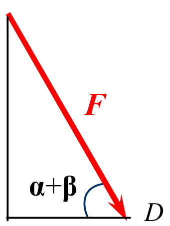
Joonis 1.3

Selle jõu projekteerimiseks näiteks *x*-teljele tuleb leida just *x*-teljega paralleelse kaateti pikkus (siin *EL*) ning ette panna vastavalt märgireeglile õige märk. Projekteerimiseks *y*-teljele tuleb leida *y*-teljega paralleelse kaateti pikkus *LK* ning ka siia ette panna vastavalt märgireeglile õige märk.



Joonis 1.4

Jõu $\vec{F}$ puhul näeks kolmnurk välja nii



Joonis 1.5

Projektsioonid telgedele on selle põhjal

$$F_x = +F\cos(\alpha+\beta)$$
$$F_y = -F\sin(\alpha+\beta)$$

Tavaliselt, kui ollakse mingi kogemuse juba omandanud, siis neid kolmnurki enam välja ei joonistata, vaid see tehakse kõik peast.
Kui nüüd rääkida veel jõudude projekteerimisest *x*-teljele, siis: projektsiooni ei anna *x*-teljele jõud $\vec{G}$ ja $\vec{Y}_A$, mis on *x*-teljega risti. Jõud $\vec{X}_A$ on paralleelne *x*-teljega ja nõuab märki +, jõud $\vec{N}_B$ on samuti paralleelne *x*-teljega ning nõuab märki +. Niimoodi moodustamegi projektsioonvõrrandid:

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0: \qquad X_A + N_B - Q\sin\alpha + F\cos(\alpha+\beta) = 0\,, \tag{1.4}$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0: \qquad Y_A - G - Q\cos\alpha - F\sin(\alpha+\beta) = 0\,. \tag{1.5}$$

Nüüd tuleb hakata koostama momentide võrrandit. Meeldetuletuseks – ***jõu moment punkti suhtes tasapinnalisel juhul on märgiga suurus, mille absoluutväärtus on võrdne jõu mooduli ja õlapikkuse korrutisega ja mille märk valitakse vastavalt märgireeglile.*** Seega $M = (\pm)F \cdot h$, kus $\pm$ sulgudes tähendabki vajaliku märgi valimist vastavalt märgireeglile. Selle põhjal *paneme märgi* **+** *siis, kui jõud püüab pöörelda ümber vaadaldava punkti vastupäeva*, ning paneme märgi **–** (miinus) siis, kui jõud püüab pöörelda päripäeva. ***Märgireegel*** näeb seega välja nii

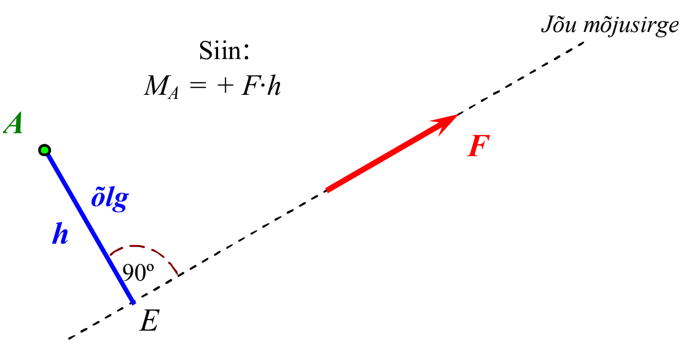
Joonis 1.6

Õlaks nimetatakse ristlõiku, mis on vaadeldavast punktist tõmmatud jõu mõjusirgeni.

Toome ühe näite jõu momendi leidmise kohta. Olgu meil vaja leida jõu $\vec{F}$ moment punkti A suhtes (joonis 1.7).

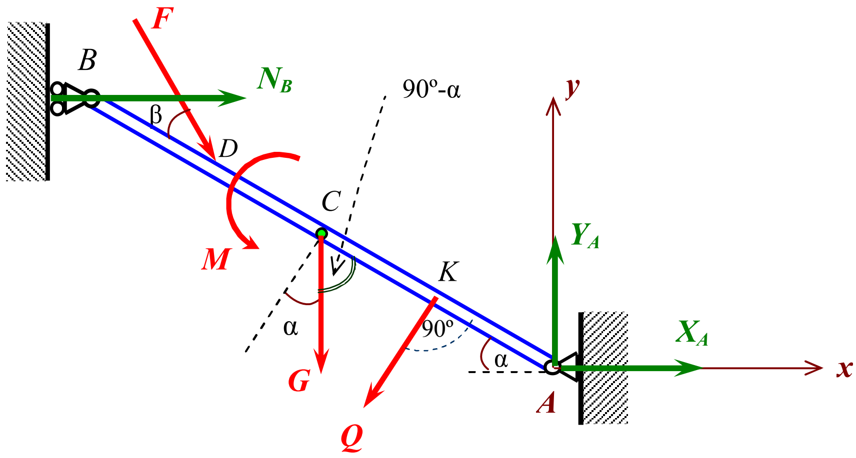
Joonis 1.7

Tõmbame kõigepealt jõu mõjusirge ja kanname joonisele ka jõu õla (joonis 1.8).



