Стандарт дисциплины

230100.62 (552800) Информатика и вычислительная техника

ЕН.Ф.01.7 **Методы оптимизации:**
необходимые и достаточные условия минимума гладких функций одной и нескольких переменных; основные численные методы безусловной минимизации (методы нулевого, первого и второго порядка); задача выпуклого программирования; функция Лагранжа; задача линейного программирования; симплекс-метод решения задачи линейного программирования; оптимизация на графах; простейшая задача вариационного исчисления; уравнение Эйлера.

8 семестр. - экзамен
140 часов = 15 часов лекций + 30 часов лаб. раб. + 95 часов СРС

Решить задачи
Задача 6(стр.70);
Задача 15(стр.71);
Задача 41(стр.74).

Методы оптимизации

Введение

***Оптимизация* — это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях**. Постановка задачи оптимизации предполагает наличие объекта оптимизации, будь то человеческая деятельность в течение определенного периода времени или производственный процесс. Решение любой задачи оптимизации начинают с выявления цели оптимизации, т. е. формулировки требований, предъявляемых к объекту оптимизации. От того, насколько правильно выражены эти требования, может зависеть возможность решения задачи. Каждый человек время от времени оказывается в ситуации, когда достижение некоторого результата может быть осуществлено не единственным способом. В таких случаях приходится отыскивать наилучший способ. Однако в различных ситуациях наилучшими могут быть совершенно разные решения. Все зависит от выбранного или заданного критерия. Пусть, например, ученик живет далеко от школы и может добраться до школы на трамвае за 30 минут или же часть пути проехать на трамвае, а потом пересесть на троллейбус и затратить при этом всего 20 минут. Оценим оба решения. Очевидно, второе решение будет лучшим, если требуется попасть в школу за минимальное время, т. е. оно лучшее по критерию минимизации времени. По другому критерию (например, минимизации стоимости или минимизации числа пересадок) лучшим является первое решение. На практике оказывается, что в большинстве случаев понятие «наилучший» может быть выражено количественными критериями — минимум затрат, минимум отклонений от нормы, максимум скорости, прибыли и т. д. Поэтому возможна постановка математических задач отыскания оптимального {optimum—наилучший) результата, так как так как принципиальных различий в отыскании наименьшего или наибольшего значения нет.

Типичным случаем неправильной постановки условий задачи оптимизации является распространенная ошибка, когда предлагается найти оптимальные значения нескольких величин одновременно, например «получить максимальный выход продукции при минимальном расходе сырья». Поскольку минимальный расход сырья, очевидно, равен нулю, ни о каком максимальном выходе продукции здесь нельзя говорить. Правильная постановка оптимальной задачи при этом будет в любом из следующих вариантов: *«получить максимальный выход продукции при заданном расходе сырья»* или «для заданного выхода продукции обеспечить минимальный расход сырья». В каждой такой формулировке соблюдается требование нахождения оптимального значения *только одной величины,* что является необходимым условием постановки оптимальной задачи.

Для решения задач оптимизации нужно располагать ресурсами оптимизации, под которыми понимают свободу выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта. ***Другими словами, объект оптимизации должен обладать определенными степенями свободы — управляющими воздействиями, которые позволяют изменять его состояние в соответствии с теми или иными требованиями.*** **Наконец, еще одно условие правильной постановки оптимальной задачи заключается в наличии количественной оценки интересующего качества объекта оптимизации.** Это условие также необходимо, поскольку лишь при его выполнении можно сравнивать эффекты от выбора тех или иных управляющих воздействий. Количественная оценка оптимизируемого качества объекта обычно называется *критерием оптимальности* или целевой функцией, функцией качества, экономическим критерием и т. д. Вид критерия оптимальности определяется конкретным содержанием решаемой задачи оптимизации и может оказывать существенное влияние на выбор метода решения**. В конечном итоге достигаемое значение критерия оптимальности дает количественную оценку эффекта оптимизации. Таким образом, для правильной постановки оптимальной задачи необходимо выполнение следующих условий**:

1) Требование оптимизации только одной величины;
2) Наличие степеней свободы у оптимизируемого объекта — управляющих воздействий;
3) Возможность количественной оценки оптимизируемой величины.

Задачи на отыскание оптимального решения называются оптимизационными задачами. **Оптимальный результат, как правило, находится не сразу, а в результате процесса, называемого процессом оптимизации.** ***Применяемые в процессе оптимизации методы получили название методов оптимизации.*** **В простейших случаях мы сразу переводим условие задачи на математический язык и получаем её, так называемую, математическую формулировку.**

§1. Этапы решения задачи

На практике процесс формализации задачи достаточно сложен. Пусть, например, требуется распределить различные виды обрабатываемых в данном цехе изделий между различными типами оборудования таким образом, чтобы обеспечить выполнение заданного плана выпуска изделий каждого вида с минимальными затратами. **Весь процесс решения задачи представляется в виде следующих этапов.**

1) Изучение объекта. При этом требуется понять происходящий процесс, определить необходимые параметры (например, число различных и взаимозаменяемых типов оборудования, его производительность по обработке каждого вида изделий и т. д.).

2) Описательное моделирование - установление и словесная фиксация основных связей и зависимостей между характеристиками процесса с точки зрения оптимизируемого критерия.

3). Математическое моделирование — перевод описательной модели на формальный математический язык. Все условия записываются в виде соответствующей системы ограничений (уравнения и неравенства). ***Любое решение этой системы называется допустимым решением. Критерий записывается в виде функции, которую обычно называют,*** *целевой.*

Решение задачи оптимизации состоит в отыскании на множестве решений системы ограничений максимального или минимального значения целевой функции.

4). Выбор (или создание) **метода решения задачи.** Так как задача уже записана в математической форме, ее конкретное содержание нас не интересует. Дело в том, что совершенно разные по содержанию задачи часто приводятся к одной и той же формальной записи. Поэтому при выборе метода решения главное внимание обращается не на содержание задачи, а на полученную математическую структуру. Иногда специфика задачи может потребовать какой-либо модификации уже известного метода или даже разработки нового.

5). Выбор или написание программы для решения задачи на ЭВМ. Подавляющая часть задач, возникающих на практике, из-за большого числа переменных и зависимостей между ними могут быть решены в разумные сроки только с помощью ЭВМ. Для решения задачи на ЭВМ прежде всего следует составить (или использовать уже готовую, если аналогичная задача уже решалась на ЭВМ) программу, реализующую выбранный метод решения.

6). Решение задачи на ЭВМ. Вся необходимая информация для решения задачи на ЭВМ вводится в память машины вместе с программой. В соответствии с программой решения ЭВМ производит необходимую обработку введенной числовой информации, получает соответствующие результаты, которые выдает человеку в удобной для него форме.

7). Анализ полученного решения. Анализ решения бывает двух видов: формальный (математический), когда проверяется соответствие полученного решения построенной математической модели (в случае несоответствия проверяются программа, исходные данные, работа ЭВМ и т. д.), и содержательный (экономический, технологический и т. п.), когда проверяется соответствие полученного решения тому объекту, который моделировался. В результате такого анализа в модель могут быть внесены изменения или уточнения, после чего весь разобранный процесс повторяется. Модель считается построенной и завершенной, если она с достаточной точностью характеризует деятельность объекта по выбранному критерию. Только после этого модель может быть использована для расчета.

В настоящем курсе, дающем первоначальное представление о методах оптимизации, реальные объекты естественно не рассматриваются, а содержательные формулировки задач есть как бы описательные модели, по которым требуется построить модели математические. Поэтому каждую математическую формулировку задачи будем рассматривать как математическую модель некоторой реальной ситуации. В данном курсе отсутствует материал, касающийся вопросов реализации решения задачи на ЭВМ. Это сделано по следующим соображениям. Во-первых, все предлагаемые в курсе задачи могут быть решены вручную, а, во-вторых, вопросы реализации решения задачи на ЭВМ не связаны с содержанием самой задачи и поэтому не могут быть рассмотрены как составная часть данного курса.

Настоящее пособие посвящено в основном математическому моделированию, методам решения задач, формальному и содержательному анализу полученного решения. В пособии рассматривается достаточно большое число задач, частично оригинальных, а частично заимствованных из источников, указанных в списке использованной литературы.

§2. Некоторые сведения из линейной алгебры.

Матрицы

Произвольная система элементов совокупности *К,* расположенная в виде прямоугольной таблицы, содержащей **m** строк и **n** столбцов, **называется (m, n) матрицей или просто *матрицей*** над К". Чтобы записать матрицу, выписывают в

надлежащем порядке обозначения ее элементов и получившуюся таблицу заключают в скобки или ограничивают двойными чертами.
Таким образом, общий вид (m, n) – матрицы будет

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

где $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ – обозначения элементов из *K*. Часто вместо такой подробной записи употребляют сокращенную: $\|\boldsymbol{\alpha_{ij}}\|$ или $\|\boldsymbol{\alpha_{ij}}\|_{\boldsymbol{mn}}$. **Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной,* а число ее строк, равное числу столбцов, называется *порядком* квадратной матрицы.** В частности, квадратная матрица порядка 1 – это просто элемент из *K*. **Матрицу,** имеющую только одну строку, называют просто **строкой**. В дальнейшем матрицы будут обозначаться большими буквами латинского алфавита. **Две матрицы называются *равными,* если числа строк и столбцов у них соответственно равны и если равны числа, стоящие на соответственных местах этих матриц.**

Основными матричными операциями являются умножение числа на матрицу или матрицы на число, сложение и перемножение двух матриц. По определению, чтобы умножить число $\boldsymbol{\alpha}$ на матрицу *A* или матрицу *A* на число $\boldsymbol{\alpha}$, нужно умножить на $\boldsymbol{\alpha}$ все элементы матрицы *A*. Например,

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\mu} \\ \xi & \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha\lambda} & \boldsymbol{\alpha\mu} \\ \boldsymbol{\alpha}\xi & \boldsymbol{\alpha\eta} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\mu} \\ \xi & \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} * \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda\alpha} & \boldsymbol{\mu\alpha} \\ \xi\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\eta\alpha} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{5} * \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} * \mathbf{5} = \begin{bmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{15} \\ \mathbf{35} & \mathbf{-5} \end{bmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей и обозначается $\boldsymbol{O}$. Если желают указать явное число строк и столбцов нулевой матрицы, то пишут $\boldsymbol{O_{mn}}$.

Ясно, что для каждой матрицы *A* над *K* и каждых $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{K}$ имеют место соотношения:

1. $\mathbf{1} * \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} * \mathbf{1} = \boldsymbol{A}$.
2. $\mathbf{0} * \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} * \mathbf{0} = \boldsymbol{O}; \boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} * \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{O}$.
3. $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta A}) = (\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{A}; (\boldsymbol{A\alpha})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha\beta})$.

Суммой двух матриц *A* и *B,* имеющих соответственно равные числа строк и столбцов, называется матрица, имеющая те же числа строк и столбцов и элементы, равные суммам соответствующих элементов матриц *A, B*. Например,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Из этого определения непосредственно вытекают соотношения:

4. $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$.
5. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$.
6. $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha A} + \boldsymbol{\beta A}; \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{A\alpha} + \boldsymbol{A\beta}$.
7. $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\alpha A} + \boldsymbol{\alpha B}; \quad (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A\alpha} + \boldsymbol{B\alpha}$.

8. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

Доказательства предоставляются читателю. В частности, применяя свойства 1 и 6, получим

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{2A}, \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{3A}, \ldots.$$

Вводя обозначение $(\boldsymbol{-1})\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$, будем иметь также

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}, \quad (-\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\alpha A}, \quad -(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}, \qquad -(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}.$$

Для краткости вместо $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ обыкновенно пишут $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

Умножение матриц. В отличие от операций сложения и умножения на число операция умножения матрицы на матрицу определяется более сложным образом. **Пусть заданы две матрица A и B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй**.

Если $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{np}\end{bmatrix}$,

то матрица $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mp}\end{bmatrix}\equiv\mathbf{A}\ *\mathbf{B}$

где $\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nj} \quad (i=1\ldots.m;\ j=1\ldots.p)$, называется произведением A и B и обозначается AB. Например,

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & \delta & \varepsilon\\ \boldsymbol{\lambda} & \mu & \vartheta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\gamma+\beta\boldsymbol{\lambda} & \alpha\delta+\beta\mu & \alpha\varepsilon+\beta\vartheta\\ \alpha_1\gamma+\beta_1\boldsymbol{\lambda} & \alpha_1\delta+\beta_1\mu & \alpha_1\varepsilon+\beta_1\vartheta\\ \alpha_2\gamma+\beta_2\boldsymbol{\lambda} & \alpha_2\delta+\beta_2\mu & \alpha_2\varepsilon+\beta_2\vartheta\end{bmatrix}.$$

Правило умножения матриц иногда формулируют следующим образом: *чтобы получить элемент, стоящий в i-й строке и j-ом столбце произведения двух матриц, нужно элементы i-й строки первой матрицы умножить на сооветственные элементы j-го столбца второй и полученные произведения сложить.*

Докажем теперь основные свойства умножения матриц.

9. $\alpha(AB)=(\alpha A)B;\ A(\alpha B)=(A\alpha)B;\ \ (AB)\alpha=A(B\alpha)$.

Пусть $A=\left\|\alpha_{ij}\right\|_{mn}$, $B=\left\|\beta_{jk}\right\|_{np}$. Пользуясь правилом умножения матриц, мы получим для элемента, находящегося в i-й строке и k-м столбце матрицы $\alpha(AB)$ $(i=1\ldots m; k=1\ldots p)$, следующее выражение:

$$\alpha(\alpha_{i1}\beta_{1k}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nk}).$$

Аналогично для элемента, находящегося в той же i-й строке и k-м столбце матрицы $(\alpha A)B$, получим следующее выражение:

$$(\alpha\alpha_{i1})\beta_{1k}+\cdots+(\alpha\alpha_{in})\beta_{nk}.$$

Так как оба выражения равны, то первое из равенств 9 доказано. Такими же вычислениями доказываются и остальные два равенства из 9, а также и свойтва:

10. $(A+B)C=AC+BC$

11. $C(A+B)=CA+CB$

Квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а остальные – нулю, называется *единичной* и обозначается $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{E_n}$, где $\boldsymbol{n}$ – её порядок. Таким образом,

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением для любой квадратной матрицы A получим равенство

$$\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A},$$

выражающее основное свойство матрицы $\boldsymbol{E}$. **Матрицы, имеющие вид**

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix},$$

называются *диагональными.*

Из правил действий непосредственно вытекает, что сумма и произведение диагональных матриц будут снова диагональными матрицами:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\gamma_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha+\alpha_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta+\beta_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\gamma+\gamma_1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\gamma_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha\alpha_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta\beta_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\gamma\gamma_1} \end{bmatrix}.$$

Транспонирование матриц. Рассмотрим произвольную матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

получающаяся из *A* заменой строк столбцами, называется *транспонированной* по отношению к *A*. В дальнейшем штрихом всегда будет обозначаться переход к транспонированной матрице. Для *произвольных матриц* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ *имеют место следующие правила транспонирования:*

$$(\boldsymbol{\alpha A} + \boldsymbol{\beta B})' = \boldsymbol{\alpha A}' + \boldsymbol{\beta B}',$$
$$(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}',$$

где $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ – *какие-либо числа.* Докажем, например, второе из этих равенств. Элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы $(\boldsymbol{AB})'$, равен элементу, стоящему в j-й строке и i-м столбце матрицы *AB*, т.е. равен

$$\boldsymbol{\alpha_{j1}\beta_{1i}} + \boldsymbol{\alpha_{j2}\beta_{2i}} + \dots + \boldsymbol{\alpha_{jn}\beta_{ni}},$$

