

Расчетная работа №4 Основы алгебры логики

Поскольку в цифровых устройствах используются только два символа 0 и 1, алгебра логики использует логические переменные и функции от них, которые также принимают только два значения - 0 и 1. В логике символы 0 и 1 не цифры. Единица обозначает абсолютную истину, символ 0 - абсолютную ложь. Основы алгебры логики придумал в середине XIX века ирландский математик Дж. Буль, поэтому алгебра логики иногда называется булева алгебра.

В отличие от обычной математики, в алгебре логики операции сложения и умножения заменяют операцией логического умножения (конъюнкция), и операцией логического сложения (дизъюнкция). Для обозначения операций сложения и умножения используют специальные символы: \vee - логическое сложение, \wedge - логическое умножение.

Операция логического сложения обозначается союзом "ИЛИ". Выражение $a \vee b$ означает "или а или b". т. е. если и а, и b равно нулю, то и результат равен нулю. Результат равен единице, если хотя бы одна из переменных равна единице. Результат также будет единицей, если обе переменных равны единице.

Логическое умножение обозначается союзом "И". Выражение $a \wedge b$ означает "а и b", т. е. если а и b равны нулю, то и результат равен нулю. Если одна из переменных равна единице, другая нулю, то результат все равно равен нулю. Результат равен единице, если обе переменных равны единице.

Вывод: для логического сложения результат равен нулю только при совпадении нулей, для логического умножения результат равен единице только при совпадении единиц.

Есть еще понятие отрицания, обозначаемое "НЕ". Обозначается отрицание чертой над обозначением переменной или символом \neg , стоящим перед переменной. Например, \bar{a} означает отрицание а. По-другому это отрицание называется инверсией. То есть, если $a = 1$, то $\bar{a} = 0$ и наоборот. Отрицание может быть не только одной переменной, но и целого выражения.

Понятие двоичной переменной, логических операций И, ИЛИ, НЕ образуют систему аксиом алгебры логики.

Аналогично обычной алгебре, в булевой действительны свойства перестановки, сочетательности и распределительности:

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge b \vee a \wedge c$$

Помимо этих есть и другие, свойственные только алгебре логики, законы:

Законы одинарных элементов

$$a \wedge 1 = a$$

$$a \vee 1 = 1$$

$$a \wedge 0 = 0$$

$$a \vee 0 = a$$

Законы отрицания
(правила де Моргана)

$$a \wedge \bar{a} = 0$$

$$a \vee \bar{a} = 1$$

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

Распределительность дизъюнкции

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Правила поглощения

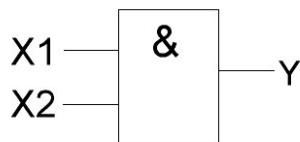
$$a \vee (a \wedge b) = a$$

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

Эти правила и законы позволяют значительно упростить логические уравнения и функции.

Схема "И"

Двухвходовый логический элемент "И" обозначается вот так:

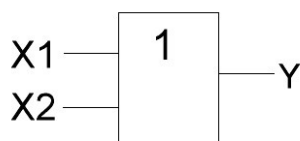


X1	X2	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Такая табличка называется таблицей истинности логического элемента. Она поясняет, как работает элемент, т. е. какой сигнал на его выходе при определенных сигналах на входе. Таблицы истинности присущи всем цифровым устройствам. В этой таблице символы x1 и x2 означают входные сигналы, y - выходные. Причем входы принято обозначать слева (это касается любых устройств), выходы - справа. Переменная x с индексом 1 обозначает младший разряд, x2 - старший. Судя по таблице, единица будет на выходе только тогда, когда на обоих входах будут единицы. Символ & говорит о том, что это элемент "И".

Схема "ИЛИ"

Логический элемент "ИЛИ" обозначается так:



Его таблица истинности:

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

То есть, единица на выходе тогда, когда хотя бы на одном из входов присутствует единица. Символ 1 говорит о том, что это элемент "ИЛИ".

Схема "НЕ"

Логический элемент "НЕ", который иначе называется инвертор, обозначается так:

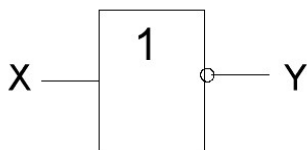


Таблица истинности:

X	Y
0	1
1	0

О том, что это инвертор, говорит кружок на выходе элемента. В электронике принято кружком обозначать инверсию сигнала, т. е. переворот фазы на 180 градусов.