Joonis 1.8

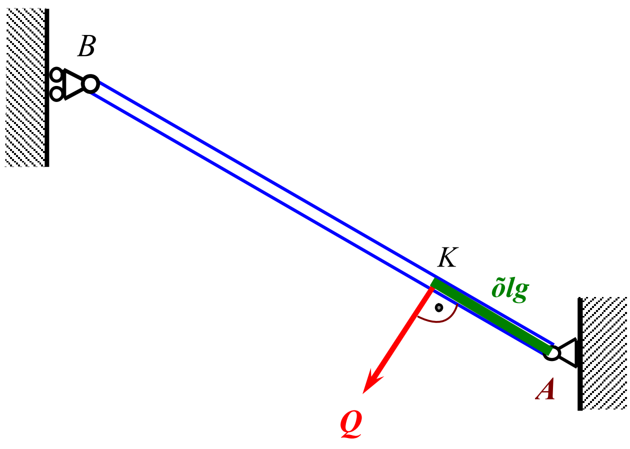
Siis siin $M_A(\vec{F}) = +F \cdot h = +F \cdot AE$. Siit saame teha ühe tähtsa järelduse: ***kui jõu mõjusirge läbib punkti, mille suhtes me momenti leiame, siis selle jõu moment antud punkti suhtes on võrdne nulliga.*** Selle reegli põhjal on tõepoolest jõudude $\vec{X}_A$ ja $\vec{Y}_A$ momendid (joonis 1.2) punkti A suhtes võrdsed nulliga, sest nende jõudude alguspunktiks ongi punkt A ja siis ju loomulikult nende mõjusirged läbivad punkti A. Teeme uue joonise ja kanname momentide leidmiseks mõned nurgad joonisele.



Joonis 1.9

Nagu juba mainitud, on jõudude $\vec{X}_A$ ja $\vec{Y}_A$ momendid punkti A suhtes võrdsed nulliga. Jäävad järele veel 4 jõudu ja üks jõupaar. Jõupaar kantakse joonisele tavaliselt tinglikult kaarnoole abil, mille noole suund näitab ühtlasi ära, mis suunas jõupaar püüab keha pöörata. Kui rääkida päris täpselt, siis peaks ütlema: *jõupaar, mille moment on M*; aga sageli öeldakse mugavuse mõttes lihtsalt: *moment M* (see ei ole küll päris täpne, aga siiski läbilöönud nimetus). Selle reegel on väga lihtne – ***jõupaari moment kirjutatakse ainult momentide võrrandisse ja ta nõuab lihtsalt õige märgi ettepanemist.*** Antud ülesandes see tähendab seda, et momentide võrrandisse tuleb kaarnoolest kirja panna $+M$.

Nüüd veel 4 koondatud jõudu: $\vec{N}_B$, $\vec{G}$, $\vec{Q}$ ja $\vec{F}$. Kõige lihtsamad nendest on need jõud, mis on vardaga risti. Antud juhul on selliseks jõuks $\vec{Q}$. Teeme lisajoonise jõu $\vec{Q}$ momendi leidmiseks.



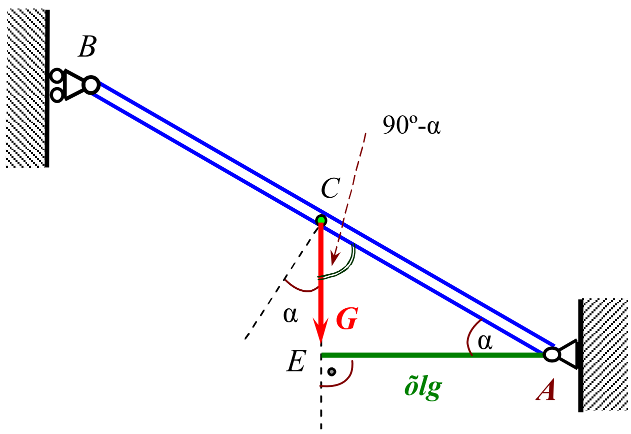
Joonis 1.10

Kui jõud on risti vardaga, siis on selle jõu õlaks alati vastav varda osa (jõu rakenduspunktist kuni selle punktini, mille suhtes me momenti leiame, milleks siin on punkt A). Jooniselt 1.10 on näha, et tõepoolest on jõu $\vec{Q}$ õlg risti jõu mõjusirgega (siin: jõuga). Kuna jõud $\vec{Q}$ püüab pöörelda ümber punkti A vastupäeva, siis tuleb selle jõu moment punkti A suhtes võtta märgiga pluss (+). Seega on jõu $\vec{Q}$ moment punkti A suhtes

$$M_A(\vec{Q}) = +Q \cdot \text{õlg} = +Q \cdot AK = Q \cdot \frac{l}{4}$$

Paneme tähele, et: *kui jõud on risti vardaga, siis ei mingit siinust ega koosinust selle jõu momendi avaldisse ei tule*, ainult jõu suurus korrutatud vastava varda osa pikkusega ning lõpuks märk ette.

Nüüd on jäänud veel jõud $\vec{N}_B$, $\vec{G}$ ja $\vec{F}$. Need jõud ei ole vardaga risti ja nende (punkti A suhtes võetud) momentide avaldistesse tuleb küll siinus või koosinus vajalikust nurgast. Leiame nüüd jõu $\vec{G}$ momendi punkti A suhtes. Teeme jälle abijoonise selle jõu õla äranäitamiseks punkti A suhtes.



Joonis 1.11

Kuna jõud $\vec{G}$ püüab pöörelda ümber punkti A vastupäeva, siis on tema moment selle punkti suhtes positiivne. Jõu $\vec{G}$ õlaks punkti A suhtes on ristlõik AE. Selle pikkuse leidmiseks tuleb kolmnurgas AEC leida kaateti AE pikkus, kui hüpotenuusiks on vastav varda osa AC. Kui tähistada nagu tavaliselt varda pikkuse tähega l, siis on AC ju pool vardast ehk $l/2$. Kuna kaateti AE lähiteravnurgaks on nurk α, siis saamegi kaateti AE pikkuseks $AE = AC \cdot \cos\alpha = \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha$.