где $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$, $\boldsymbol{\beta_{ij}}$ – элементы матриц *A, B.* Но это выражение есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы $\boldsymbol{B'}$ на соответственные элементы j-го столбца матрицы $\boldsymbol{A'}$, так что $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B'A'}$.
Если A – произвольная квадратная матрица и

$$\boldsymbol{A' = A},$$

то $\boldsymbol{A}$ называется *симметрической*;
если же

$$\boldsymbol{A' = -A},$$

то – *кососимметрической*. Элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, у симметрической матрицы равны, а у кососимметрической противоположны. В частности, все диагональные элементы кососимметрической матрицы равны нулю. Из правила транспонирования суммы непосредственно вытекает, что сумма симметрических матриц есть матрица симметрическая, а сумма кососимметрических – матрица кососимметрическая.
Произведение симметрических матриц может и не быть симметрической матрицей, например:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{5} \end{bmatrix}.$$

Однако, если две симметрические матрицы *A, B* перестановочны, то их произведение будет снова матрицей симметрической. Действительно, в этом случае

$$(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B'A'} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}.$$

Квадратная матрица *A* над кольцом *К* называется *обратимой* (над *К*), если существует квадратная матрица *X* над *K*, удовлетворяющая соотношениям

$$\boldsymbol{AX = XA = E}. \qquad (\mathbf{1})$$

Каждая матрица $\boldsymbol{X}$, удовлетворяющая условиям (1), называется матрицей, *обратной* к $\boldsymbol{A}$, или обращением матрицы А. У каждой обратимой матрицы *A* существует лишь одно обращение. Действительно, если наряду с матрицей *X* условиям (1) удовлетворяет матрица *Y*, то, умножая обе части равенства

$$\boldsymbol{AY = E}$$

слева на *X*, получим

$$\boldsymbol{XA * Y = XE}.$$

или $\boldsymbol{Y = X}$.
Обращение матрицы *A*, если оно существует, обозначается через $\mathrm{A}^{-\mathbf{1}}$**.** Таким образом, по определению

$$\boldsymbol{A * A^{-1} = A^{-1} * A = E}. \qquad (\mathbf{2})$$

В условия (1) матрицы *A* и *X* входят симметрично, и потому, если *X* есть обращение *A,* то *A* есть обращение *X*, иными словами,

$$(A^{-1})^{-1} = A. \qquad (3)$$

Если квадратные матрицы A, B, C одного и того же порядка обратимы, то их произведение ABC также обратимо и

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1},$$

т.е. *обращение произведения матриц равно произведению обращений сомножителей, расположенных в противоположном порядке.*
Для доказательства надо проверить лишь равенства

$$ABC * C^{-1}B^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}ABC = E,$$

являющиеся очевидными следствиями соотношений (2) и аналогичных отношений для матриц $B, \boldsymbol{C}$. Для каждой обратимой матрицы *A* наряду с натуральными степенями $A^0 =$

$E, A^1 = A, A^2 = AA, \ldots$ рассматривают и ее целые отрицательные степени, полагая по определению

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1}, \qquad A^{-3} = A^{-1}A^{-1}A^{-1}, \ldots \qquad (4)$$

Дробные степени матриц рассматриваются редко, так как во многих случаях обычные определения не дают однозначных значений для таких степеней. Из соотношений (2), (4) следует, что для любой обратимой матрицы A и любых целых (не обязательно положительных) чисел p, q имеют место обычные правила действий со степенями

$$A^pA^q = A^{p+q},$$
$$(A^p)^q = A^{pq},$$

И если матрицы A, B обратимы и $AB = BA$, то

$$(AB)^p = A^pB^p.$$

Посмотрим теперь, как связаны операции транспонирования и обращения. Применяя правило транспонирования произведения матриц к соотношениям (1), получаем

$$X'A' = A'X' = E.$$

т.е. в результате транспонирования обратимой матрицы A получается снова обратная матрица и

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'. \qquad (5)$$

Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если

$$AA' = A'A = E, \qquad (6)$$

т.е. если транспонированная матрица обратна к исходной. Отсюда, частности, следует, что ***каждая ортогональная матрица обратима.*** Так как $(A')' = A$, то из (6) вытекает, что ***обращение ортогональной матрицы есть ортогональная матрица.*** Далее, если матрицы A, B ортогональны, то

$$A' = A^{-1}, B' = B^{-1}$$

и, значит,

$$(AB)' = B'A' = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Иными словами***, произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.***

Рассмотрим еще одну матричную операцию. Пусть A – произвольная матрица, элементы которой являются комплексными числами. Заменим в A каждый элемент комплексно сопряженным числом. Полученная таким способом новая матрица называется ***комплексно сопряженной*** с A и обозначается $\bar{A}$. Операция перехода к комплексно сопряженной матрице обладает следующими свойствами:

$$\overline{\alpha A + \beta B} = \overline{\alpha A} + \overline{\beta B},$$
$$\overline{AB} = A\bar{B},$$
$$\overline{A'} = (A)',$$
$$\overline{A^{-1}} = (A)^{-1}.$$

Доказательство их весьма просто и предоставляется читателю.

***Матрицы* A *и* A′ *называются эрмитово-сопряженными.* Если A = A′, то A называется *эрмитовой или эрмитово-симметрической.* Матрица A, удовлетворяющая соотношению**

$$A'A = AA' = E,$$

называется *унитарной.* Таким же способом, как и для ортогональных матриц, доказывается, что *матрица, обратная к унитарной матрице, является унитарной* и что *произведение унитарных матриц является снова унитарной матрицей.* Если все элементы матрицы A – числа вещественные, то $A' = A$, и, следовательно, для вещественных матриц понятия симметричности и эрмитовой симметричности, унитарности и ортогональности соответственно совпадают.

Определители

Понятие **«определитель»** возникло в связи с задачей решения систем линейных уравнений. Возьмем какое-нибудь поле K и рассмотрим простейшие системы уравнений 1-й степени с двумя и тремя неизвестными с коэффициентами из K.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными ξ_1, ξ_2 записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases} \quad (1)$$

где α_{ij}, β_i - заданные числа из K.

Матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{bmatrix}$$

называется соответственной *основной* и *расширенной* матрицами системы (1). Чтобы исключить неизвестное ξ_2, умножим первое из уравнений на α_{22}, второе на $-\alpha_{12}$ и сложим их. В результате получим уравнение

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = \beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}.$$

Если $(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) \neq 0$, то из этого уравнения и аналогичного уравнения, получающегося путем исключения ξ_1, получим

$$\xi_1 = \frac{\alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \qquad \xi_2 = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}. \qquad (2)$$

Знаменатели выражений для неизвестных ξ_1, ξ_2 здесь одинаковы и представляют собой многочлен от элементов основной матрицы A. ***Значение этого многочлена называют определителем или детерминантом матрицы A и обозначают $\det A$ или $|A|$.***
Если матрица задана своей таблицей, то детерминант обозначают, заключая таблицу в вертикальные черты. Таким образом, по определению для любой квадратной матрицы 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta. \qquad (3)$$

С помощью определителей формулы (2) можно переписать в виде

$$\xi_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}, \qquad \xi_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} \qquad (4)$$

Решая аналогичным путем систему трех уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3 &= \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3 &= \beta_2, \\ \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3 &= \beta_3 \end{aligned} \qquad (5)$$

с тремя неизвестными ξ_1, ξ_2, ξ_3, получим

$$\xi_1 = \frac{\beta_1\alpha_{22}\alpha_{33} - \beta_1\alpha_{23}\alpha_{32} + \beta_2\alpha_{32}\alpha_{13} - \beta_2\alpha_{12}\alpha_{33} + \beta_3\alpha_{12}\alpha_{23} - \beta_3\alpha_{22}\alpha_{13}}{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}} \qquad (6)$$

и аналогичные выражения для ξ_2, ξ_3. Конечно, эти выражения имеют смысл лишь в том случае, когда знаменатель их отличен от нуля.

Матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \beta_3 \end{bmatrix}$$

называются снова основной и расширенной матрицами системы уравнений (5). Знаменатель в формуле (6) называется определителем или детерминантом квадратной матрицы 3-го порядка А. Итак, согласно определению

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \qquad (7)$$
$$\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - -\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}.$$

Объединяя справа члены, содержащие элементы $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$, и вспоминая формулу (3), получим

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Формулу (8) легко запомнить. Для краткости вместо того, чтобы говорить *определитель матрицы* 2-го порядка, 3-го порядка, говорят *определитель* 2-го, 3-го порядка. Три определителя 2-го порядка в формуле (8) получаются из находящегося в ней определителя 3-го порядка вычеркиванием первой строки и соответственно 1-го, 2-го и 3-го столбцов. Далее, определитель 2-го порядка, получившийся вычеркиванием 1-й строки и j-го столбца, следует умножить на элемент, находящийся в первой строке и j-м столбце, все произведения снабдить чередующимися знаками и сложить. В результате и получится определитель 3-го порядка.

§3. Классификация методов математического программирования.

Математическое программирование предполагает построение алгоритмов решения задач оптимизации (задач оптимального планирования) . **В зависимости от свойств целевой функции и ограничений математическое программирование подразделяестся на: линейное; нелинейное** (нелинейное при линейных ограничениях: выпуклое; сепарабельное; квадратичное; геометрическое). Это разделение неслучайно. Оно определяется отсутствием универсальных методов решения задач нелинейного программирования, для которого разработаны лишь эффективные методы решения отдельных классов задач. **Задачи оптимизации связаны с**

вопросами эффективного использования или распределения ограниченных ресурсов для достижения желаемых целей. Характерной чертой задач оптимизации является большое число решений, удовлетворяющих условиям задачи. Выбор конкретного решения, как "наилучшего", зависит от функции цели (показатель качества, критерий оптимальности, функция качества, критерий эффективности и т.д. - синонимы). Задача, допускающая лишь одно решение, не требует оптимизации.

В общем плане, существующие методы математического программирования подразделяются на аналитические и численные

Аналитические методы включают в себя классические методы дифференциального и вариационного исчисления. **Эти методы заключаются в определении экстремума функции f(x) путем нахождения тех значений x, которые обращают в нуль производные f(x) по x (здесь** x **n-мерный вектор).** В случае поиска экстремума при наличии ограничений применяются такие методы, как метод множителей Лагранжа и метод ограниченных вариаций. *Однако для решения больших задач чаще всего применение аналитических методов невозможно.*

Численные методы используют предшествующую информацию для построения улучшенных решений задачи при помощи итерационных процедур. Численные методы применяются для решения задач, которые не могут быть решены аналитически. Численные методы включают методы регулярного (т.е. равномерного) и случайного поиска. Задача поиска заключается в определении последовательности воздействий, доставляющих максимум или минимум заданному целевому функционалу.

Решение задач оптимизации численными методами представляет собой ***два этапа***:

Первый этап - сбор информации об объекте;

Алгоритм сбора информации должен быть

1) прост;
2) должен обеспечивать процедуру решения наиболее полной информацией об объекте;
3) должен учитывать априорную информацию, полученную ранее, т.е. иметь возможность самообучаться.

На втором этапе строится процедура решения на базе проанализированной информации.

В задачах оптимизации, решаемых методом ЛП, целевая функция линейна относительно искомых неизвестных, а ограничения (условия) на переменные и их связи имеют вид линейных равенств или неравенств.В задачах оптимизации, решаемых методами (НЛП), целевая функция и **ограничения в общем случае нелинейны относительно искомых неизвестных.** Пока еще не существует общего метода решения нелинейных задач оптимизации, такого, как например, симплексный метод, разработанный для заданий линейного программирования. Их развитие до сих пор сводится я предложениям частных алгоритмов, хотя и предложено много уже различных стратегий поиска решений.

Сравнительная характеристика методов решения задач оптимизации.

При решении конкретной задачи оптимизации исследователь прежде всего должен выбрать математический метод, который приводил бы к конечным результатам с наименьшими затратами на вычисления или же давал возможность получить наибольший объем информации об искомом решении. ***Выбор того или иного метода в значительной степени определяется постановкой оптимальной задачи, а также используемой математической моделью объекта оптимизации***.

В настоящее время для решения оптимальных задач применяют в основном следующие методы:

1. Методы исследования функций классического анализа.
   Методы, основанные на использовании неопределенных множителей Лагранжа.
   Вариационное исчисление.
2. Методы исследования функций численного анализа.

2. 1. Линейное программирование.
2.2. Принцип максимума.
2.3. Нелинейное программирование.
2.4. Динамическое программирование.

В последнее время разработан и успешно применяется для решения определенного класса задач также метод геометрического программирования.

Как правило, нельзя рекомендовать какой-либо один метод, который можно использовать для решения всех без исключения задач, возникающих на практике. Одни методы в этом отношении являются более общими, другие — менее общими. Наконец, целую группу методов (методы исследования функций классического анализа, метод множителей Лагранжа, методы нелинейного программирования) на определенных этапах решения оптимальной задачи можно применять в сочетании с другими методами, например динамическим программированием или принципом максимума. Отметим также, что некоторые методы специально разработаны или наилучшим образом подходят для решения оптимальных задач с математическими моделями определенного вида.

Так, **математический аппарат линейного программирования специально создан для решения задач с линейными критериями оптимальности и линейными ограничениями на переменные** и позволяет решать большинство задач, сформулированных в такой постановке.

Геометрическое программирование предназначено для решения оптимальных задач, в которых критерий оптимальности и ограничения представляются специального вида функциями — **позиномов.**

Динамическое программирование хорошо приспособлено для решения задач оптимизации многостадийных процессов, особенно тех, в которых состояние каждой стадии характеризуется относительно небольшим числом переменных состояния. Однако при наличии значительного числа этих переменных, т. е. при высокой размерности каждой стадии, применение метода динамической программирования затруднительно вследствие ограниченных быстродействия и объема памяти вычислительных машин

В табл. 1 дана характеристика областей применения различных методов оптимизации, при этом за основу положена сравнительная оценка эффективности использования каждого метода для решения различных типов оптимальных задач. Классификация задач проведена по следующим признакам:

1) Вид математического описания процесса;
2) Тип ограничений на переменные процесса;
3) Число переменных.

Предполагается, что решение оптимальной задачи для процессов, описываемых системами конечных уравнений, определяется как конечный набор значений управляющих воздействий (статическая оптимизация процессов с сосредоточенными параметрами), а для процессов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, управляющие воздействия характеризуются функциями времени (динамическая оптимизация процессов с сосредоточенными параметрами) или пространственных переменных (статическая оптимизация процессов с распрелеленными параметрами Классификация задач по группам с числом независимых переменных, большим и меньшим трех или равным трем как характеристика размерности задач с большим и малым числом переменных, разумеется, весьма условна и в данном случае выбрана скорее, из соображений наглядности графического изображения пространства изменения переменных задачи - фазового пространства (при числе переменных большем трех графическое изображение фазового пространства обычными приемами отсутствует) Тем не менее, такая классификация до некоторой степени все же отражает действительные трудности, возникающие при решении задач с размерностью выше трех. Пространства изменения переменных задачи – фазового пространства (при числе переменных большем трех графическое изображение фазового пространства обычными приемами отсутствует). Тем не менее, такая классификация до некоторой степени все же отражает действительные трудности, возникающие при решении задач с размерностью выше трех.

Таблица «Области применения методов оптимизации»

Примечания к таблице**:**

1. Эффективное применение метода.
2. Используется.
3. Возможно применение.
4. Используется как вспомогательный метод.
5. Многостадийные процессы (размерность указывается для отдельной стадии).
6. Задачи с линейными критериями оптимальности и линейными ограничениями.
7. Используются множители Лагранжа.
8. Задачи с критериями и ограничениями в форме позиномов.