Базисные элементы

Базисом называется совокупность элементов, с помощью которых схемотехнически можно реализовать устройство любой сложности.

Базис "И-НЕ"

И-НЕ - это схема И и схема НЕ, сложенные вместе. Операция, которую производит такой элемент называется инверсией логического умножения или отрицанием логического умножения, ну или инверсией конъюнкции и еще красивым словосочетанием штрих Шеффера. Штрих Шеффера называется потому, что в виде формулы операция И-НЕ записывается так: $Y = X1 \downarrow X2$.

Логический элемент И-НЕ обозначается так:

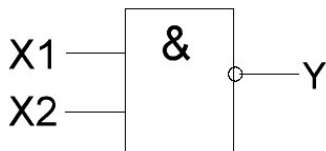


Таблица истинности для него:

X1	X2	Y
0	0	1

0	1	1
1	0	1
1	1	0

Сначала логически умножаем, а потом все это логически отрицаем.

Базис “ИЛИ-НЕ”

Здесь все по аналогии с элементом И-НЕ. Операция, выполняемая элементом ИЛИ-НЕ называется инверсией логического сложения или инверсией дизъюнкции или стрелка Пирса. Стрелка потому, что в виде формулы функция записывается так: $Y = X1 \downarrow X2$.

Обозначается элемент ИЛИ-НЕ так:

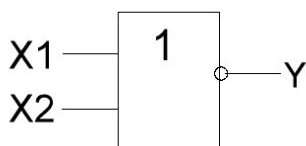


Таблица истинности:

X1	X2	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Аналогично, если к выходу элемента ИЛИ-НЕ прилепить инвертор, то получится элемент ИЛИ.

Базис "ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ-ИЛИ"

Операция, выполняемая таким элементом называется сложение по модулю два и обозначается плюсиком в кружочке, т. е. вот таким символом \oplus . В виде уравнения функция записывается так: $X1 \oplus X2$. Читается это, как "либо икс один, либо икс два". Обозначение элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ-ИЛИ следующее:

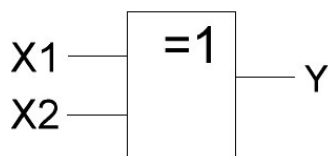


Таблица истинности:

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Кстати, этот элемент можно заменить логическими элементами И, ИЛИ, НЕ, поскольку

$$X1 \oplus X2 = (X1 \wedge \overline{X2}) \vee (\overline{X1} \wedge X2)$$

Задача1

В схеме, приведенной на рис.1 определить логическую величину на выходах Y . Значения входных величин:

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = 1$$

$$X_4 = 1$$

$$X_5 = 1$$

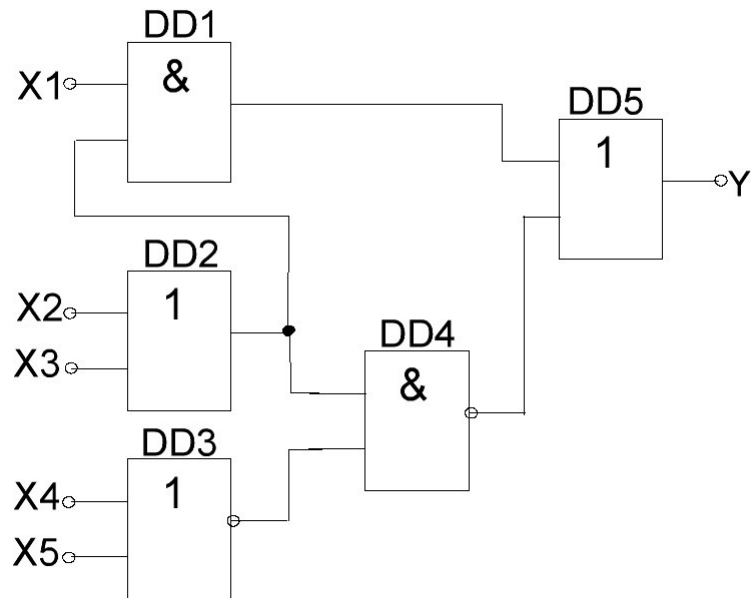


Рис.1

Решение:

Обозначим на выходах логических элементов порядок действий (Рис.2).