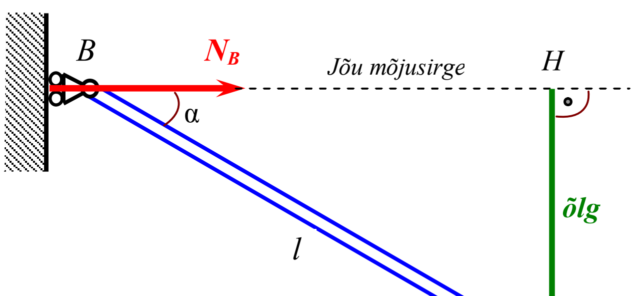
Sama kaateti võib leida ju ka vastasnurga abil. Selleks nurgaks on $90° - \alpha$. Nagu teada kooligeomeetriast, vastasnurga puhul tuleb kasutada alati siinust. Seetõttu teise nurga abil saame $AE = AC \cdot \sin(90° - \alpha) = \frac{l}{2} \cdot \sin(90° - \alpha)$, mis annab muidugi sama tulemuse. Seetõttu saame jõu $\vec{G}$ momendiks punkti A suhtes

$$M_A(\vec{G}) = +G \cdot \text{õlg} = +G \cdot AE = Q \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha$$

ehk kolmnurga AEC teise teravnurga ($90° - \alpha$) kasutamisel

$$M_A(\vec{G}) = +G \cdot \text{õlg} = Q \cdot \frac{l}{2} \sin(90° - \alpha)$$

Nüüd võtame käsile jõu $\vec{N}_B$. Teeme väikese abijoonise.

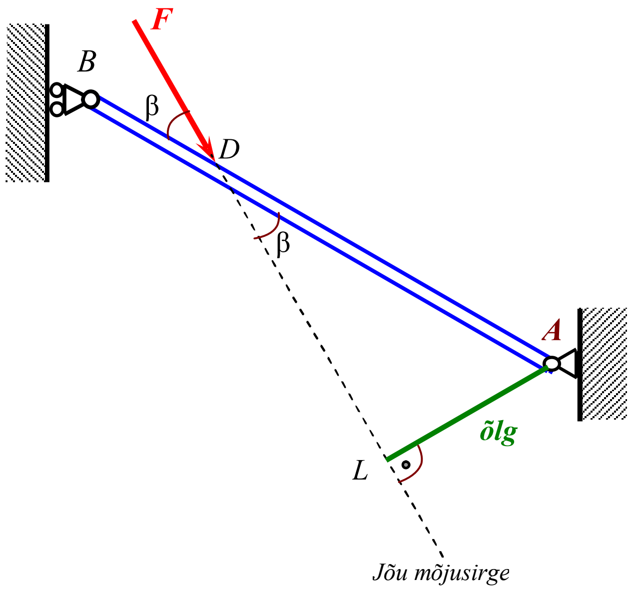


Joonis 1.12

Joonise 1.12 põhjal on kerge kirja panna selle jõu momendi A suhtes, mis tuleb märgiga *miinus*, s.t

$$M_A(\vec{N}_B) = -N_B \cdot \text{õlg} = -N_B \cdot AH = -N_B \cdot l \sin\alpha$$

Lõpuks tuleb leida veel jõu $\vec{F}$ moment punkti A suhtes. Teeme ka siin selguse mõttes abijoonise.



Joonis 1.13

Jõud $\vec{F}$ püüab pöörelda ümber punkti A vastupäeva, seega on tema moment punkti A suhtes positiivne. Jõu $\vec{F}$ õlaks punkti A suhtes on ristlõik AL. Õlapikkuse arvutamiseks tuleb leida täisnurksest kolmnurgast ALD kaateti AL pikkus. Kuna kolmnurga hüpotenuus AD on $\frac{3}{4}l$, siis

$$M_A(\vec{F}) = +F \cdot \text{õlg} = +F \cdot AL = F \cdot \frac{3l}{4}\sin\beta$$

Kõikide jõudude momendid punkti A suhtes ongi leitud. Kokkuvõttes näeb momentide võrrand antud juhul välja nii

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0: \qquad M + Q\cdot\frac{l}{4} + G\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha + F\cdot\frac{3l}{4}\sin\beta - N_B\cdot l\cdot\sin\alpha = 0 \qquad (1.6)$$

Avaldised (1.4), (1.5) ja (1.6) moodustavadki võrrandsüsteemi kolme tundmatu: X_A, Y_A ja N_B leidmiseks. Toome need võrrandid selguse mõttes siin veelkord ära

$$1)\ X_A + N_B - Q\sin\alpha + F\cos(\alpha+\beta) = 0, \qquad (1.7a)$$

2) $Y_A - G - Q\cos\alpha - F\sin(\alpha+\beta) = 0$, (1.7b)

3) $M + Q\cdot\frac{l}{4} + G\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha + F\cdot\frac{3l}{4}\sin\beta - N_B\cdot l\cdot\sin\alpha = 0$. (1.7c)

Selle võrrandsüsteemi lahendamine ei ole raske. Kolmandast võrrandist võime kohe leida jõu N_B suuruse, teisest võrrandist saame jõu Y_A suuruse. Kui jõu N_B suurus juba teada, siis esimesest võrrandist leiame jõu X_A suuruse.