Виды описания процесса		**Конечные уравнения**						**Дифференциальные уравнения**					
Тип ограничений на переменные		**Нет**		**Равенства**		**Неравенства**		**Нет**		**Равенства**		**Неравенства**	
Число переменных n		≤3	>3	≤3	>3	≤3	>3	≤3	>3	≤3	>3	≤3	>3
Наименование метода	**Методы классического анализа**	1	2	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4
	Множители Лагранжа	-	-	1	2	-	-	-	-	2	3	-	-
	Вариационное исчисление	-	-	-	-	-	-	2	3	2; 7	3; 7	-	-
	Динамическое программирование	1; 5	3; 5	1;5;7	3;5;7	1;5	3;5	2	3	3	3	3	3
	Принцип максимума	2;5	1;5	2;5	2;5	2;5	2;5	1	1	2	2	2	2
	Линейное программирование	-	-	-	2;6	2;6	1;6	-	-	-	-	-	-
	Методы нелинейного программирования	2	1	2	1	2	1	4	4	4	4	4	4
	Геометрическое программирование	2;8	2;8	-	-	2;8	2;8	-	-	-	-	-	-

§4. Методы исследования функций классического анализа

Методы исследования функций **классического анализа** представляют собой наиболее известные методы решения несложных оптимальных задач. ***Обычной областью использования данных методов являются задачи* с известным аналитическим выражением критерия оптимальности, что позволяет найти не очень сложное, также аналитическое выражение для производных. Полученные приравниванием нулю производных уравнения, определяющие экстремальные решения оптимальной задачи крайне редко удается решить аналитическим путем, поэтому, как правило, применяют вычислительные машины.** Дополнительные трудности при решении оптимальной задачи методами исследования функций классического анализа возникают вследствие того, что *система уравнений, получаемая в результате их применения,* ***обеспечивает лишь необходимые условия оптимальности. Поэтому все решения данной системы (а их может быть и несколько) должны быть проверены на достаточность.*** В результате такой проверки сначала отбрасывают решения, которые не определяют экстремальные значения критерия оптимальности, а затем среди остающихся экстремальных решений выбирают решение, удовлетворяющее условиям оптимальной задачи, т. е. наибольшему или наименьшему значению критерия оптимальности в зависимости от постановки задачи. Методы исследования при наличии ограничений на область изменения независимых переменных можно использовать только для отыскания экстремальных значений внутри указанной области. В особенности это относится к задачам с большим числом независимых переменных (практически больше двух), в которых анализ значений критерия оптимальности на границе допустимой области изменения переменных становится весьма сложным.

Метод множителей Лагранжа применяют для решения задач такого же класса сложности, как и при использовании обычных методов исследования функций, ***но при наличии ограничений типа равенств на независимые переменные***. К требованию возможности получения аналитических выражений для производных от критерия оптимальности **при этом добавляется аналогичное требование относительно аналитического вида уравнений ограничений.** ***В основном при использовании метода множителей Лагранжа приходится решать те же задачи, что и без ограничений.*** Некоторое усложнение в данном случае возникает лишь от введения дополнительных неопределенных множителей, вследствие чего порядок системы уравнений, решаемой для нахождения экстремумов критерия оптимальности, соответственно повышается на число ограничений. В остальном процедура поиска решений и проверки их на оптимальность отвечает процедуре решения задач без ограничений. ***Множители Лагранжа можно применять для решения задач оптимизации объектов с распределенными параметрами и задач динамической оптимизации.*** При этом вместо решения системы конечных уравнений для отыскания оптимума необходимо интегрировать систему дифференциальных ураавнений. Следует отметить, что множители Лагранжа используют также в качестве вспомогательного средства и при решении специальными методами задач других классов с ограничениями типа равенств, например, в вариационном исчислении и динамическом программировании. Особенно эффективно применение множителей Лагранжа в методе динамического программирования, где с их помощью иногда удается снизить размерность решаемой задачи.

Методы вариационного исчисления обычно используют для решения задач, в которых критерии оптимальности представляются в виде функционалов и решениями которых служат неизвестные функции. Такие задачи возникают обычно при статической оптимизации процессов с распределенными параметрами или в задачах динамической оптимизации. ***Вариационные методы позволяют в этом случае свести решение оптимальной задачи к интегрированию системы дифференциальных уравнений***

Эйлера, каждое из которых является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка с граничными условиями, заданными на обоих концах интервала интегрирования. Число уравнений указанной системы при этом равно числу неизвестных функций, определяемых при решении оптимальной задачи. Каждую функцию находят в результате интегрирования получаемой системы. Уравнения Эйлера выводятся как необходимые условия экстремума функционала. Поэтому полученные интегрированием системы дифференциальных уравнений функции должны быть проверены на экстремум функционала.

При наличии ограничений типа равенств, имеющих вид функционалов, применяют множители Лагранжа, что дает возможность перейти от условной задачи к безусловной. Наиболее значительные трудности при использовании вариационных методов возникают в случае решения задач с ограничениями типа неравенств. Заслуживают внимания прямые методы решения задач оптимизации функционалов, обычно позволяющие свести исходную вариационную задачу к задаче нелинейного программирования, решить которую иногда проще, чем краевую задачу для уравнений Эйлера.

4.1. Необходимые и достаточные условия безусловного экстремума функции
1) Функция y = f (x) (одной переменной).

При решении многих экстремальных задач часто используют различные частные приемы. Однако существует достаточно общий прием решения таких задач, основанный на методах математического анализа. Интересно напомнить, что одна из причин возникновения математического анализа (особенно дифференциального исчисления) связана с необходимостью решения практических экстремальных задач. Из курса «Алгебра и начала анализа» для IX. класса известно, что для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$, дифференцируемой в] a;b [, можно поступить следующим образом:

1) **Найти все критические точки функции, принадлежащие [a; b],**
2) **Найти значения функции в этих точках и на концах промежутка. Наибольшее и наименьшее из этих чисел будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции на отрезке.**

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

на [-1; 4].

Решение. Найдем производную функции f(x) : $f'(x) = 3x^2 - 6x$ Она существует во всех точках.. **Решив уравнение** $3x^2 - 6x = 0$, **найдем критические точки:**
$x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **Теперь составим таблицу значений функции в критических точках и на концах отрезка:**

X	-1	0	2	4
f(x)	**-3**	1	-3	**17**

Из этой таблицы видно, что наименьшее значение равно (-3), а наибольшее (+17).

Выпуклость множества допустимых решений задачи и целевой функции.

Для решения задач математического программирования существенно важно знать:

1) ***Выпукло или не выпукло множество допустимых решений задачи;***
2) ***Является ли целевая функция выпуклой или вогнутой*** или она не относится ни к тому, ни к другому классу.

Напомним необходимые определения. Говорят, что **множество выпукло, если оно вместе с любыми своими точками *A* и *B* содержит и все точки отрезка *AB*. На рис.1 представлены примеры выпуклых множеств точек плоскости. Примерами выпуклых множеств в пространстве могут служить сфера, пирамида, призма и т. д.**

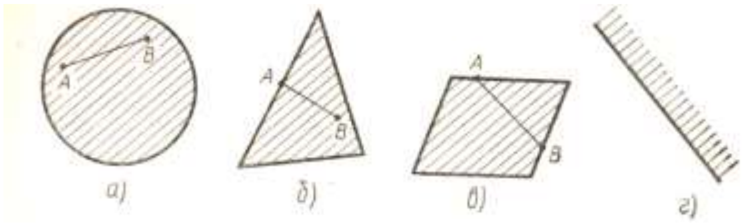


Рис. 1.

Область является выпуклой, если отрезок прямой, соединяющей любые две точки области, принадлежит этой области. Следовательно, если x_1 и x_2 находятся в этой области, то любая точка вида $(\theta x_1 + (1 - \theta) x_2)$, где $0 < \theta < 1$, находится в этой же области. На рис.2.**а** изображена выпуклая область, а на рис.2**б** — невыпуклая.

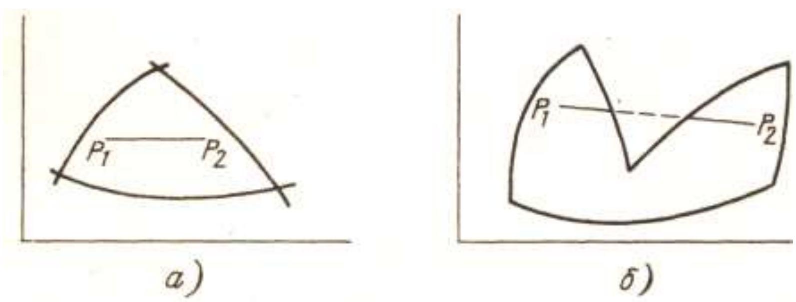


Рис. 2.

На рис.3. изображены примеры **невыпуклых** множеств. **В невыпуклом множестве** можно указать хотя бы две точки, такие, что не все точки отрезка *AB* принадлежат рассматриваемому множеству. Как пример невыпуклого множества в пространстве можно указать тор.

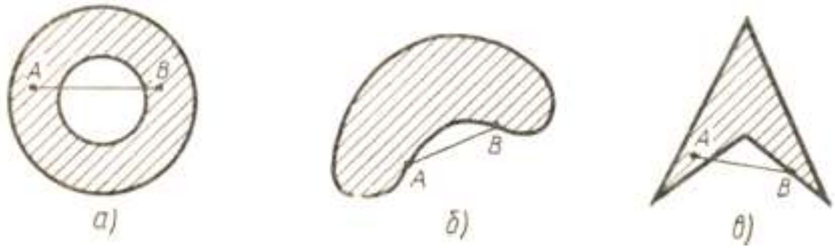


Рис. 3.

Функцию *y* = f (x) одной переменной будем называть выпуклой, если отрезок, соединяющий две любые точки её графика, принадлежит графику или расположен выше его (рис.4.).

Функция вогнута, если отрезок, соединяющий две любые точки графика, принадлежит графику или расположен ниже его (рис.5.).

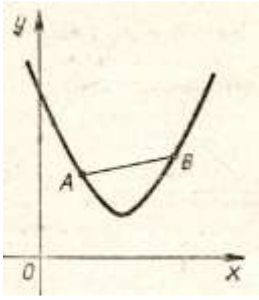


Рис.4.

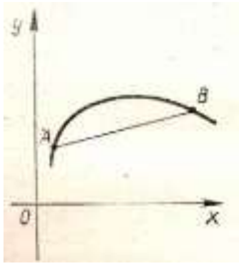


Рис.5.

Аналогично можно сформулировать определения понятий вогнутой и выпуклой функций нескольких переменных. Мы говорим, что гиперповерхность Z = **f** *(x_1, x_2, ..., x_n)* выпуклая, если отрезок, соединяющий две ее любые точки, лежит на поверхности или выше ее. Гиперповерхность Z = **f** *(x_1, x_2, ..., x_n)* вогнута, если отрезок, соединяющий две ее любые точки, лежит на поверхности или ниже ее.

Локальный и глобальный минимум функция f(x).

Функция f(x) имеет **локальный минимум в точке x_0,** если существует некоторая положительная величина δ, такая, что если $|x - x_0| < \delta$, то $f(x) \geq f(x_0)$ т. е. если существует окрестность точки x_0, такая, что для всех значений x в этой окрестности f(x) больше $f(x_0)$ **Функция** f(x) **имеет глобальный минимум в точке x^*,** если для всех x справедливо неравенство $f(x) \geq f(x^*)$. На рис.6. дано графическое представление функции f (x), которая имеет локальный минимум в точке x_0 и глобальный минимум в точке x^*.

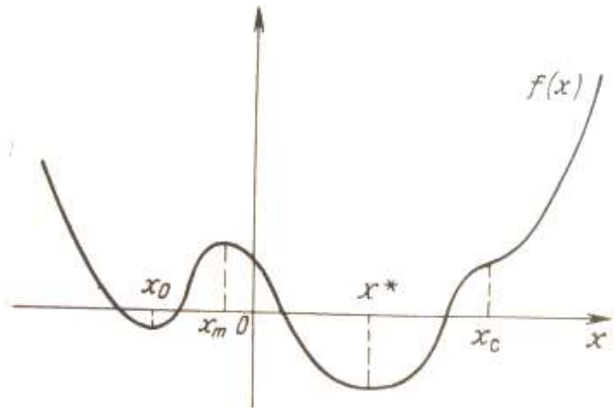


Рис.6.

Классический подход к задаче нахождения значений x_0 и x^* состоит в поиске уравнений, которым они должны удовлетворять. Представленная на рис. функция и ее производные непрерывны, и видно, что в точках x_0 и x^* производная f''(x), (градиент функции) равна нулю. ***Следовательно,*** **x_0** и ***x^* будут решениями уравнения*** **f''(x) = 0.** Точка x_m, в которой достигается **локальный максимум**, и точка x_c, в которой имеется точка горизонтального перегиба функции, также удовлетворяют уравнению **f''(x) = 0.**. Следовательно, уравнение f''(x) = 0 является только ***необходимым*** условием экстремума, но **не является *достаточным* условием минимума.** Заметим, однако, что в точках x_0 и x^* производная f''(x) меняет знак с отрицательного на положительный. В точке x_m знак меняется с положительного на отрицательный, в то время как в точке x_c он не меняется. **Следовательно, производная в минимуме является возрастающей функцией, а поскольку степень возрастания** f"(x) **измеряется второй производной, можно ожидать, что** $f'''(x_0) > 0$**,** $f'''(x^*) > 0$**, тогда как** $f'''(x_m) < 0$**. Если, однако, вторая производная равна нулю, ситуация остается неопределенной**. Полученные выше результаты могут найти надежное обоснование, если рассмотреть разложение функции f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 (или x^*, или x_m), что, конечно, требует непрерывности функции f (x), и ее производных:

$$\mathbf{f}\,(x_0+\mathbf{h}) - \mathbf{f}\,(x_0) = \mathbf{h}\,\mathbf{f}'(x_0) + \frac{\mathbf{h2}}{2!}\mathbf{f}''(x_0) + \cdots. \qquad (1.1)$$

Если в точке x_0 достигается минимум, то левая часть (1.1) будет неотрицательной для любого достаточно малого h ($|h| < \delta$). Следовательно, первая производная f"(x₀) должна быть равна нулю, и это является достаточным условием. Если бы она была положительной, то достаточно малое отрицательное значение **h** делало бы правую часть (1.1) отрицательной, а если бы она была отрицательной, то достаточно малое положительное значение **h** делало бы правую часть отрицательной. Так как в следующем члене (1.1) всегда $\mathbf{h}^2 > 0$, то, если $f'''(x_0) > 0$, в точке x_0 достигается минимум. Если $\mathbf{f}'(x_m) = 0$ и $f'''(x_m) < 0$, , то из аналогичных соображений в точке $\mathbf{x_т}$ достигается максимум. Для определения различия между локальным и глобальным минимумами необходимо сравнить значения функций $f(x_0)$ и $f(x^*)$.

Пример.

Исследовать характер точек перегиба функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$:

Решение. $\mathbf{f}'(x) = 3x^2 - 4x+1 = 0$, тогда $(3x - 1)(x - 1) = 0$, т. е. $x = 1/3$ или $x = 1$.

При $x = 1/3$ производная $\mathbf{f}'(x)$ меняет знак с положительного на отрицательный, а при $x = 1$ - с отрицательного на положительный. Следовательно, в точке $x = 1/3$ достигается максимум, а в точке $x = 1$ - минимум. Этот пример может быть решен более простым способом, **если вычислить вторую производную** $f''' = 6x — 4$: $f'''1/3) = -2$, т. е. отрицательна, и при $x = 1/3$ достигается максимум; $f'''(1) = 2$, т. е. положительна, и при $x = 1$ достигается минимум. Неоднозначность, возникающую при $f'''(*) = 0$, можно разрешить, увеличив количество членов в формуле разложения в ряд Тейлора
:

$$\mathbf{f}\,(x_0+\mathbf{h}) - \mathbf{f}'(x_0) = \mathbf{h}\,\mathbf{f}'(x_0) + \frac{\mathbf{h}^2}{2!}\mathbf{f}''(x_0) + \frac{\mathbf{h}^3}{3!}\mathbf{f}'''(x_0) + \frac{\mathbf{h}^4}{4!}\mathbf{f}''''(x_0) \ldots.$$

При этом можно сформулировать следующее правило: Если функция f (x) и ее производные непрерывны, то точка x_0 является точкой экстремума (максимума или минимума) ***тогда, и только тогда,*** когда ***n*** четное, где **n** — порядок первой необращающейся в нуль в точке x_0 производной.