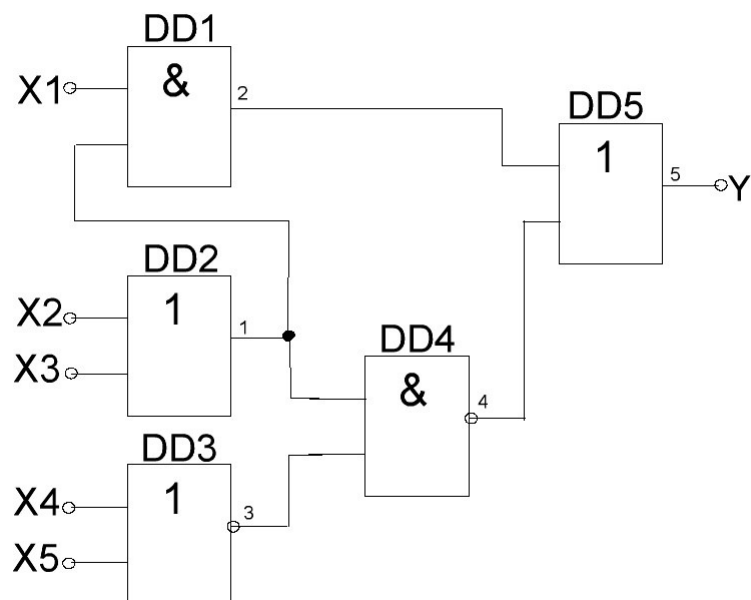


Рис.2

Введем обозначение F_k для логической величины на выходе k -ого логического элемента ($k = \overline{1,5}$ принятый порядковый номер действия).

Таблицы истинности соответствующих логическим операциям позволяют определить по заданным входным величинам $X1 \div X5$ выходные логические величины $F1 \div F4$ и Y .
 Результаты решения приведены ниже в таблице результатов решений.

Результаты решений					
Номер действия	Номер элемента	Логическая операция	Входные элементы		Выходные элементы
1	DD2	ИЛИ	$X2=0$	$X3=1$	$F1=1$
2	DD1	И	$X1=0$	$F1=1$	$F2=0$
3	DD3	ИЛИ-НЕ	$X4=1$	$X5=1$	$F3=0$
4	DD4	И-НЕ	$F1=1$	$F3=0$	$F4=1$
5	DD5	ИЛИ	$F2=0$	$F4=1$	$Y=1$

На основании выполненного решения по входным величинам заданной схемы получена выходная логическая величина $Y=1$.

Задача. В схеме, приведенной на рис.3, определить логические величины на выходах $Y1$, $Y2, Y3$. Значения входных величин даны в таблице 1, а логические элементы в таблице 2.