Leiamegi kolmandast võrrandist, et

$$N_B\cdot l\cdot\sin\alpha = M + Q\cdot\frac{l}{4} + G\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha + F\cdot\frac{3l}{4}\sin\beta$$

millest

$$N_B = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\left\{\frac{M}{l} + \frac{Q}{4} + \frac{G}{2}\cos\alpha + \frac{3F}{4}\sin\beta\right\}$$

Paneme siia nüüd arvud asemele. Kuna $G = 6$ kN, $F = 8$ kN, $Q = 6$ kN, $M = 6$ kN·m, $l = 4$ m, $\alpha = 30°$ ja $\beta = 30°$, siis saame

$$N_B = \frac{1}{\sin 30°}\cdot\left\{\frac{6}{4} + \frac{6}{4} + \frac{6}{2}\cdot\cos 30° + \frac{3\cdot 8}{4}\cdot\sin 30°\right\}$$

millest

$$N_B = 2\cdot\left\{6 + \frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\right\} = 12 + 3\sqrt{3} = 17{,}196 \approx 17{,}20 \text{ kN}$$

Nüüd leiame teisest võrrandist toereaktsiooni Y_A

$$Y_A = G + Q\cos\alpha + F\sin(\alpha+\beta)$$

ning kui panna arvud asemele, saame

$$Y_A = 6 + 6\cos 30° + 8\sin 60° = 6 + 7\sqrt{3} = 18{,}124 \approx 18{,}12 \text{ kN}$$

Esimesest võrrandist leiame lõpuks toereaktsiooni X_A

$$X_A = -N_B + Q\sin\alpha - F\cos(\alpha+\beta)$$

$$X_A = -17{,}20 + 6\sin 30° - 8\cos 60° = -18{,}20 \text{ kN}$$

Toereaktsioon X_A tuli negatiivne. See tähendab, et selle jõu suuruseks (mooduliks) on ikka 18,20 kN, aga ta on suunatud hoopis x-telje negatiivses suunas (vastupidiselt joonisel näidatule).

Vastus. Varda AB toereaktsioonid on järgmised:

$\mathbf{X_A = -18{,}20}$ **kN**,

$\mathbf{Y_A = 18{,}12}$ **kN**,

$\mathbf{N_B = 17{,}20}$ **kN**.

Märkus 1**:** Juba joonisel 1.9 panime tähele, et jõud $\vec{N}_B$ ja $\vec{G}$ on omavahel risti. Kui uurida nüüd momentide võrrandit (1.7c), siis paneme tähele, et jõu $\vec{G}$ momendi avaldises on **cosα**, jõu $\vec{N}_B$ momendi avaldises aga **sinα**. Selles avaldub **ristseisu raudne reegel**: ***Kui üks jõud tuleb mingisse tasakaaluvõrrandisse (mingi nurga) siinuse abil, siis selle jõuga ristuv jõud tuleb samasse võrrandisse sama nurga koosinuse abil***; *ning ka vastupidi* – kui üks jõud tuleb võrrandisse (mingi nurga) koosinuse abil, siis selle jõuga ristuv jõud tuleb samasse võrrandisse (sama nurga) siinuse abil.

Ristseisu tunnust võime näha ka ühe ja sama jõu projekteerimisel ristuvatele telgedele. Näiteks võtame kasvõi jõu $\vec{F}$ projektsioonid x- ja y-telgedele, mis on ju tõepoolest teineteisega risti. Võrrandist (1.7a) näeme, et jõu $\vec{F}$ projektsioon x-teljele tuleb $\cos(\alpha+\beta)$ abil, sellesama jõu projektsioon y-teljele (avaldis 1.7b) tuleb tõepoolest $\sin(\alpha+\beta)$ kaudu. Seega – *ühe ja sama jõu* *projektsioonid x- ja y-telgedele ei tule kunagi (mingi nurga) ühe ja sama trigonomeetrilise funktsiooni kaudu.*

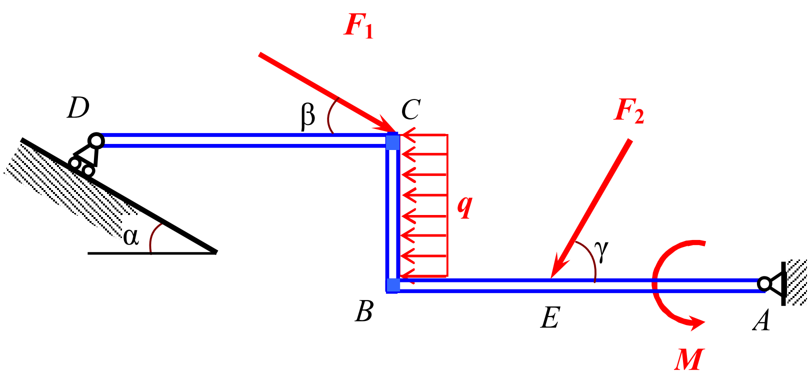
Märkus 2*:** lihtvarrasteks nimetatakse teatavasti selliseid vardaid, mis koosnevad ainult ühest sirgest osast. *Lihtvarraste puhul* võib nimelt kasutusele võtta veel ühe nn **momendi nurga reegli:** ***lihtvarraste momentide võrrandi koostamisel tuleb jõu momendi avaldisse siinus nurgast, mis on jõu ja varda vahel (muidugi juhul, kui punkt, mille suhtes me momendid leiame, on sama varda punkt). Võtame näiteks jõu $\vec{F}$: jooniselt on näha kohe, et jõu $\vec{F}$ ja varda vahel on nurk β, seega peab momentide võrrandis jõu $\vec{F}$ avaldises olema sinβ. Nii see tõepoolest ongi. Sama võib öelda ka teiste jõudude kohta, näiteks jõu $\vec{N}_B$ ja varda vahel on nurk α ja tõepoolest selle jõu momendi avaldises on sinα.