Если $\mathbf{f^n}(x_0) < 0$, то в точке x_0 достигается максимум,

если $\mathbf{f^n}(x_0) > \mathbf{0}$, то в точке x_0 достигается минимум.

Пример.

Найти точку перегиба функции $f(x) = (x - 1)^6$:

Решение. $f'(x) = 6(x - 1)^5 = 0$ при $x = 1$.

Первой, не обращающейся в нуль в точке $x = 1$ производной, будет $f^6(1) = 6$. Следовательно, функция f (x) имеет минимум в точке $x = 1$.

2). Функция y= f ($x_1, \ldots x_n$) (нескольких переменных).

Необходимое условие экстремума. Если $x^*(x_1, \ldots x_n)$ - точка локального безусловного экстремума непрерывно дифференцируемой в точке x* функции **y= f**

$(x_1, \dots x_n)$, то все её частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, то есть

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} = 0 \quad , \qquad (2.1)$$

или в векторной форме $\nabla f(x^*) = 0$. Точки, удовлетворяющие условию (2.1), называются **стационарными.**

Достаточное условие экстремума. Если в стационарной точке x* функция f(x) дважды дифференцируема и матрица её вторых производных H(**x***) (матрица Гессе) положительно определена (то есть все её главные миноры $\Delta_k > 0$), то есть $\nabla f(x^*) = 0$ и H(**x***) > 0, то x*- точка локального минимума. *(Напомним, что для прямоугольной матрицы A_{mn} определитель квадратной матрицы К-го порядка называется минором К-го порядка матрицы A_{mn})*

Матрица Гессе имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}$$

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

Решение. Запишем ***необходимые условия*** экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \; x^* = (0{,}0)$$

Проверим достаточные условия. Матрица Гессе имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(4x_1 + x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial(4x_1 + x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial(x_1 + 2x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial(x_1 + 2x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

то есть $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 8 - 1 > 0$, то H(x*)>0 и точка x*=(0,0) является точкой локального минимума.

Для того чтобы найти, является ли данная квадратичная форма положительно определенной, можно воспользоваться теоремой, которая формулируется следующим образом. **Для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия Сильвестра:**

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_{11} > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots \\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \end{cases}$$

Случай двух переменных. ***Достаточным условием минимума является положительность главных миноров первого и второго порядков***.

Случай трех переменных. ***Достаточным условием минимума для функции трех переменных является положительность всех трех миноров***

$$\Delta_1 > 0 \qquad \Delta_2 > 0 \qquad \Delta_3 > 0$$

Достаточным условием максимума для функции трех переменных является положительность четных миноров и отрицательность нечетных миноров

$$\Delta_1 < 0 \qquad \Delta_2 > 0 \qquad \Delta_3 < 0\,.$$

Аналогичным образом могут быть получены достаточные условия и при большем числе переменных.

4.2. Необходимые и достаточные условия условного экстремума. Принцип Лагранжа.

В задачах условной оптимизации область допустимых решений $\Omega \subseteq R^n$ содержит ограничения на вектор **x**:

$$extr\, f(x)$$

при ограничениях

$$g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k}, k < m \quad (2.2)$$
$$g_i(x) = 0, i = \overline{k+1,m},$$

Рассмотрим задачу условной оптимизации при ограничениях типа неравенств:

$$extr\, f(x) \qquad (2.3)$$

при ограничениях

$$g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}, m < n,$$

где целевая функция $f(x) = f(x_1,x_2,...,x_n)$ и функции ограничений $g_i(x_1,x_2,\ldots x_n)$ непрерывно дифференцируемые функции.

Необходимое условие экстремума для задачи (2.3) формулируется в виде принципа Лагранжа.

Принцип Лагранжа. Пусть x* - точка локального экстремума функции f(x), причем векторы $\nabla g_i(x^*),\ i = \overline{1,m}$ линейно независимы. Тогда найдутся такие числа $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots \lambda_m^*$, не равные одновременно нулю, что для функции Лагранжа

$$L(x,y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$$

выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad (2.4)$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ называются *множителями Лагранжа.* Система (2.4) содержит n + m уравнений с n + m неизвестными $x, x_2, \ldots x_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$. Точки $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, удовлетворяющие условиям (2.2) при некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, называются *условно-стационарными.* Тип условно-стационарной точки x* определяется знаком второго дифференциала функции Лагранжа (необходимым условием второго порядка):

если $d^2L > 0$	в т. x* - условно-локальный минимум;
если $d^2L < 0$	в т. x* - условно-локальный максимум;
если $d^2L = 0$	требуется дополнительное исследование
если $d^2L <> 0$	нет экстремума, точка x* является седловой, так как по одной переменной функция убывает, а по другой – возрастает.

Достаточные условия экстремума.

Пусть имеется точка x*, удовлетворяющая системе (1.5). Если в этой точке $d^2L(x^*,\lambda^*) > 0$ для всех ненулевых $dx^* \in R^n$ таких, что $dg_j(x^*) = 0$, то тогда x* является точкой локального минимума в задаче (2.3).

Пример. Найти условный экстремум функции $f(x) = (x_1^2 + x_2^2)$ при ограничении $x_1 + x_2 - 2 = 0$.

Решение.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2)$$

2. Запишем необходимые условия:

$$\frac{\partial L(x\quad,\lambda\quad)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda$$

$$\frac{\partial L(x\quad,\lambda\quad)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda}{2} \\ x_2 = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$$

3. Решение системы (условно-стационарная точка) будет $x_1^*=1$, $x_2^*=1$, $\lambda = -2$.
4. Проверим достаточные условия экстремума:

$$\begin{cases} d^2L(x^*,\lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 \\ dg_i(x^*) = dx_1 + dx_2 \end{cases}$$

5. Подставим $dx_1 = -dx_2$ в d^2L.

6. Поскольку $d^2L(x^*,\lambda^*) = 4dx_2^2 > 0$, то в точке x* = (1; 1) – локальный минимум

§5. Методы исследования функций численного анализа.

Линейное программирование ***представляет собой математический аппарат, разработанный для решения оптимальных задач с линейными выражениями для критерия оптимальности и линейными ограничениями на область изменения переменных. Такие задачи обычно встречаются при решении вопросов оптимального планирования производства с ограниченным количеством ресурсов, при определении оптимального плана перевозок (транспортные задачи) и т. д***. Для решения большого круга задач линейного программирования имеется практически универсальный алгоритм — *симплексный метод,* позволяющий за конечное число итераций находить оптимальное решение подавляющего большинства задач. Тип используемых ограничений (равенства или неравенства) не сказывается на возможности применения указанного алгоритма. ***Дополнительной проверки на оптимальность для получаемых решений не требуется.*** Как правило, практические задачи линейного программирования отличаются весьма значительным числом независимых переменных. Поэтому для их решения обычно используют вычислительные машины, необходимая мощность которых определяется размерностью решаемой задачи.

Принцип максимума применяют для решения задач оптимизации процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений. ***Достоинством математического аппарата принципа максимума является то, что решение может определяться в виде разрывных функций; это свойственно многим задачам оптимизации, например задачам оптимального управления объектами, описываемыми линейными дифференциальными уравнениями*** Нахождение оптимального решения при использовании принципа максимума сводится к задаче интегрирования системы дифференциальных уравнений процесса и сопряженной системы для вспомогательных функций при граничных условиях, заданных на обоих концах интервала интегрирования, т. е. к решению краевой задачи. На область изменения переменных могут быть наложены ограничения. Систему дифференциальных уравнений интегрируют применяя обычные программы на цифровых вычислительных машинах. ***Принцип максимума для процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, при некоторых предположениях является и достаточным условием оптимальности.*** Поэтому дополнительной проверки на оптимум получаемых решений обычно не требуется. Для дискретных процессов принцип максимума в той же формулировке, что и для непрерывных, вообще говоря, несправедлив. Однако условия оптимальности, получаемые при его применении для многостадийных процессов, позволяют найти достаточно удобные алгоритмы оптимизации

Методы нелинейного программирования применяют для решения оптимальных задач с нелинейными функциями цели. На независимые переменные могут быть наложены ограничения также в виде нелинейных соотношений, имеющих вид равенств или неравенств. По существу методы нелинейного программирования используют, если ни один из перечисленных выше методов не позволяет сколько-нибудь продвинуться в решении оптимальной задачи. ***Поэтому указанные методы иногда называют также прямыми методами решения оптимальных задач. Для получения численных результатов важное место отводится нелинейному программированию и в решении оптимальных задач такими методами, как динамическое программирование, принцип, максимума и т. п. на определенных этапах их применения. Названием «методы нелинейного программирования» объединяется большая группа численных методов, многие из которых приспособлены для решения оптимальных задач соответствующего класса.*** Выбор того или иного метода обусловлен сложностью вычисления критерия оптимальности и сложностью ограничивающих условий, необходимой точностью решения, мощностью имеющейся вычислительной машины и т. д. Ряд методов нелинейного программирования практически постоянно используется в сочетании с другими методами оптимизации, как, например, *метод сканирования* в динамическом программировании. Кроме того, эти методы служат основой построения систем автоматической оптимизации — оптимизаторов, непосредственно применяющихся для управления производственными процессами.

Динамическое программирование служит эффективным *методом решения задач оптимизации дискретных многостадийных процессов, для которых критерий оптимальности задается как аддитивная функция критериев оптимальности отдельных стадий.* Без особых затруднений указанный метод можно распространить и на случай, когда критерий оптимальности задан в другой форме, однако при этом обычно увеличивается размерность отдельных стадий. *По существу метод динамического программирования представляет собой алгоритм определения оптимальной стратегии управления на всех стадиях процесса.* При этом закон управления на каждой стадии находят путем решения частных задач оптимизации последовательно для всех стадий процесса с помощью методов исследования функций классического анализа или методов нелинейного программирования. Результаты решения обычно не могут быть выражены в аналитической форме, а получаются в виде таблиц. Ограничения на переменные задачи не оказывают влияния на общий алгоритм решения, а учитываются при решении частных задач оптимизации на каждой стадии процесса. При наличии ограничений типа равенств иногда даже удается снизить размерность этих частных задач за счет использования множителей Лагранжа.

Применение метода динамического программирования для оптимизации процессов с распределенными параметрами или в задачах динамической оптимизации приводит к решению дифференциальных уравнений в частных производных. Вместо решения таких уравнений зачастую значительно проще представить непрерывный процесс как дискретный с достаточно большим числом стадий. Подобный прием оправдан особенно в тех случаях, когда имеются ограничения на переменные задачи и прямое решение дифференциальных уравнений осложняется необходимостью учета указанных ограничений. При решении задач методом динамического программирования, как правило, используют цифровые вычислительные машины обладающие достаточным объемом памяти для хранения промежуточных результатов решения, которые обычно получаются в табличной форме.

Геометрическое программирование - ***есть метод решения одного специального класса задач нелинейного программирования, в которых критерий оптимальности и ограничены задаются в виде позиномов - выражений, представляющих собой сумму произведений степенных функций от независимых переменных.*** С подобными задачами иногда приходится сталкиваться в проектировании. Кроме того, некоторые задачи нелинейного программирования иногда можно свести к указанному представлению, используя аппроксимационное представление для целевых функций и ограничений.

Чувствительность оптимума.

Решение оптимальной задачи, полученное с использованием математической модели процесса, всегда дает лишь идеализированное представление об оптимальном режиме реального процесса, так как никакая модель не может полностью заменить оптимизируемый объект. Кроме того, при применении такого режима неизбежны отклонения от найденного закона оптимального управления. Поэтому, прежде чем перейти к вопросам практической реализации оптимального режима, **интересно хотя бы приближенно оценить чувствительность найденного оптимального решения к изменению параметров, модели в частности, к изменению управляющих действий**. ***Под чувствительностью оптимума ниже будет пониматься относительное изменение критерия оптимальности при отклонении управляющих воздействий от оптимальных значений.*** Вообще говоря, в приведенное определение чувствительности оптимума следует включить не только зависимость критерия от управляющих воздействий, но также и от всех остальных параметров математической модели, для которых в процессе моделирования необходимо задавать численные значения. В этом случае постановка задачи исследования чувствительности оптимума найденного на математической модели процесса, окажется наиболее полной. Однако принципиально анализ чувствительности оптимума несмотря на то, по какому параметру ее исследуют, проводят аналогичным методами. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением чувствительности только по отношению к управляющим воздействиям. Предположим, что известно оптимальное управление $u_{i\,,\text{опт}}$ (i= 1, . . . , r), максимизирующее значение критерия оптимальности R, который при этом принимается только как функция управляющих воздействий:

$$R = R\,(u_1,\ldots,u_r) \qquad (1,33)$$

При отклонении управляющих воздействий от оптимальных знаний $u_{i\,,\text{опт}}$ на величины Δu_i изменение критерия оптимальности определяется выражением:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathrm{R}=\mathrm{R}(u_{i\,,\text{опт}}+\boldsymbol{\Delta}u_1\,,\ldots,u_{r,\text{опт}}+\boldsymbol{\Delta}u_r)-\mathrm{R}(u_{1\,,\text{опт}},\ldots,u_{r\,,\text{опт}}) \qquad (1,34)$$

Для малых значений $\boldsymbol{\Delta}u_i$ оценка изменения критерия оптимальности может быть получена разложением правой части выражения (I,34) в ряде по степеням $\boldsymbol{\Delta}u_i$ с точностью до членов второго порядка малости:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathrm{R}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial R}{\partial u_i}\Delta u_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{i=0}^{r}\frac{\partial^2 R}{\partial u_i u_k}\Delta u_i\Delta u_k \qquad (1,35)$$

Полагая, что оптимум находится внутри допустимой области изменения значений управляющих воздействий и что функция R по крайней мере дважды дифференцируема в этой области, для оптимального управления будем иметь:

$$\frac{dR}{du_i}=0 \qquad i = 1,\dots,r \qquad (1,36)$$

С учетом равенства (1,36) выражение для оценки изменения критерия оптимальности можно записать в виде:

$$\Delta R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 R}{\partial u_i \partial u_k}\Delta u_i \Delta u_k \qquad (1,37)$$

Допустим, что максимальное отклонение управляющих воздействий от оптимального значения не превышает величины $\boldsymbol{\rho}$**.** В данном случае может быть принято неравенств

$$\Delta u_i \Delta u_k \leq \boldsymbol{\rho}^2 \qquad \text{I , k=1,…,r} \qquad (1,\ 38)$$

Комбинируя выражения (1,37) и (1,38), получим следующую оценку для изменения критерия оптимальности:

$$|\Delta R| \leq \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}^2\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\left|\frac{\partial^2 R}{\partial u_i \partial u_k}\right|, \qquad (1,39)$$

где производные суммируют по модулю для того, чтобы учесть возможное различие их знаков. Для оценки размеров окрестности $\boldsymbol{\rho}_м$, в которой допустимо изменение значений управляющих воздействий при изменении критерия оптимальности не более чем на $|\Delta R|$, из выражения (1,39) получим формулу

$$\rho_м = \sqrt{\frac{2|\Delta R|}{\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\left|\frac{\partial^2 R}{\partial u_i \partial u_k}\right|}}\ , \qquad (1,40)$$

которая для одного управляющего воздействия имеет простой вид:

$$\rho_м = \sqrt{\frac{2|\Delta R|}{\left|\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}\right|}}. \qquad (1,41)$$

Специфической особенностью методов решения оптимальных задач (за исключением методов нелинейного программирования) является то, что до некоторого этапа оптимальную задачу решают аналитически, т. е. находят определенные аналитические выражения, например, системы конечных или дифференциальных уравнений, откуда уже отыскивают оптимальное решение. В отличие от указанных методов при использовании методов нелинейного программирования, которые, как уже отмечалось выше, могут быть названы прямыми, применяют информацию, получаемую при вычислении критерия оптимальности, изменение которого служит оценкой эффективности того или иного действия. Важной характеристикой любой оптимальной задачи является ее размерность ***n,*** равная числу переменных, задание значений которых необходимо для однозначного определения состояния оптимизируемого объекта. Как правило, решение задач высокой размерности связано с необходимостью выполнения большого объема вычислений. Ряд методов (например, динамическое программирование и дискретный принцип максимума) специально предназначен для решения задач оптимизации процессов высокой размерности, которые могут быть представлены как многостадийные процессы с относительно невысокой размерностью каждой стадии.