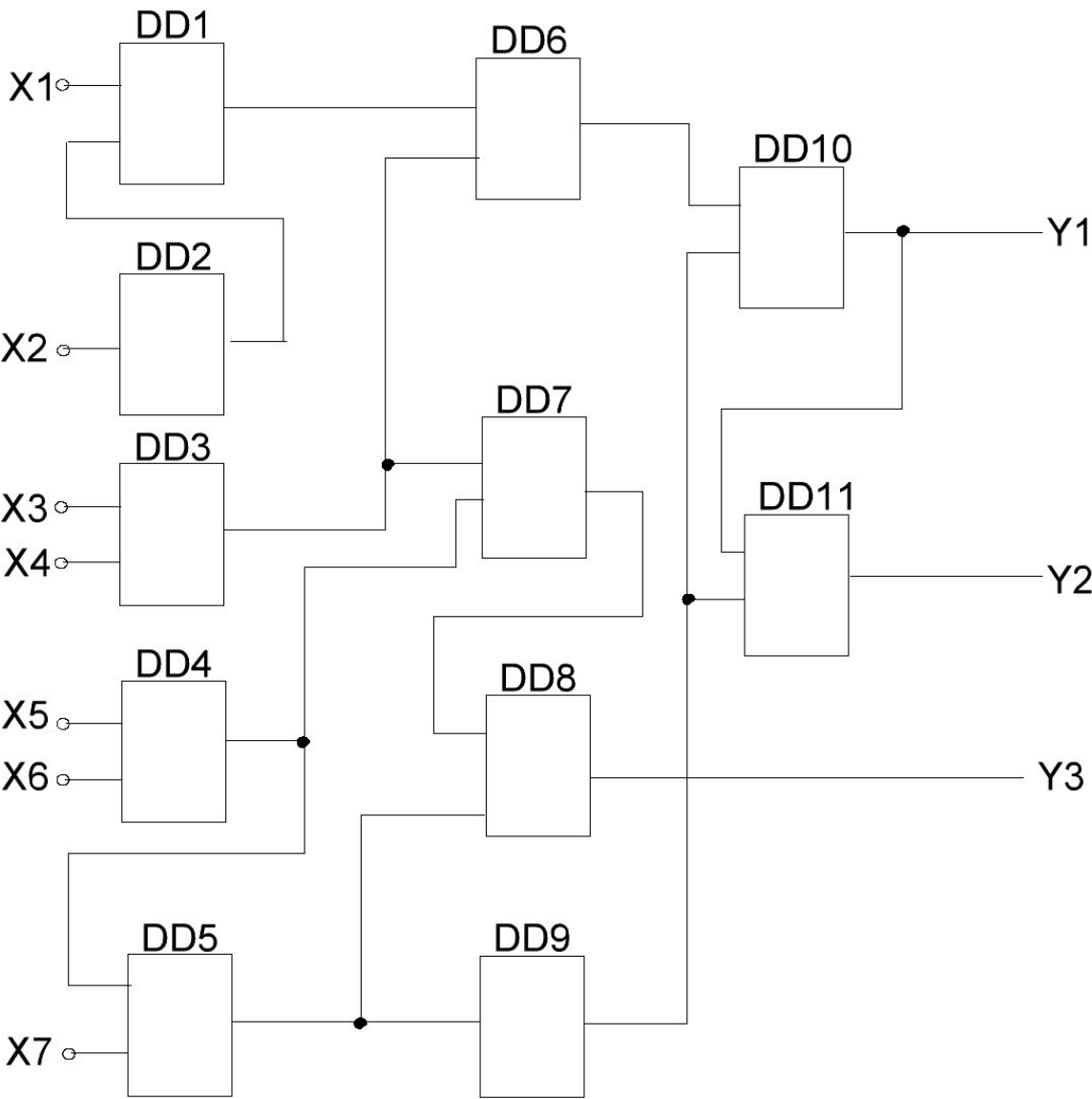


Таблица 1 Входные данные

№ варианта	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
1	0	1	1	1	1	1	0
2	0	0	1	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	1
5	0	1	1	1	1	0	0
6	0	1	1	1	1	1	1
7	1	0	1	1	1	0	0
8	1	1	0	0	1	1	1
9	0	0	1	1	0	1	1
10	1	0	1	0	1	1	1
11	1	1	1	1	0	1	1
12	1	1	0	1	1	0	1
13	1	0	1	1	1	0	1
14	1	1	1	0	1	1	0
15	1	1	0	1	1	1	1
16	1	0	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	0	1	1
18	0	1	0	1	1	1	1
19	1	1	1	0	1	0	1
20	1	0	1	1	0	1	1
21	1	1	0	1	1	0	1
22	1	1	1	1	1	1	1
23	0	1	1	1	0	1	0
24	1	0	0	0	1	1	1
25	1	1	1	1	0	0	0
26	0	0	0	1	1	1	1
27	1	0	0	0	1	1	1
28	1	1	0	0	0	1	1
29	1	1	1	0	0	0	1
30	1	1	1	1	0	0	0
31	0	0	1	0	0	1	1
32	1	0	0	1	0	0	1
33	1	1	0	0	1	0	0
34	1	0	0	1	0	0	1
35	0	0	0	0	1	1	1
36	1	1	0	0	0	1	0
37	1	0	0	0	1	0	1
38	0	0	0	1	0	1	1
39	1	0	0	1	1	0	0
40	0	0	0	0	0	1	1
41	1	1	0	0	0	0	0
42	1	1	1	1	1	1	1
43	0	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	1	1	0	0
45	1	0	1	0	0	0	1
46	0	1	1	0	1	1	0
47	1	0	1	1	1	1	1
48	1	0	1	1	0	1	1
49	1	1	0	0	1	1	1
50	0	0	1	1	1	0	0