Juhul, kui ei ole tegemist lihtvarrastega, vaid L-kujuliste, T-kujuliste või veel keerulisemate varrastega, siis on asi keerulisem. Seda juhtumit käsitleme teises näiteülesandes.

Märkus 3*:** kasulik on teada veel üht reeglit, nn **paralleelsete jõudude reeglit**: ***ühte ja samasse tasakaaluvõrrandisse tulevad paralleelsed jõud alati ühe ja sama trigonomeetrilise funktsiooni abil ühest ja samast nurgast. Näiteks kui üks jõud tuleb mingisse tasakaaluvõrrandisse funksiooni **sin30º** abil, siis selle jõuga paralleelne jõud peab tulema samasse võrrandisse samuti **sin30º** abil. Või jälle – kui näiteks ühe jõu korral läheb vaja funktsiooni **cosβ**, siis siis selle jõuga paralleelne jõud tuleb samasse võrrandisse samuti **cosβ** abil.

Nende reeglite tundmine kergendab tasakaaluvõrrandite koostamist ja samuti pärast koostamist nende kontrollimist, mida peab lahendaja ju ka alati tegema.

Näiteülesanne nr.2.



$F_1 = 8$ kN
$F_2 = 4$ kN
$M = 6$ kN·m
$q = 2$ kN /m
$G_{ABCD} = 0$
$\alpha = 30^\circ$
$\beta = 30^\circ$
$\gamma = 60^\circ$
$AB = l_1 = 5$ m
$BC = l_2 = 2$ m
$CD = l_3 = 4$ m
$AE = 3$ m

Joonis 2.1

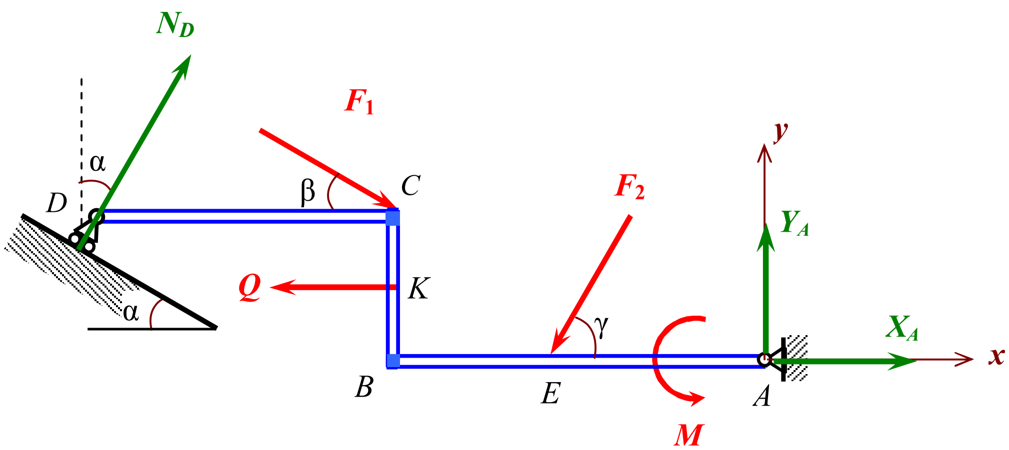
Lahendus.

Siin on tegemist kaunis keerulise kehaga. See koosneb nagu küll kolmest osast, kuid need osad on omavahel jäigalt ühendatud (näiteks kokku keevitatud) ja seetõttu **on** ikkagi **tegemist üheainsa kehaga**. Kõigepealt teeme jõudude skeemi.

Osa jõudusid on ette antud ja joonisele ka juba kantud. Mis tuleb juurde panna? Kõigepealt raskusjõu küsimus. Antud ülesande tingimuste põhjal aga keha enda kaalu ei arvestata. Ilmselt on keha enda kaal tühine võrreldes sellele kehale mõjuvate jõududega, mistõttu võibki lugeda selle keha kaalu nulliks ja raskusjõudu järelikult joonistama ei pea. Joonisele tuleb veel kanda toereaktsioonid, ning peale nende ka jaotatud jõud tuleb asendada koondatud jõuga. Tähistame selle koondatud jõu nagu ikka tähega $\vec{Q}$. See tuleb rakendada lõigu BC keskpunkti K ja suunata samas suunas jaotatud jõuga $\vec{q}$. Jõu $\vec{Q}$ mooduliks saame siin

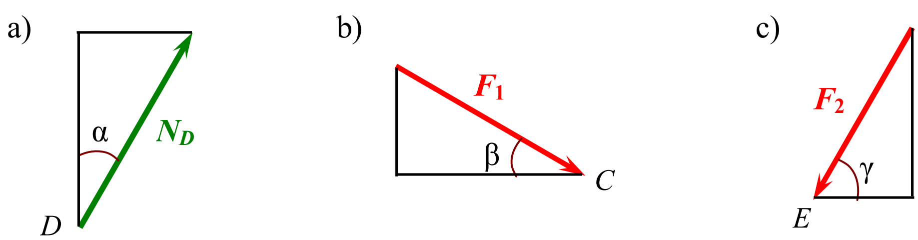
$$\left|\vec{Q}\right| = Q = q \cdot l_q = q \cdot l_2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ kN}$$

Tugesid on kaks. Otsas A on tavaline silindriline liigend, mis on aluse küljes kinni. Sinna tuleb joonistada kaks jõudu teineteisega risti, telgede positiivsetes suundades. Teljed võtame nagu tavaliselt – x-telg mööda horisontaali paremale, y-telje vertikaalselt üles. Keha otsas D on küll liigend, kuid see toetub ratastele. Sel juhul joonistame sinna ainult ühe jõu, risti pinnaga kuhu rattad toetuvad. Vaadeldava keha jõudude skeem näeb seega välja nii, nagu on kujutatud joonisel 2.2.