Раздел 1.
Линейное программирование.

Глава 1. Метод линейного программирования

Сведение общей задачи ЛП к равносильной ей основной задаче путём введения добавочных неизвестных.

Общей задачей ЛП ***является отыскание наибольшего или наименьшего значения линейной функции на множестве неотрицательных решений линейной системы неравенств или системы: неравенства + уравнения*.**

В основной задаче ЛП линейная система содержит только уравнения:

Минимизировать (максимизировать):

$$\boldsymbol{F = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n}$$

при условиях

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1;}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m;}$$

$$\boldsymbol{x_i \geq 0; i = \overline{1,n}}$$

Общая задача ЛП может быть сведена к равносильной ей основной задаче путём введения добавочных неизвестных. Например, дана общая задача

$$\textbf{max } F = 12x_1 + 15x_2 + 19x_3$$

при условиях

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 60;$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 45;$$

$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1{,}3}.$$

Здесь показатель качества F и ограничения линейны относительно неизвестных. **Сведем общую задачу ЛП к равносильной ей основной задаче:**

$$\textbf{max } F = 12x_1 + 15x_2 + 19x_3$$

при условиях

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \qquad = 60;$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + \qquad x_5 = 45;$$

$$x_i \geq 0; i = \overline{1{,}5}.$$

Между общей задачей ЛП и соответствующей ей основной существует связь. Если $\boldsymbol{x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_5^*)}$ оптимальное решение (оптимальный план) основной задачи, то $\boldsymbol{x^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)}$ – оптимальное решение общей задачи и наоборот. Причем оптимальные значения целевых функций совпадают:

$$\boldsymbol{max\ F = 12x_1^* + 15x_2^* + 19x_3^*}$$

Таким образом, удалив из оптимального решений основной задачи значения добавочных неизвестных, получим оптимальное решение общей задачи. Если основная задача не имеет решения, то и общая задача также не имеет решения.
Задача ЛП является задачей максимизации, если находят $\boldsymbol{max\ F}$ и минимизации, если находят $\boldsymbol{min\ F}$.
В литературе могут также встретиться и другие формы записи общей и основной задач ЛП [1-4]:

1) Максимизировать (минимизировать) функцию цели

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n,$$

переменные которой подчинены следующим условиям:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m;$$

$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1,n}.$$

2) Минимизировать $\left\{\sum_{j=1}^{n} C_jx_j \;\middle|\; \begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0;\quad j = \overline{1,n} \end{matrix}\right\}$

3) Минимизировать Cx при условиях $x \geq 0,\ Ax = B$, где
$C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ – вектор-строка; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - вектор-столбец;
$A = [a_{ij}]$ – матрица коэффициентов системы ограничений;
$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – вектор-столбец.

§1. Примеры составления задач ЛП
Формулировка задачи о рациональном питании [2].

Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки определенное количество питательных веществ (белков, жиров, углеводов, воды, витаминов), запасы которых в различных видах пищи ($\lambda_i, i = 1,2, \ldots n$) различны. Ограничимся, например, двумя видами пищи λ_1 и λ_2.

Питательные вещества	Норма суточная	Виды пищи	
		λ_1	λ_2
Жиры	b_1	a_{11}	a_{12}
Белки	b_2	a_{21}	a_{22}
Углеводы	b_3	a_{31}	a_{32}
Вода	b_4	a_{41}	a_{42}
Витамины	b_5	a_{51}	a_{52}
		C_1	C_2

Здесь $\boldsymbol{a_{11}}$ **– запас жиров в единице (например, в 1 кг) пищи вида** $\boldsymbol{\lambda_1}$ и т.д. $\boldsymbol{C_1}$ **и** $\boldsymbol{C_2}$ **– стоимость единицы (1 кг) пищи вида** $\boldsymbol{\lambda_1}$ **и** $\boldsymbol{\lambda_2}$**.** Требуется так организовать питание, чтобы стоимость его была наименьшей, а организм получил бы не менее минимальной суточной нормы питательных веществ всех видов пищи.
Пусть x_1, x_2 – количество (например, в кг) пищи видов λ_1 и λ_2, потребляемых человеком в сутки. Тогда общие запасы жиров в двух видах пищи не должны быть меньше

минимальной нормы b_1, т.е. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ и т.д., всего 5 неравенств (обратить внимание на знак $\geq$). Общая стоимость питания $F = C_1x_1 + C_2x_2$, т.е. имеем следующую задачу ЛП:

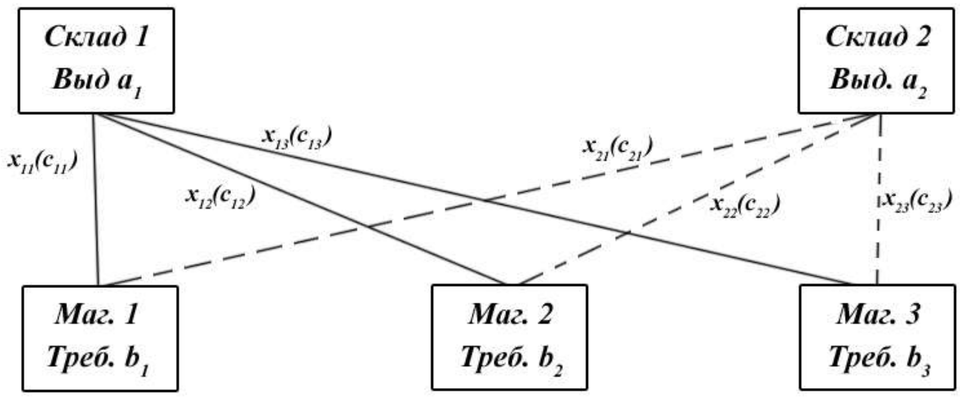
$$\min \boldsymbol{F = C_1x_1 + C_2x_2}$$

при условиях:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1;}\\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2;}\\ \boldsymbol{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3;}\\ \boldsymbol{a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \geq b_4;}\\ \boldsymbol{a_{51}x_1 + a_{52}x_2 \geq b_5;}\\ \boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.}\end{gathered}$$

Формулировка транспортной задачи

Необходимо перевезти некоторое количество единиц ***однородного товара*** из двух складов в три магазина (обратные перевозки исключаются). Склады могут выделить $\boldsymbol{a_1, a_2}$ единиц товара, а магазинам требуется $\boldsymbol{b_1, b_2, b_3}$ единиц товара.



Предполагается, что $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$, т.е. существует между складами и магазинами баланс. ***Необходимо определить, сколько единиц товара*** ***($x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$) надо отправить с каждого склада в каждый магазин, что общая стоимость перевозки*** F ***была минимальна, если $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}$ – стоимость перевозки товара от складов к магазинам. Зависимость стоимости перевозки от количества перевозимого товара предполагается линейной.***

Задача ЛП записывается следующим образом:

$$\min \boldsymbol{F = \sum_{j=1}^{3} C_{ij}x_{ij}, \qquad i = 1, 2.}$$

при условиях:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1;}\\ \boldsymbol{x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2;}\\ \boldsymbol{x_{11} + x_{21} \qquad = b_1;}\\ \boldsymbol{x_{12} + x_{22} \qquad = b_2;}\\ \boldsymbol{x_{13} + x_{23} \qquad = b_3;}\\ \boldsymbol{x_{ij} \geq 0;\ i = 1, 2;\ j = \overline{1, 3}.}\end{gathered}$$

Решением задачи является $\boldsymbol{x_{ij};\ i = 1, 2;\ j = \overline{1, 3}.}$ **При этом** $\boldsymbol{F}$ будет **минимальна.**

Аналитическая идея симплексного метода

Линейная система уравнений называется системой с базисом, если в каждом уравнении содержится неизвестное с коэффициентом +1, отсутствующее в остальных уравнениях. Эти неизвестные называются базисными, оставшиеся – свободными. Число базисных неизвестных равно числу уравнений.

Линейная система уравнений называется канонической, если она является системой с базисом, а все $\boldsymbol{b_i \geq 0; i = \overline{1,m}}$. В данном выше числовом примере система уравнений является канонической.

Примеры канонических систем:

1.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_2 - \quad 2x_4 + 3x_5 &= 3 \\ x_3 + x_4 - 8x_5 &= 5 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \quad 3x_4 + \quad 5x_6 &= 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 - \quad 2x_6 &= 0 \\ 3x_2 + \quad x_4 + x_5 + 7x_6 &= 15 \end{aligned}$$

Примеры неканонических систем:

1.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 3x_4 - \quad x_5 &= 0 \\ x_2 + \quad 2x_4 + 3x_5 &= -3 \\ x_3 + \quad x_4 - 8x_5 &= 5 \end{aligned}$$

Система неканоническая, так как один из свободных членов отрицателен.

2.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 15 \\ 7x_1 - x_2 + 5x_3 &= 18 \end{aligned}$$

Система неканоническая, так как в системе отсутствует базис.

3.

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Система неканоническая, так как в системе отсутствует базис.

Чтобы перейти к каноническому виду, необходимо в первом случае 2-е уравнение умножить на (-1), а затем во всех трех случаях ввести базис (полностью или частично).

При больших значениях m и n трудно найти оптимальное решение путем перебора всех его допустимых решений. Поэтому существует **упорядоченная схема перебора, получившая название симплексного метода** [1-4]. Поясним **аналитически** идею симплексного метода на следующем примере:

$$\mathbf{min}\ \boldsymbol{F = 3 - x_4 + x_5}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_2 \quad + 2x_4 + 3x_5} &= \mathbf{7} \\ \boldsymbol{x_3 - x_4 - 3x_5} &= \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x_1 \qquad + x_4 + x_5} &= \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x_i \geq 0;\ i = \overline{1,5}} \end{aligned}$$

По теореме Кронекера-Капелли [2] для совместности линейной системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A r(A) был равен рангу расширенной матрицы R r(R). ***r(A) есть наибольший из порядков миноров, отличных от нуля (т.е. r(A) – целое число). Известно, что r(A) не меняется, если к какому-либо столбцу (строке) прибавить произвольную линейную комбинацию других столбцов (строк) этой***

матрицы. Кроме того, r(A) не изменится, если какой-либо столбец, состоящий из нулей, удалить. Итак

$$\mathrm{r(A) = r}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ ?$$

Прибавив первый столбец, умноженный на (-1), к пятому, а затем и к четвертому, получим

$$\mathrm{r(A) = r}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполняем аналогичные преобразования и, в итоге, получим

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Соответственно, ранг расширенной матрицы будет равен также

$$\mathrm{r(R) = r}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ 3.$$

Следовательно, наша система совместна.

При формулировке задач ЛП могут быть два случая:

1. $\boldsymbol{r(A) = n}$ (n – количество неизвестных в системе).

Решение системы единственное. Задача ЛП **не имеет смысла**.

2. $\boldsymbol{r(A) < n}$. **Этот случай представляет для нас интерес.** Неизвестных больше, чем уравнений в системе. Задаваясь каждый раз $(n - r(A))$ свободными неизвестными, получим в итоге множество решений системы, из которых в соответствии с функцией цели выбирается то решение, которое дает оптимальный результат. В нашем примере $r(A) = 3; n = 5$.

Как было показано выше, в исходном числовом примере система уравнений каноническая.

Итак,

$$\min F = 3 - x_4 + x_5 \qquad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_2 \quad + 2x_4 + 3x_5 &= 7 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 &= 2 \\ x_1 \qquad\quad + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_i \geq 0;\ i &= \overline{1{,}5} \end{aligned}$$

В системе базисных переменных три (x_1, x_2, x_3), а свободных два (x_4, x_5). Выразим целевую функцию и базисные переменные через свободные переменные x_4 и x_5.

Но F уже выражена, а базисные переменные примут следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \ x_4 - \ \ x_5 \\ x_2 &= 7 - 2x_4 - 3x_5 \qquad (2) \\ x_3 &= 2 + \ x_4 + 3x_5 \qquad (3) \end{aligned}$$

Все $\boldsymbol{x_i}$, $i = \overline{1{,}5}$ должны быть неотрицательны, т.е. ≥ 0.

Зададим наименьшие возможные значения $\boldsymbol{x_4}$ и $\boldsymbol{x_5}$ $(\boldsymbol{x_4 = 0};\ \boldsymbol{x_5 = 0})$, ***при этом получим*** $\boldsymbol{F = 3};\ \boldsymbol{x_1 = 2};\ \boldsymbol{x_2 = 7};\ \boldsymbol{x_3 = 2.};\ \boldsymbol{x_4 = 0};\ \boldsymbol{x_5 = 0}$. **Это** ***решение, удовлетворяющее ограничениям, т.е. допустимое. Проанализируем, нельзя ли увеличением значений*** $\boldsymbol{x_4}$ и $\boldsymbol{x_5}$ ***уменьшить*** $\boldsymbol{F}$ **?** Из выражения

$$F = 3 - x_4 + x_5$$

следует, что при увеличении x_5 F возрастает. ***При*** $\boldsymbol{x_4} > 2$ $\boldsymbol{x_1}$ ***будет отрицательным*** ($\boldsymbol{x_1}$ ***− самый ненадёжный из*** (x_1, x_2, x_3)), Значит, следует принять $x_4 = 2$. ***Тогда получим новый допустимый план:*** $\boldsymbol{x_1 = 0};\ \boldsymbol{x_2 = 3};\ \boldsymbol{x_3 = 4};\ \boldsymbol{x_4 = 2};\ \boldsymbol{x_5 = 0}$. ***При этом*** $\boldsymbol{F = 1}$. Переменное $\boldsymbol{x_1}$ **выведено из базиса, вместо него в базис включен** $\boldsymbol{x_4}$, а x_1 и x_5 стали свободными переменными. Выразим новые базисные переменные x_2, x_3, x_4 и функцию F через x_1 и x_5. Из выражения $x_1 = 2 - x_4 - x_5$ найдём $\boldsymbol{x_4 = 2 - x_1 - x_5}$. Подставим x_4 в выражения
(1), (2), (3). Получим:

$$\begin{aligned} F &= 1 + x_1 + 2x_5 \\ x_2 &= 3 + 2x_1 - x_5 \\ x_3 &= 4 - x_1 + 2x_5 \\ x_4 &= 2 - x_1 - x_5 \end{aligned}$$

Из выражения $F = 1 + x_1 + 2x_5$ следует, что x_1 и x_5 должны быть равны нулю, так как в противном случае F будет расти.
Достигнуто оптимальное решение: $\boldsymbol{x_1 = x_5 = 0};\ \boldsymbol{x_2 = 3};\ \boldsymbol{x_3 = 4};\ \boldsymbol{x_4 = 2},\ \boldsymbol{F = 1}$.
Полученное решение называется базисным, так как свободные переменные равны нулю. Следует отметить, что оптимальное решение получено, когда в выражении для F полученные значения коэффициентов при неизвестных положительны, а в процессе решения значение F только понижалось от 3 до 1, т.е. перебор был организованным.