Таблица 2 Логические элементы

№	DD1	DD2	DD3	DD4	DD5	DD6	DD7	DD8	DD9	DD10	DD11
1	И	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	И-НЕ	И	ИЛИ	НЕ	И	И
2	ИЛИ	НЕ	И	И-НЕ	ИЛИ	И-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ
3	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	И	ИСКЛ.-ИЛИ	И-НЕ	И	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИЛИ-НЕ	И-НЕ
4	И	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	И	ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ-НЕ	НЕ	И-НЕ	И-НЕ
5	И-НЕ	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	И	И	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	ИЛИ-НЕ	И-НЕ
6	И-НЕ	НЕ	И	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	НЕ	И	И
7	И	НЕ	И	ИСКЛ.-ИЛИ	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ	И-НЕ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ
8	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	И	И	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ-НЕ	И-НЕ	НЕ	ИЛИ-НЕ	И-НЕ
9	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И	И	ИЛИ-НЕ	И-НЕ	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	И-НЕ
10	И-НЕ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ	И	И	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ
11	ИЛИ	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	И	ИЛИ	И	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И-НЕ
12	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ	И-НЕ	ИЛИ	И	НЕ	И	И-НЕ
13	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	И	И	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	И	ИЛИ	НЕ	ИЛИ-НЕ	И-НЕ
14	ИЛИ	НЕ	И	И-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	И-НЕ
15	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И	И-НЕ	НЕ	И	ИЛИ-НЕ
16	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	И-НЕ	И-НЕ
17	И	НЕ	И-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	И	ИЛИ-НЕ	НЕ	И-НЕ	И-НЕ
18	ИЛИ-НЕ	НЕ	И	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	И-НЕ	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И
19	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И	И-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	НЕ	И	ИЛИ-НЕ
20	И	НЕ	И-НЕ	И	И-НЕ	И-НЕ	И	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ
21	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	ИЛИ-НЕ	И-НЕ	И	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	И
22	ИЛИ-НЕ	НЕ	И	И-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	НЕ	И	ИЛИ-НЕ
23	И-НЕ	НЕ	ИЛИ-НЕ	И	И	ИЛИ	ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	ИЛИ-НЕ	И-НЕ
24	И-НЕ	НЕ	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	И	ИЛИ	И-НЕ	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ
25	ИЛИ	НЕ	И	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	И-НЕ	НЕ	И	И
26	ИЛИ	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И	И-НЕ	И	НЕ	И	И-НЕ
27	ИЛИ	НЕ	И	ИЛИ	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ
28	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	И	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ
29	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	И-НЕ	И-НЕ	НЕ	И-НЕ	ИЛИ
30	И-НЕ	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	НЕ	И	ИЛИ-НЕ
31	И-НЕ	НЕ	И-НЕ	И-НЕ	И-НЕ	И	ИЛИ	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И
32	И	НЕ	ИЛИ	И	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	И-НЕ	И
33	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	НЕ	ИЛИ-	И-НЕ

	ИЛИ			ИЛИ						НЕ	
34	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИЛИ	И	ИЛИ	ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ	НЕ	И	И-НЕ
35	И-НЕ	НЕ	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	И	ИЛИ	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИЛИ-НЕ	И
36	ИЛИ	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	И	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ
37	ИЛИ	НЕ	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	НЕ	И	И
38	ИЛИ	НЕ	И	ИЛИ	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ-НЕ	НЕ	И	И-НЕ
39	ИЛИ	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	И	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ
40	ИЛИ-НЕ	НЕ	И	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	И-НЕ	И	НЕ	ИЛИ	ИЛИ
41	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	И-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ-НЕ	НЕ	И-НЕ	ИЛИ
42	ИЛИ	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	И	НЕ	И	ИЛИ-НЕ
43	ИЛИ	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	И-НЕ	И	НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	И
44	И-НЕ	НЕ	И-НЕ	ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ-НЕ	И-НЕ	НЕ	И-НЕ	И
45	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	И	ИЛИ	ИЛИ-НЕ	И	И-НЕ	НЕ	И-НЕ	И
46	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ	И	ИЛИ-НЕ	И	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ
47	ИЛИ	НЕ	ИЛИ	И	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	НЕ	ИЛИ	ИЛИ
48	И	НЕ	И-НЕ	ИЛИ-НЕ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ-НЕ	И	И	НЕ	ИЛИ	ИЛИ
49	ИЛИ-НЕ	НЕ	ИЛИ-НЕ	И	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ	И	И-НЕ	НЕ	ИЛИ	И
50	ИЛИ	НЕ	И-НЕ	ИЛИ	ИЛИ	ИСКЛ.-ИЛИ	ИЛИ	ИЛИ	НЕ	ИЛИ-НЕ	ИЛИ-НЕ