Joonis 2.2

Selguse mõttes on siingi tundmatud jõud joonistatud roheliste nooltena. Nüüd koostame jõudude projektsioonvõrrandid. Selleks joonistame siiski ka seekord abikolmnurgad nn „viltuste" jõudude projekteerimise hõlbustamiseks.



Joonis 2.3

Nende põhjal on kerge leida vastavate jõudude projektsioonid:

$$N_{Dx} = +N_D \cdot \sin\alpha \qquad F_{1x} = +F_1 \cdot \cos\beta \qquad F_{2x} = -F_2 \cdot \cos\gamma$$

$$N_{Dy} = +N_D \cdot \cos\alpha \qquad F_{1y} = -F_1 \cdot \sin\beta \qquad F_{2y} = -F_2 \cdot \sin\gamma$$

Jõudude projektsioonide võrrandid näevad järelikult välja nii:

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0: \qquad X_A + N_D \sin\alpha - Q + F_1 \cos\beta - F_2 \cos\gamma = 0, \tag{2.1a}$$

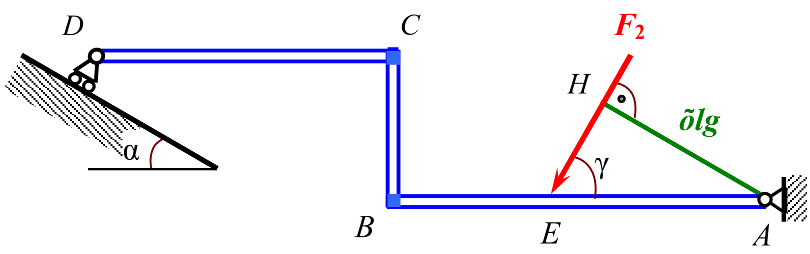
$$2)\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0: \qquad Y_A + N_D \cos\alpha - F_1 \sin\beta - F_2 \sin\gamma = 0. \tag{2.1b}$$

Kontrollime veel paralleelsuse ja ristseisu tingimuste täidetust. 1) Jõud $\vec{N}_D$ ja $\vec{F}_2$ on paralleelsed. Esimeses tasakaaluvõrrandis on N_D korrutatud funktsiooniga **sinα**, F_2 aga funktsiooniga **cosγ**. Kas paralleelsuse tingimus on täidetud? On küll. Ülesande tingimuse põhjal on ju $\alpha = 30°$ ja $\gamma = 60°$. Seega on N_D juures **sin30º**, F_2 juures **cos60º**. Kõigile on aga hästi teada, et $\sin 30° = \cos 60°$. Järelikult on nende jõudude paralleelsuse tingimus tõepoolest täidetud! Täpselt samuti on nende jõudude paralleelsuse tingimus täidetud ka teises võrrandis. Tõepoolest: üks on korrutatud funktsiooniga **cosα**, teine aga **sinγ**. Kuid **cos30º = sin60º**. Järelikult on paralleelsuse tingimus ka siin täidetud. 2) Jõud $\vec{N}_D$ ja $\vec{F}_1$ on omavahel risti. Esimeses võrrandis on N_D korrutatud suurusega sinα, mis antud juhul on **sin30º**. F_1 on korrutatud suurusega **cosβ**, mis antud juhul on **cos30º**. Järelikult on nende jõudude ristseisu tingimus tõepoolest täidetud. Ristseisu tingimusi võiks siin veel teisigi kontrollida, aga jätame selle igaühe enda teha.

Nüüd tuleb hakata momentide võrrandit koostama, mis on sellise keha puhul palju keerulisem. Mis punkti suhtes leida momendid? Muidugi punkti A suhtes, sest siis langevad kaks tundmatut momentide võrrandist kohe välja. Nendeks on jõud $\vec{X}_A$ ja $\vec{Y}_A$, nende moment punkti A suhtes on ju võrdne nulliga, kuna seesama punkt A ongi jõudude $\vec{X}_A$ ja $\vec{Y}_A$ rakenduspunktiks. Jääb järele 4 koondatud jõudu ja üks jõupaar.

a) Jõupaar momendiga M nõuab ainult õige märgi ettepanemist, milleks siin on *pluss*, seega kolmandasse võrrandisse tuleb kirjutada: $+M$.

b) Jõu $\vec{F}_2$ momendi leidmiseks punkti A suhtes teeme abijoonise

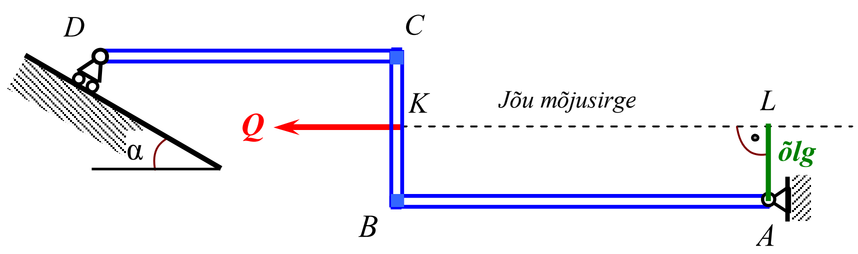


Joonis 2.4

Selle joonise põhjal on kerge kirja panna jõu $\vec{F}_2$ momendi

$$M_A(\vec{F}_2) = +F_2 \cdot AH = F_2 \cdot AE \sin\gamma = F_2 \cdot 3\sin\gamma$$

c) Järgmisena võtame jõu $\vec{Q}$, mille momendi leidmine ei ole samuti kuigi keeuline.