Пример. Найти минимальное значение целевой функции

$$F = x_2 - 3x_3 + 2x_5.$$

на множестве решений системы

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7} \\ \mathbf{-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12} \\ \mathbf{-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10} \\ \mathbf{x_i \geq 0, (i = 1, \dots, 6)} \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Здесь $x_1, x_4, x_6 -$ базис, x_2, x_3, x_5.- свободные переменные. Перепишем систему ограничений (1) в виде

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3x_2 + x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 12 + 2x_2 - 4x_3 \\ x_6 = 10 + 4x_2 - 3x_3 - 8x_5 \\ x_i \geq 0, (i = 1, \dots, 6) \end{cases} \qquad (2)$$

Исходным базисным решением является решение (7; 0; 0; 12; 0; 10), при котором значение функции равно нулю. Целевая функция уже выражена через небазисные переменные. **Значение целевой функции может быть уменьшено за счет увеличения** $\boldsymbol{x_3}$**.** Среди коэффициентов при x_3 в системе (2) имеются отрицательные: -4 и -3. Находим отношения $\frac{12}{4}$ (из второго уравнения системы (2)): $3 < \frac{10}{3}$. Элемент $\boldsymbol{x_4}$ – разрешающий. **Из старого базиса исключим** $\boldsymbol{x_4}$ **и введем в него из небазисных переменных** $\boldsymbol{x_3}$**.** Для этого выразим x_3 через x_4 и x_2 из второго уравнения и найденное выражение подставим вместо x_3 в первое и третье уравнения системы (2), а также в выражение F.
Получим систему (3), где $x_1, x_3, x_6 -$ базис, x_2, x_4, x_5.- свободные переменные.

$$\begin{cases} x_1 = 10 - \mathbf{2\frac{1}{2}x_2} - \frac{1}{4}x_4 - 2x_5 \\ x_3 = 3 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_6 = 1 + 2\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_4 - 8x_5 \\ x_i \ge 0, (i = 1, \dots, 6) \end{cases} \qquad (3)$$

$$F = -9 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_4 + 2x_5.$$

Новое базисное решение имеет вид: (10; 0; 3; 0; 0; 1). $F = -9$. Значение F можно уменьшить за счет увеличения x_2. Среди коэффициентов при x_2 в системе (3) только один отрицательный: $-2\frac{1}{2}$. Элемент $2\frac{1}{2}$ – разрещающий. Перейдем к новому базису: x_2, x_3, x_6

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{10}x_4 - \frac{4}{5}x_5 \\ x_3 = 5 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{3}{10}x_4 - \frac{2}{5}x_5 \\ x_6 = 11 - x_1 + \frac{1}{2}x_4 - 10x_5 \\ x_i \ge 0, (i = 1, \dots, 6) \end{cases} \qquad (3)$$

$$F = -11 + \frac{1}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_4 + 2\frac{2}{5}x_5.$$

Новое базисное решение имеет вид: (0; 4; 5; 0; 0; 11), $F = -11$. Дальнейшее уменьшение значения целевой функции невозможно.

Практическое решение задач линейного программирования, как правило, обычно проводится так: коэффициенты при переменных переписываются в специальные таблицы – симплексные таблицы (собственно мы это уже сделали при нахождении базисных решений системы линейных уравнений).

§ 2. Геометрическая интерпретация решения задачи ЛП.

Графический способ решения задач линейного программирования и геометрическая интерпретация.

Дана задача линейного программирования:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (1.1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \qquad (1.2) \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\le b_m \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \qquad (1.3)$$

или в краткой форме:

$$\max Z = \sum_{j=1,2} c_jx_j$$

$$\sum a_{ij}x_j \le b_i \ (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2).$$

Среди допустимых решений системы (1.2) найти то, которое обращает **в максимум** линейную форму (1.1).

Уравнение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \qquad (1.4)$$

на плоскости x_1Ox_2 определяет прямую, разбивающую всю плоскость на две полуплоскости, каждая из которых лежит по одну сторону от прямой. Прямая (1.4) называется *граничной* и принадлежит обеим полуплоскостям.

Координаты точек, лежащих в одной полуплоскости, удовлетворяют неравенству

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i \quad (1.5),$$

а координаты точек, лежащих в другой полуплоскости, удовлетворяют неравенству

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad (1.6)$$

Следовательно, системе неравенств (1.2) удовлетворяет множество точек X (x_1, x_2), лежащих в пересечении полуплоскостей, заданных неравенствами системы.

Пересечение конечного числа полуплоскостей есть некоторая выпуклая многоугольная область Ω, которая называется областью решения системы (1.2). Если система (1.2) противоречива, область Ω пуста. Поставленную задачу (1.1) - (1.3) можно теперь сформулировать следующим образом: **среди всех точек многоугольной области Ω найти ту, которая обращает в максимум линейную форму**

$$\mathbf{Z = c_1x_1 + c_2x_2}\,.$$

Выбрав произвольное $\mathbf{c}_0$, запишем уравнение прямой из семейства параллельных прямых, нормальных вектору $\overline{\mathrm{N}}(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$:

$$\mathrm{c}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{x}_2 = \mathrm{c}_0 \qquad (1.7)$$

Координаты точки, обращающей в максимум линейную форму (1.1), определяют решение задачи. Линейная форма задачи программирования достигает экстремума в крайней точке выпуклой области Ω. Если линейная форма принимает экстремальное значение более чем в одной крайней точке, она достигает того же значения в любой другой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек. Искомая точка определяется параллельным перемещением прямой

$$\mathrm{c}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{x}_2 = \mathrm{c}_0 \quad (1.8)$$

в положительном направлении вектора $\overline{\mathrm{N}}$.

Очевидно, решением задачи на максимум линейной формы является наиболее удаленная крайняя точка, в которой прямая (1.8) встречается с областью Ω. Если же задача линейного программирования сформулирована на минимум линейной формы, то решением задачи будет первая точка, в которой прямая

$$\mathrm{c}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{x}_2 = \mathrm{c}_0$$

встречается с областью Ω при параллельном перемещении в направлении вектора $\overline{\mathrm{N}}$.

Аналогично геометрически интерпретируется задача линейного программирования и в **n** - мерном пространстве

$$\max \mathrm{Z} = \mathrm{c}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{c}_n\mathrm{x}_n$$
$$\mathrm{a}_{11}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{12}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1n}\mathrm{x}_n \leq \mathrm{b}_1$$
$$\mathrm{a}_{21}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{2n}\mathrm{x}_n \leq \mathrm{b}_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathrm{a}_{m1}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{m2}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{mn}\mathrm{x}_n \leq \mathrm{b}_m$$

$$x_j \geq (j = 1, 2, \dots, n).$$

Каждое неравенство $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \leq b_i$ определяет в n-мерном пространстве полупространство, состоящее из точек $X(x_1, x_2, \ldots x_n)$, расположенных по одну сторону от граничной гиперплоскости $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \leq b_i$ и на самой этой гиперплоскости.

Пересечение конечного числа полупространств есть выпуклая многогранная область Ω, которая является множеством всех решений системы ограничений записанной задачи.

Значение линейной формы в точке X' (x'_1, x'_2, …, x'_n) можно рассматривать как уклонение точки $X'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ от гиперплоскости

$$\mathrm{c}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{c}_n\mathrm{x}_n = 0,$$

где под уклонением данной точки от гиперплоскости следует понимать число, полученное в результате подстановки в левую часть уравнения (1.9) вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координат точки X'. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования заключается в отыскании на множестве решений Ω^* такой крайней точки, которая наименее (наиболее) уклонена от гиперплоскости (1.9).

Схема решения задачи (1.1) - (1.3) графическим методом.

1. Записывают уравнения граничных прямых.
2. Строят графики граничных прямых на плоскости.
3. Выделяют область решения неравенств системы (1.2).
4. Строят многоугольник решений.
5. Строят график линейно формы (1.1).
6. Определяют экстремальную точку многоугольника.
7. Вычисляют значение линейной формы в полученной точке.

Пример. Используя графический метод, найти **максимум** линейной формы

$$Z = 7x_1 + 5x_2 \quad (1.10)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 19, \\ 2x_1 + x_2 &\le 13, \\ 3x_2 &\le 15, \\ 3x_1 &\le 18, \qquad (1.11) \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0. \qquad (1.12) \end{aligned}$$

Решение. Записывают уравнения граничных прямых и их графики строят на плоскости в выбранной системе координат:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 19\ (\mathbf{l_1}), \\ 2x_1 + x_2 &= 13\ (\mathbf{l_2}), \\ 3x_2 &= 15\ (\mathbf{l_3}), \\ 3x_1 &= 18\ (\mathbf{l_4}). \end{aligned}$$

Выделяют область решения каждого неравенства с помощью вспомогательной точки, в качестве которой удобнее всего взять 0(0,0), и как пересечение построенных полуплоскостей строят многоугольник решений Ω. Выражение линейной формы приравнивают любому произвольному числу и строят график, соответствующий полученному уравнению прямой:

$$7x_1 + 5x_2 = 0.$$

Прямая (1.13) проходит через начало координат и еще через одну точку, координаты которой легко определить.

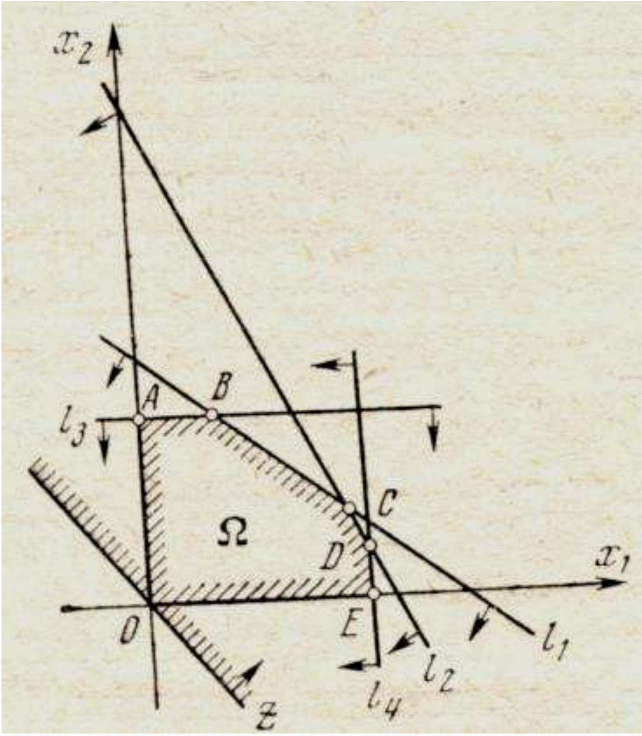


Рис. 1.1. Решение задачи линейного программирования графическим методом.

Параллельно перемещая прямую Z в направлении вектора $\overline{N}(7{,}5)$, видим, что экстремальной точкой является точка C (5, 3) – точка пересечения прямых (l_1) и (l_2) .

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \ \ 19\ (l_1), \\ 2x_1 + x_2 = \ \ \ 13\ \ (l_2). \end{cases}$$

Известно, что, система двух линейных уравнений с двумя неизвестными ξ_1, ξ_2 записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases} \qquad (1)$$

где α_{ij}, β_i - заданные числа из *K*.

Матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{bmatrix}$$

называется соответственной *основной* и *расширенной* матрицами системы (1). Чтобы исключить неизвестное ξ_2, умножим первое из уравнений на α_{22}, второе на $-\alpha_{12}$ и сложим их. В результате получим уравнение

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = \beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}.$$

Если $(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) \neq 0$, то из этого уравнения и аналогичного уравнения, получающегося путем исключения ξ_1, получим

$$\xi_1 = \frac{\alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \qquad \xi_2 = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}. \qquad (2)$$

Знаменатели выражений для неизвестных ξ_1, ξ_2 здесь одинаковы и представляют собой многочлен от элементов основной матрицы *A*. Значение этого многочлена называют определителем или детерминантом матрицы A и обозначают $\det A$ или $|A|$.

В нашем случае получим

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 19 \\ 2 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$x1 = \frac{\begin{bmatrix} 19 & 3 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{19 - 39}{2 - 6} = 5;$$

$$x2 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 19 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{26 - 38}{2 - 6} = 3;$$

$$\mathbf{max\ Z}|_{\mathbf{C(5,3)}} = \mathbf{7 * 5 + 5 * 3 = 50}.$$

Ответ: max Z = 50, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$.

При решении задачи линейного программирования графическим методом могут встретиться следующие случаи.

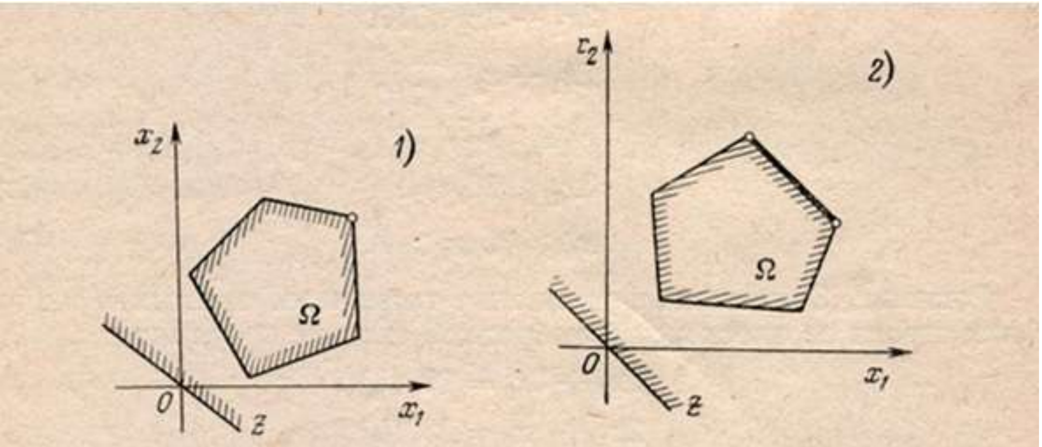


Рис 1). Задача имеет единственное решение

Рис..2). Задача имеет бесконечное множество решений

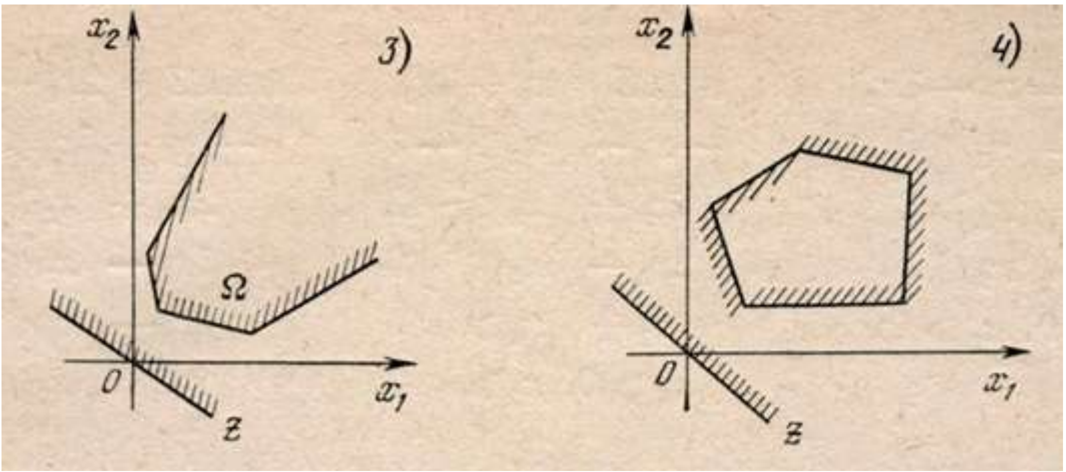


Рис.3). Линейная форма не ограничена Рис.4). Система ограничений несовместна

Дана *общая задача* ЛП:

$$\min F = -7x_1 - 5x_2 \qquad (1)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} 19 - 2x_1 - 3x_2 &\geq 0\ ; \\ 13 - 2x_1 - x_2 &\geq 0\ ; \\ 15 - \qquad 3x_2 &\geq 0; \\ 18 - 3x_1 \qquad &\geq 0; \\ x_i \geq 0; i &= 1,2 \end{aligned}$$

Вводя 4 добавочных неизвестных x_3, x_4, x_5, x_6, получим каноническую систему уравнений (x_3, x_4, x_5, x_6 –базис):

$$x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2 \qquad (2)$$
$$x_4 = 13 - 2x_1 - x_2 \qquad (3)$$
$$\leftarrow \boldsymbol{x_5} = 15 - \ 3x_2$$
$$x_6 = 18 - 3x_1$$
$$x_i \geq 0; \quad n - r(A) = 2.$$