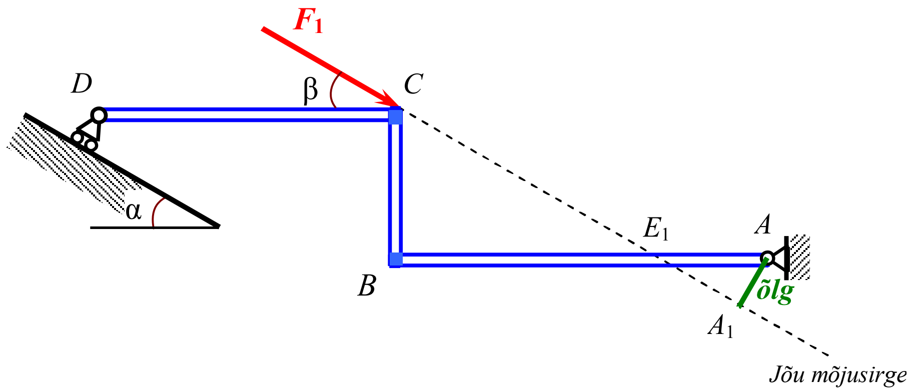


Joonis 2.5

Joonis 2.5 põhjal saame

$$M_A(\vec{Q}) = +Q \cdot AL = Q \cdot \frac{l_2}{2}$$

d) Järgmisena jõud $\vec{F}_1$ on juba raskem pähkel. Teeme kõigepealt abijoonise jõu $\vec{F}_1$ õla äranäitamiseks punkti A suhtes.

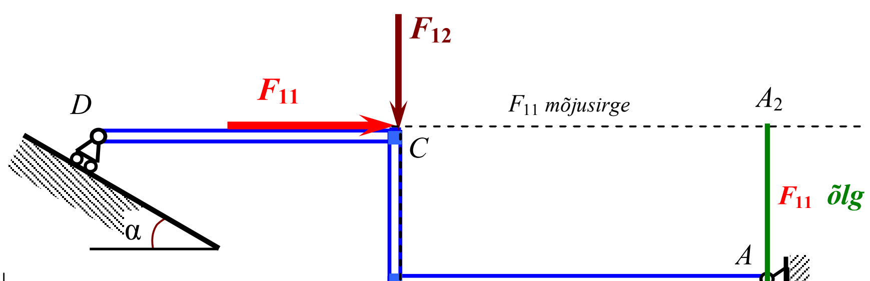


Joonis 2.6

Joonise 2.6 põhjal võiksime kirja panna, et

$$M_A(\vec{F}_1) = +F_1 \cdot AA_1$$

Selle põhjal aga jõu $\vec{F}_1$ momenti arvutada on väga ebamugav. Asi on selles, et õla AA_1 pikkuse tuleks arvutada ebakorrapärasest kujundist $CBAA_1C$, mis on aga äärmiselt tülikas. Seetõttu leitakse selle jõu moment veidi teisiti. Nimelt jaotatakse jõud $\vec{F}_1$ kaheks ristuvaks komponendiks ja leitakse kummagi moment täiesti eraldi. Mis suunad võtta jõu lahutamisel aluseks, see oleneb konkreetsest ülesandest. Need suunad valitakse nii, et oleks endal mugav nende komponentide momente leida. Sageli on mugav võtta ühe komponendi vertikaalsihis ja teise seega horisontaalsihis, sest need sihid langevad ühte x- ja y-telje sihtidega. Nii on ka seekord. Teeme uue abijoonise (joonis 2.7), kuhu ongi kantud jõu $\vec{F}_1$ kaks komponenti ja nende õlad.

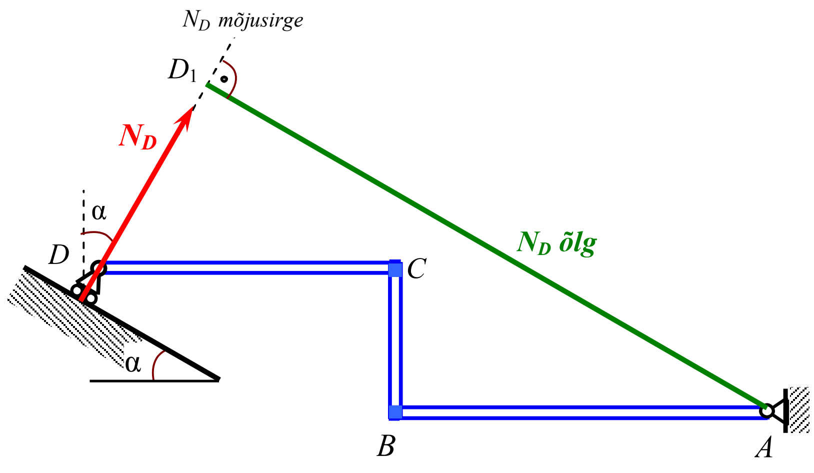


Joonis 2.7

Selle joonise põhjal saame

$$M_A\left(\vec{F}_{11}\right) = -\left|\vec{F}_{11}\right| \cdot AA_2 = -F_{11} \cdot l_2 = -F_1 l_2 \cos\beta\,,$$
$$M_A\left(\vec{F}_{12}\right) = +\left|\vec{F}_{12}\right| \cdot AB = F_{12} \cdot l_1 = F_1 l_1 \sin\beta$$