Базис – x_3, x_4, x_5, x_6; свободные переменные – x_1, x_2. положим их равными 0.
Пусть $\boldsymbol{x_1 = 0}$; $\boldsymbol{x_2 = 0}$, **тогда** $\boldsymbol{x_3 = 19, x_4 = 13, x_5 = 15, x_6 = 18}$, $\boldsymbol{F = 0}$. В выражении для F можно увеличивать x_1 или x_2, при этом F будет уменьшаться. Примем $x_1 = 0$, а x_2 будет увеличивать до 5, т.к. при этом $x_5 = 0$, а $x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Поскольку x_5 «ненадежнее» всех в базисе, выведем его из базиса, а в базис введем x_2. Выразим F и новые базисные переменные через x_5 и x_1. для этого из уравнения $x_5 = 15 - \ 3x_2$ найдём $\boldsymbol{x_2}$ и подставим его в выражения (1), (2), (3).
В итоге получим **:**

$$\min F = -25 - 7x_1 + \frac{5}{3}x_5 \qquad (*)$$

при условиях:

$$\boldsymbol{x_2 = 5 - \frac{1}{3}x_5;}$$
$$\leftarrow \boldsymbol{x_3 = 4 - 2x_1 + x_5;}$$
$$\boldsymbol{x_4 = 8 - 2x_1 + \frac{1}{3}x_5;}$$
$$\boldsymbol{x_6 = 18 - 3x_1;}$$
$$\boldsymbol{x_i \geq o; i = \overline{1,6}.}$$

Допустимое базисное решение следующее: $\boldsymbol{x_1 = 0}$; $\boldsymbol{x_2 = 5}$; $\boldsymbol{x_5 = 0}$; $\boldsymbol{x_3 = 4}$; $\boldsymbol{x_4 = 8}$; $\boldsymbol{x_6 = 18}$; $\boldsymbol{F = -25}$. **Свободные переменные** x_1, x_5. Положим их равными 0. Решая пример далее, видим, что x_5 увеличивать нельзя, так как F будет возрастатать (а нам нужно F минимизировать). Значит $x_5 = 0$. Свободную переменную, x_1 можно увеличивать, но до $x_1 = 2$, иначе x_3 будет отрицательна (а в условиях $x_i \geq o; i = \overline{1,6}$.)
Итак, самая «ненадёжная » переменная это x_3 . Выводим x_3 из базиса, а вместо её в базис вводим «провокатора» переменную x_1. Свободные переменные теперь : x_3, x_5.
Из «ненадёжного» уравнения для x_3

$$x_3 = 4 - 2x_1 + x_5$$

находим

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$$

и подставляем x_1 в задачу (***).** Получим:

$$\min \boldsymbol{F = -39 + \frac{7}{2}x_3 - \frac{11}{6}x_5}.$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \longrightarrow\ x_1 &= 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 &= 5 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_4 &= 4 + x_3 - \frac{2}{3}x_5 \\ x_6 &= 12 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5 \end{aligned}$$

Допустимое базисное решение: $\boldsymbol{x_3 = x_5 = 0}$; $\boldsymbol{x_1 = 2}$; $\boldsymbol{x_2 = 5}$; $\boldsymbol{x_4 = 4}$; $\boldsymbol{x_6 = 12}$; $\boldsymbol{F = -39}$. Здесь можно увеличивать x_5 до 6, так как $x_4 = 0$. Базисными переменными будут: x_1, x_2, x_5, x_6; Свободными: x_3, x_4.
При этом

$$F = -50 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{11}{4}x_4.$$

Достигнуто оптимальное решение: $\boldsymbol{x_3 = x_4 = 0}$; $\boldsymbol{x_1 = 5}$; $\boldsymbol{x_2 = 3}$; $\boldsymbol{x_5 = 6}$; $\boldsymbol{x_6 = 3}$. $\boldsymbol{F_{min} = -50}$. ***В процессе перехода от одного базисного решения к другому значение F постоянно уменьшалось.***
Покажем решение данного примера графически.

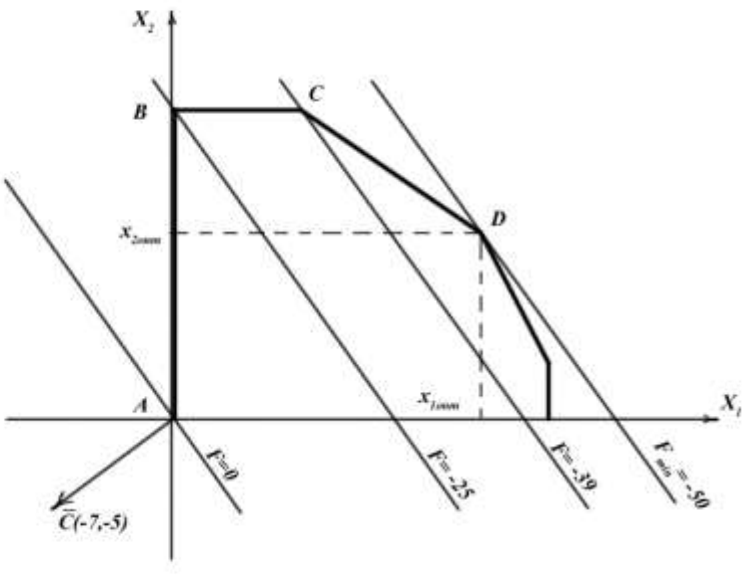


Рис.2

На координатные оси нанесем систему неравенств (см. пример). Выпуклая область (рис.2) соответствует совокупности решений системы неравенств. Минимальное и максимальное значения целевой функции $F = -7x_1 - 5x_2$ достигаются в точках пересечения этого многогранника решений с «опорными» прямыми $F = -7x_1 - 5x_2$, проведенными перпендикулярно вектору $\bar{C}(-7, -5)$. Выпишем x_1и x_2 из базисных решений:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ F = \quad 0 \text{ (точка А)};$$
$$x_1 = 0;\ x_2 = 5;\ F = -25 \text{ (точка } B);$$
$$x_1 = 2;\ x_2 = 5;\ F = -39 \text{ (точка } C);$$
$$x_1 = 5;\ x_2 = 3;\ F = -50 \text{ (точка } D).$$

Вектор $\bar{C}$ указывает положительное направление, при движении в котором F увеличивается. Целевая функция задачи ЛП достигает минимума (максимума) в крайней точке выпуклой области. Если **F** принимает оптимальное значение в нескольких точках, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек (случай, когда целевая функция достигает минимума на грани многогранника) [1]. ***Множество всех планов задачи ЛП выпукло [1-4]. Отыскание оптимума целевой функции сводится к перебору крайних точек выпуклого многогранника .***

§ 3. Алгоритм решения канонической задачи ЛП симплексным методом (метод Данцига).

Основная задача ЛП называется канонической, если система уравнений каноническая, а целевая функция выражена через свободные неизвестные.
Рассмотрим алгоритм решения канонической задачи ЛП симплексным методом:

Минимизировать $\boldsymbol{(-7x_1 - 5x_2)}$
при условиях:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{2x_1 + 3x_2 \le 19};\\ &\boldsymbol{2x_1 + x_2 \le 13};\\ &\boldsymbol{3x_2 \le 15};\\ &\boldsymbol{3x_1 \le 18};\\ &\boldsymbol{x_i \ge 0; i = 1, 2.}\end{aligned}$$

Это общая задача ЛП. Переходим к каноническому виду:

$$\boldsymbol{\min F = -7x_1 - 5x_2}$$

при условиях

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19};\\ &\boldsymbol{2x_1 + x_2 + x_4 = 13};\\ &\boldsymbol{3x_2 + x_5 = 15};\\ &\boldsymbol{3x_1 + x_6 = 18};\\ &\boldsymbol{x_i \ge 0;\ i = \overline{1, 6}.}\end{aligned}$$

Здесь x_3, x_4, x_5, x_6 – базисные, а x_1, x_2 – свободные переменные. Нетрудно убедиться, что r(A) = r(R) , т.е. система ограничений совместна. Кроме того, r(A) = 4, n = 6. Составим исходную симплексную таблицу.

Исходная симплексная таблица

Базисные переменные (B)	Свободные члены (x_0)	Коэффициенты при неизвестных						$\sum$
		x_1	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	19	2	3	1				25
x_4	13	2	1		1			17
$\rightarrow \boldsymbol{x_5}$	15		**3**			1		19
x_6	18	3					1	22
F	0	7	5					12

Пустые клетки соответствуют нулям. Столбец контрольной суммы ($\sum$) включает в себя алгебраические суммы коэффициентов каждой строки и служит для контроля арифметических действий при последующем преобразовании данной таблицы. **Последняя строка таблицы называется индексной. При ее заполнении свободный член целевой функции выписывается со своим знаком, а коэффициенты при неизвестных (оценки) – с противоположным.** ***Выберем так называемый разрешающий столбец с положительной оценкой.*** Но таких столбцов два. Выбираем столбец с оценкой 5. ***Далее выбирается так называемая разрешающая строка***. Из отношений свободных членов к положительным коэффициентам разрешающего столбца ($\frac{19}{3}$; $\frac{13}{1}$; $\frac{15}{3}$) выбираем **наименьшее т.е.** $\boldsymbol{\frac{15}{3}}$**. Это отношение и соответствует разрешающей строке. Коэффициент 3, находящийся на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется разрешающим элементом**. Выведем "ненадёжный" x_3 из базиса, а x_2 (провокатор) введем в базис. В результате получим новые наборы базисных и свободных переменных. Необходимо выразить базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные. Для этого разрешающую строку в исходной симплексной таблице делим на разрешающий элемент. Результат заноситься в новую симплексную таблицу “Итерация 1”.

Итерация 1

Базисные переменные	Свободные члены	Коэффициенты при неизвестных						$\sum$
B	x_0	$\boldsymbol{x_1} \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\rightarrow \boldsymbol{x_3}$	4	**2**		1		-1		6
x_4	8	2			1	-1/3		32/3
x_2	5		1			1/3		19/3
x_6	18	3					1	22
F	-25	7				-5/3		-59/3

Коэффициенты данной симплексной таблицы вычисляются таким образом, чтобы в разрешающем столбце исходной таблицы все элементы, кроме разрешающего, стали нулевыми. Например, для того что бы в исходной таблице в уравнении $2x_1$+$3x_2$+x_3=19 получить коэффициент при x_2 нуль, надо третью строку в таблице «Итерация 1» умножить на (-3) и сложить с первой строкой исходной таблицы. Результат записывается в первую строку таблицы «Итерация 1». Получим $2x_1$+x_3-x_5=4, откуда базисное переменное x_3 легко можно выразить через свободные переменные. Аналогично вычисляется в этой строке и контрольная сумма: $(\frac{19}{3}) \cdot (-3) + 25 = 6$. Алгебраическим сложением коэффициентов строки убеждаемся, что арифметической ошибки нет. В полученной таблице «Итерация 1» выбирается ***положительная оценка***. В частности, столбец, соответствующий оценке 7, будет разрешающим. Затем выбирается разрешающая строка и т.д. Столбец контрольной суммы для простоты можно опустить. Продолжим решение. В итоге получим следующие симплексные таблицы:

Итерация 2

Базисные переменные (B)	Свободные члены (x_0)	Коэффициенты при неизвестных					
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\boldsymbol{x_5} \downarrow$	x_6
x_1	2	1		1/2		-1/2	
$\rightarrow \boldsymbol{x_4}$	4			-1	1	**2/3**	
x_2	5		1			1/3	
x_6	12			-3/2		3/2	1
F	-39			-7/2		11/6	

Итерация 3

Базисные переменные (B)	Свободные члены (x_0)	Коэффициенты при неизвестных					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1		-1/4	3/4		
x_5	6			-3/2	3/2	1	
x_2	3		1	1/2	-1/2		
x_6	3			3/4	-9/4		1
F	-50			-3/4	-11/4		

Выписав из последней симплексной таблицы выражение для целевой функции $F = -50 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{11}{4}x_4$ убедимся, **что базисное решение** $\boldsymbol{x_1 = 5}$, $\boldsymbol{x_2 = 3}$, $\boldsymbol{x_3 = 0}$, $\boldsymbol{x_4 = 0}$, $\boldsymbol{x_5 = 6}$, $\boldsymbol{x_6 = 3}$ **является оптимальным (все оценки в индексной строке отрицательны), а** $\boldsymbol{F_{min} = -50}$.

Решая задачу максимизации $\boldsymbol{F' = 7x_1 + 5x_2}$ ***при тех же условиях, что и раньше, получим*** $\boldsymbol{F'_{max} = 50}$. ***Оптимальное решение этой задачи оптимизации совпадает с оптимальным решением задачи минимизации*** $\boldsymbol{F = -7x_1 - 5x_2}$.

Алгоритм решения канонической задачи ЛП
симплексным методом (общий случай).

Запишем в общем случае алгоритм решения канонической задачи ЛП симплексным методом [1-4].

Дано: $$\min\ (max)\,(\gamma_0 - \gamma_{r+1}x_{r+1} - \dots - \gamma_n x_n)$$

при условиях:

$$x_1 + \qquad a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1;$$

$$x_2 + \qquad a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b_2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{r,n}x_n = b_r;$$

$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1,n}.$$

1. **Составим исходную симплексную таблицу.**

Исходная симплексная таблица

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных									
		x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
x_1	b_1	1					$a_{1,r+1}$		a_{1j}		a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$										
x_i	b_i			1			$a_{i,r+1}$		a_{ij}		a_{in}
$\vdots$	$\vdots$										
x_r	b_r					1	$a_{r,r+1}$		a_{rj}		a_{rn}
F	γ_0						γ_{r+1}		γ_j		γ_n

2. **Выберем разрешающий столбец a_p из условия γ_p** > 0
   (в задаче максимизации $\gamma_p < 0$) .
3. **Выберем q – ю разрешающую строчку из условия**
$$\frac{b_q}{a_{qp}} = \min\left(\frac{b_i}{a_{ip}}\right),\ \ i = \overline{1,r}$$
для $a_{ip} > 0$ $\left(a_{qp} - \text{разрешающий элемент}\right)$.

4. **Формируем новую симплексную таблицу.**

Пересчитываем элементы разрешающей q-й строки по формуле:
$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}};\quad k = \overline{0,n}.$$
Вычисляем элементы остальных строк:
$$a'_{ik} = a_{ik} - a'_{qk} \cdot a_{ip}\ (i = 0,1,\dots,q-1,q+1,\dots,r).$$

Основная теорема симплексного метода формулируется следующим образом [3]. Если после выполнения очередной итерации задачи

$$min\ (max)\,(\gamma_0 - \gamma_{r+1}x_{r+1} - \dots - \gamma_n x_n)$$

при условиях:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{x_1 + \qquad\qquad a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1;} \\ \qquad \boldsymbol{x_2 + \qquad a_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2;} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{r,n}x_n = b_r;} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{x_i \geq 0; i = \overline{1,n}.} \end{array}$$

1) найдется хотя бы одна <u>положительная</u> (отрицательная) оценка и в каждом столбце с такой оценкой найдется хотя бы один положительный элемент, то можно улучшить решение, выполнив следующую итерацию;

2) найдется хотя бы одна <u>положительная</u> (отрицательная) оценка, столбец которой не содержит ни одного положительного элемента, то функция не ограничена в области допустимых решений;

3) все оценки окажутся <u>отрицательными</u> (положительными), то достигнуто оптимальное решение.

§ 4. Решение почти канонических задач.

Если система уравнений каноническая, а в выражении для целевой функции есть базисные переменные, то задача ЛП будет иметь почти канонический вид.