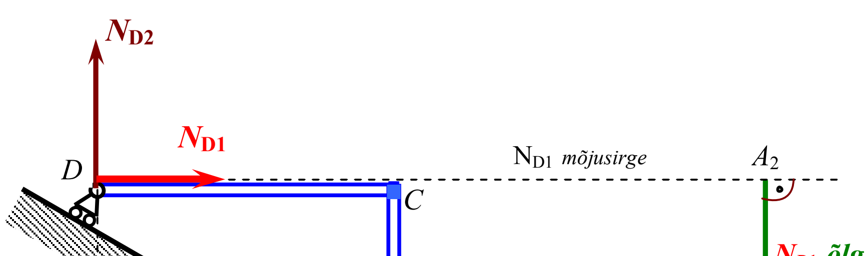
e) Lõpuks leiame jõu $\vec{N}_D$ momendi punkti A suhtes. Ka selle jõu tuleks lahutada kaheks komponendiks. Näitame aga kõigepealt ära abijoonisel – milline tuleks jõu $\vec{N}_D$ õlg juhul, kui see jõud mitte lahutada kaheks komponendiks.



Joonis 2.8

Jooniselt 2.8 on näha, et jõu $\vec{N}_D$ õlaks on lõik AD_1, mille pikkus tuleks leida hulknurgast $ABCDD_1A$. See on aga väga keeruline leida. Selle asemel lahutame parem jõu $\vec{N}_D$ kaheks komponendiks ning nende komponentide momente on juba väga kerge leida. Need komponendid võtame ka siin x- ja y-telje sihis ja nad on kujutatud joonisel 2.9.

$$\left|\vec{N}_{D1}\right| = N_D \sin\alpha$$
$$\left|\vec{N}_{D2}\right| = N_D \cos\alpha$$



Joonis 2.9

Selle joonise põhjal on lihtne leida, et

$$M_A\left(\vec{N}_{D1}\right) = -\left|\vec{N}_{D1}\right| \cdot AA_2 = -N_{D1} \cdot l_2 = -N_D l_2 \sin\alpha,$$

$$M_A\left(\vec{N}_{D2}\right) = -\left|\vec{N}_{D2}\right| \cdot AA_3 = -N_{D2} \cdot (l_1 + l_3) = -N_D (l_1 + l_3)\cos\alpha$$

Kõikide jõudude momendid ongi leitud, nüüd jääb üle kirja panna lõplikult momentide võrrandi

3) $\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0$:

$$M + F_2 \cdot 3\sin\gamma + Q \cdot \frac{l_2}{2} + F_1 l_1 \sin\beta - F_1 l_2 \cos\beta - N_D (l_1 + l_3)\cos\alpha - N_D l_2 \sin\alpha = 0 \qquad (2.1c)$$

Kõik kolm tasakaaluvõrrandit ongi koostatud. Toome nad kõik koos siin veel ära.

1) $X_A + N_D \sin\alpha - Q + F_1 \cos\beta - F_2 \cos\gamma = 0$,

2) $Y_A + N_D \cos\alpha - F_1 \sin\beta - F_2 \sin\gamma = 0$,

3) $M + F_2 \cdot 3\sin\gamma + Q \cdot \frac{l_2}{2} + F_1 l_1 \sin\beta - F_1 l_2 \cos\beta - N_D (l_1 + l_3)\cos\alpha - N_D l_2 \sin\alpha = 0$.

Nagu näha, tuleb süsteemi lahendamist alustada kolmandast võrrandist, sest see on ainuke võrrand, kus on ainult üks tundmatu. Sellest saame kohe arvutada toereaktsiooni N_D. Paneme siia arvud asemele

$$6 + 4 \cdot 3 \cdot \sin 60° + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 5 \cdot \sin 30° - 8 \cdot 2 \cdot \cos 30° - N_D \cdot 9 \cdot \cos 30° - N_D \cdot 2 \cdot \sin 30° = 0$$

ehk

$$30 - 2 \cdot \sqrt{3} = N_D \left(4{,}5 \cdot \sqrt{3} + 1\right)$$

millest

$$N_D = \frac{26{,}5359}{8{,}7942} = 3{,}017 \approx 3{,}02 \text{ kN}$$

Nüüd arvutame esimesest võrrandist toereaktsiooni X_A.

$$X_A = -3{,}02 \cdot \sin 30° + 4 - 8 \cdot \cos 30° + 4 \cdot \cos 60°$$

siit

$$X_A = 4{,}49 - 4\sqrt{3} = -2{,}438 \approx -2{,}44 \text{ kN}$$

Teisest võrrandist saame arvutada toereaktsiooni Y_A.

$$Y_A = -3{,}02 \cdot \cos 30° + 8 \cdot \sin 30° + 4 \cdot \sin 60°$$

$$Y_A = 4 + 0{,}49 \cdot \sqrt{3} = 4{,}8487 \approx 4{,}85 \text{ kN}$$

Vastus: Keha *ABCD* toereaktsioonid on järgmised:

$$\boldsymbol{X_A = -2{,}44 \ \ \mathrm{kN}},$$
$$\boldsymbol{Y_A = 4{,}85 \ \ \mathrm{kN}},$$
$$\boldsymbol{N_D = 3{,}02 \ \ \mathrm{kN}}.$$