Пример:

$$min\{x_1 - x_3 \left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \qquad x_4 = 3 \\ \qquad x_i \geq 0; i = \overline{1,4}. \end{array} \right\}$$

Здесь переменные x_3 и ***x_4, являются базисными, а x_1*** и ***x_2 – свободными переменными. Так как базисное переменное x_3 входит в выражение для целевой функции, а система уравнений каноническая, то эта задача является почти канонической.*** Для ее решения симплексным методом необходим переход к каноническому виду. Для этого надо базисные переменные, входящие в целевую функцию (в нашем случае базисное переменное x_3), выразить через свободные переменные (т.е. x_1и x_2). Из первого уравнения системы имеем $x_3 = 1 - x_1 + 2x_2$. Тогда целевая функция примет вид $F = -1 + 2x_1 - 2x_2$. Решаем **теперь уже** каноническую задачу.

$$\mathbf{min} \quad \boldsymbol{F = -1 + 2x_1 - 2x_2.}$$

$$\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 1} \\ \boldsymbol{x_1 + 3x_2 + \qquad x_4 = 3} \\ \qquad \boldsymbol{x_i \geq 0; i = \overline{1,4}.} \end{array} \right\}$$

Запишем исходную симплексную таблицу и решение задачи.

Исходная симплексная таблица

	0	**1**	**0**	**-1**	**0**
B	x_0	Коэффициенты при неизвестных			
		x_1	$\boldsymbol{x_2}\downarrow$	x_3	x_4
$\mathbf{-1}$ x_3	1	1	-2	1	
0 $\longrightarrow$**$\mathbf{x_4}$**	3	1	**3**		1
F	-1	- 2	2		

Итерация 1

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных			
		x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	3	5/3		1	2/3
x_2	1	1/3	1		1/3
F	-3	-8/3			-2/3

Оптимальное решение: (0,1,3,0); $F_{min} = -3$.
При решении почти канонических задач существует правило заполнения индексной строки, которое делает излишним предварительные алгебраические преобразования целевой функции [4]. Например,

минимизировать $\boldsymbol{F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4}$

при условиях

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1;}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = b_2;}$$
$$\boldsymbol{x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4}.}$$

Исходная симплексная таблица записывается следующим образом:

	$\boldsymbol{c_0}$	$\boldsymbol{c_1}$	$\boldsymbol{c_2}$	$\boldsymbol{c_3}$	$\boldsymbol{c_4}$
B	x_0	Коэффициенты при неизвестных			
		x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathbf{c_3}$ x_3 $\mathbf{c_4}$ x_4	b_1 b_2	a_{11} a_{21}	a_{12} a_{22}	1	1
F	$c_3b_1 + c_4b_2 + c_0$	$c_3a_{11} + c_4a_{21} - c_1$	$c_3a_{12} + c_4a_{22} - c_2$		

Соответственно в нашем числовом примере коэффициенты индексной строки (см. исходные симплексные таблицы)

$$c_3b_1 + c_4b_2 + c_0 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 = -1;$$
$$c_3a_{11} + c_4a_{21} - c_1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1 = -2;$$
$$c_3a_{12} + c_4a_{22} - c_2 = (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 3 - 0 = 2;$$

§ 5. Вырожденная задача ЛП.

При рассмотрении симплексного метода предполагалось, что все $b_i > 0$ как в исходной системе, так и в системах , получаемых после определенных итераций. ***Если же в некоторых уравнениях, $b_i = 0$, то возникает неоднозначность в выборе решающего элемента и в соответствующем базисном решении. Базисные переменные, относительно которых эти уравнения разрешены, принимают нулевые значения. Базисное решение, в котором хотя бы одна из базисных переменных равна нулю, называется вырожденным решением, а задача ЛП, имеющая хотя бы одно вырожденное решение, называется вырожденной задачей. Применяя (в случае вырожденной задачи) последовательные итерации, мы можем вернуться к ранее встречавшемуся базисному решению, т.е. появляется так называемое зацикливание (значение линейной формы не меняются от итерации к итерации) в схеме расчета.*** **Рассмотрим правило устранения зацикливания** [1-4].

Если на каком либо этапе расчета возникает неопределенность в выборе разрешающей строки, т.е. окажется несколько равных минимальных отношений (b_i/a_{ip}), то следует выбирать ту строку, для которой отношение элементов следующего столбца к разрешающему будет наименьшим. Если при этом снова окажутся равные минимальные отношения, то составляются отношения элементов следующего столбца, и так до тех пор, пока разрешающая строка не определиться однозначно.

Пример: (Задача каноническая).

максимизировать $4x_5 + 2x_6$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + x_5 + x_6 &= 12; \\ x_2 \qquad + 5x_5 - x_6 &= 30; \\ x_3 \quad + x_5 - 2x_6 &= 6; \\ x_4 + \frac{3}{2}x_5 - x_6 &= 9; \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,6};$$

Исходная таблица

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных						$\frac{b_i}{a_{ip}}$	$\frac{a_{ib}}{a_{ip}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\boldsymbol{x_5}$ ↓	x_6		
							2	1	
x_1	12	1				1	1	12	
x_2	30		1			5	-1	6	-1/5
→ $\mathbf{x_3}$	6			1		**1**	-2	6	**-2**
x_4	9				1	3/2	-1	6	-2/3
F	0					-4	-2		

Выберем разрешающий элемент. Для этого делим столбец $\mathbf{x_0}$ на столбец $\mathbf{x_5}$ получим столбец 1. Здесь минимальное отношение будет **6**, но таких результатов 3 (возникла неоднозначность) ! Следовательно, надо искать новое минимальное отношение столбца столбца 2 на столбец $\mathbf{x_5}$. В итоге минимальное отношение равно (-2), т. е. ***строка*** $\mathbf{x_3}$ – разрешающая, а разрешающий элемент **1.** Выводим $\mathbf{x_3}$ из базиса, а $\mathbf{x_5}$ вводим в базис**.**

Итерация 1

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных						$\frac{b_i}{a_{ip}}$	$\frac{a_{ib}}{a_{ip}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boldsymbol{x_6}$ ↓	1	2
x_1	6	1		-1			3	2	
x_2	0		1	-5			9	0	-5/9
x_5	6			1		1	-2		
→ $\boldsymbol{x_4}$	0			-3/2	1		**2**	0	-3/4
F	24			4			-10		

В базисном решении $x_2 = x_4 = 0$. Возможно зацикливание. Применим и в данном случае правило устранения зацикливания.

Итерация 2

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных						$\frac{b_i}{a_{ip}}$
		x_1	x_2	$\mathbf{x_3}$ ↓	x_4	x_5	x_6	
x_1	6	1		5/4	-3/2			24/5
→ $\boldsymbol{x_2}$	0		1	**7/4**	-9/2			0
x_5	6			-1/2	1	1		
x_6	0			-3/4	1/2		1	
F	24			-7/2	5			

На второй итерации значение целевой функции не изменилось. Базисное решение $\boldsymbol{x_1 = 6}$, $\boldsymbol{x_2 = 0}$, $\boldsymbol{x_3 = 0}$, $\boldsymbol{x_4 = 0}$, $\boldsymbol{x_5 = 6}$, $\boldsymbol{x_6 = 0}$. Здесь только два решения b_i/a_{ip} (24/5 и 0:7/4). Следовательно, 7/4 – разрешающий элемент.

Итерация 3

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных					
		x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{x_4}$ ↓	x_5	x_6
→ $\mathbf{x_1}$	6	1	- 5/7		**12/7**		
x_3	0		4/7	1	-18/7		
x_5	6		2/7		-2/7	1	
x_6	0		3/7		-10/7		1
F	24		2		-4		

После итерации 3 значение F также не изменилось. Выводим из базиса x_1 , а x_4 вводим в базис.

Итерация 4

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	7/2	7/12	-5/12		1		
x_3	9	3/8	-1/2	1			
x_5	7	1/6	1/6			1	
x_6	5	5/6	-1/6				1
F	38	7/3	1/3				

Все оценки положительны, т.е. получено оптимально решение:

$$\boldsymbol{x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 9, x_4 = {}^{7}/_{2},\ x_5 = 7,\ x_6 = 5;\quad F_{max} = 38.}$$

Глава 2.
Решение основной задачи линейного программирования.

§1 Сведение основной задачи к двум каноническим.
Метод искусственного базиса

Если основная задача ЛП не является канонической или почти канонической, то симплексным методом можно провести исследование линейной системы основной задачи, что позволит:

1) Установить наличие или отсутствие планов у данной системы
2) В случае существования планов построить каноническую систему, равносильную исходной. Две системы с одним и тем же числом неизвестных равносильны (эквивалентны), если каждое решение первой системы является в то же время решением второй системы и наоборот [2].

Рассмотрим пример исследования линейной системы симплексным методом:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \quad (*)$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 8;$$

Система неканоническая (нет базиса) . Введем искусственный базис с помощью так называемых фиктивных переменных ξ_1, ξ_2. Полученная система является канонической:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + \xi_1 \qquad = 6; \quad (**)$$
$$x_1 - \ x_2 + \ 4x_3 + \quad \xi_2 = 8;$$

Составим так называемую вспомогательную задачу, заключающуюся в минимизации целевой функции $\varphi = \xi_1 + \xi_2$ при условиях (**). Сформулированная вспомогательная задача ЛП является почти канонической.

Для того чтобы линейная система (*) обладала планами, необходимо и достаточно, что бы минимальное значение целевой функции вспомогательной задачи было равно нулю ($\varphi_{min} = 0$). Если же $\varphi_{min} > 0$, то линейная система заведомо планов не имеет [4].

Решим сформулированную вспомогательную задачу: $min\ \varphi = \xi_1 + \xi_2$ **при условиях (**).** В задаче минимизации нас интересуют **положительные оценки.**

Исходная таблица

	0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
В	x_0	Коэффициенты при неизвестных				
		$\boldsymbol{x_1}\downarrow$	x_2	x_3	ξ_1	ξ_2
$\mathbf{1} \ \rightarrow \boldsymbol{\xi_1}$	6	**1**	2	-1	1	
1 $\quad \xi_2$	8	1	-1	4		1
φ	14	2	1	3		

Итерация 1

В	x_0	Коэффициенты при неизвестных				
		x_1	x_2	$\mathbf{x_3} \downarrow$	ξ_1	ξ_2
x_1	6	1	2	-1	1	
$\rightarrow \boldsymbol{\xi_2}$	2		-3	**5**	-1	1
φ	2		-3	5	-2	

Итерация 2

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных				
		x_1	x_2	x_3	ξ_1	ξ_2
x_1	$32/5$	1	$7/5$		$4/5$	$1/5$
x_3	$2/5$		$-3/5$	1	$-1/5$	$1/5$
φ	0				-1	-1

Оптимальное решение вспомогательной задачи достигнуто .

(32/5; 0; 2/5; 0; 0;) $\boldsymbol{\varphi_{min} = 0}$**.**

Следовательно, линейная система (*) совместна.

Если линейная система уравнений обладает планами, то существует равносильная ей каноническая система, которую можно получить из завершающей симплексной таблицы вспомогательной задачи [4].

Таблица «Итерация 2» содержит каноническую систему

$$x_1 + \frac{7}{5}x_2 + \qquad \frac{4}{5}\xi_1 + \frac{1}{5}\xi_2 = \frac{32}{5};$$
$$-\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}\xi_1 + \frac{1}{5}\xi_2 = \frac{2}{5}.$$

Из этой канонической системы при $\xi_1 = \xi_2 = 0$ получаем каноническую систему, равносильную исходной (*):

$$x_1 + \frac{7}{5}x_2 \qquad = \frac{32}{5};$$
$$-\frac{3}{5}x_2 + x_3 \quad = \frac{2}{5}. \qquad (***)$$

Среди базисных переменных последней симплексной таблицы «Итерация 2» нет ни одной фиктивной переменной.

Далее решаем каноническую (или почти каноническую) задачу ЛП: минимизировать (максимизировать) целевую функцию *F* основной задачи ЛП при условиях (***).

Однако может быть случай, когда среди базисных переменных последней симплексной таблицы есть хотя бы одно фиктивное. В этом случае из данной таблицы нельзя сразу выделить каноническую систему. К ней приходят после некоторых преобразований.

И, наконец, может быть случай, когда $\varphi_{min} > 0$, то есть исходная система планов не имеет и равносильной ей канонической системы не существует [4]. Например:

$$min\{\ \varphi = \xi_1 + \xi_2 \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + \quad \xi_1 \qquad = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + \qquad \xi_2 = 2; \\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4};\ \ \xi_i \geq 0;\ i = 1,2 \end{array} \right\}$$

Исходная таблица

	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
B	x_0	Коэффициенты при неизвестных					
		x_1	$x_2 \downarrow$	x_3	x_4	ξ_1	ξ_2
1 ξ_1	5	1	2	-1	1	1	
1 $\rightarrow \boldsymbol{\xi_2}$	2	2	**3**	1	2		1
φ	7	3	5		3		

Итерация 1

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных					
		x_1	x_2	x_3	x_4	ξ_1	ξ_2
ξ_1	$11/3$	$-1/3$		$-5/3$	$-1/3$	1	$-2/3$
x_2	$2/3$	$2/3$	1	$1/3$	$2/3$		$1/3$
φ	$11/3$	$-1/3$		$-5/3$	$-1/3$		$-5/3$

Так как $\varphi_{min} > 0$, то исходная система планов не имеет (равносильной ей канонической системы не существует).

§2. Задача о диете

Рассмотрим решение основной задачи ЛП на примере задачи о диете [4].
Для кормления крупного рогатого скота **требуется составить суточную диету** (рацион), включающую питательные вещества A, B, C (например белки, кальций и т.д.: питательного вещества A не менее 1000 ед., B – не менее 80 ед., C – не менее 300 ед. Эти питательные вещества не могут быть даны в чистом виде, а **содержатся в кормах двух видов I и II** (например, в концентрата, силосе и т.д.). Известно содержание питательных веществ A, B, C (в ед.) на 1 кг корма каждого вида и **себестоимость кормов** соответственно 4 и 3 руб.. за 1 кг. **Кроме того, суточный рацион должен содержать не более 25 кг корма вида I и 20 кг корма вида II.**

Питательные вещества	Содержание (в ед.) в 1 кг корма вида		Минимальная норма питательных веществ (ед.)
	I - концентрат	II - Силос	
A (белок)	50	20	1000
B (кальций)	2	4	80
C (фосфор)	15	10	300

Определить, сколько килограммов корма каждого вида надо взять для составления суточного рациона, чтобы он был достаточно питательным и имел наименьшую себестоимость.
Обозначим через $X = (x_1, x_2)$ суточный рацион, в котором $\boldsymbol{x_1}$ **– количество корма вида I (в кг);** $\boldsymbol{x_2}$ **– количество корма вида II.** Очевидно, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. В рационе X вещества A будет содержаться $(50x_1 + 20x_2)$ ед. Но оно должно входить в рацион в количестве не менее 1000 ед., значит $50x_1 + 20x_2 \geq 1000$. Аналогичным образом получим еще два неравенства, связанных с минимальной потребностью в питательных веществах B и C: $2x_1 + 4x_2 \geq 80$; $15x_1 + 10x_2 \geq 300$. Кроме того, на один рацион нельзя расходовать больше 25 кг корма I и 20 кг корма II, поэтому $x_1 \leq 25$, $x_2 \leq 20$.

Итак, получим общую задачу ЛП:

$$\boldsymbol{min\ \{F = 4x_1 + 3x_2} \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{50x_1 + 20x_2 \geq 1000};\text{ (белок)} \\ \boldsymbol{2x_1 + \quad 4x_2 \geq 80};\text{ (кальций)} \\ \boldsymbol{15x_1 + 10x_2 \geq 300};\text{ (фосфор)} \\ \boldsymbol{0 \leq x_1 \leq 25}; \\ \boldsymbol{0 \leq x_2 \leq 20}. \end{array} \right\}$$

В сформулированной задаче F – себестоимость рациона. ***От общей задачи ЛП перейдем к основной, введя добавочные переменные:***

$$\boldsymbol{min}\ \{F = 4x_1 + 3x_2 \left| \begin{array}{l} 50x_1 + 20x_2 - x_3 = 1000; \quad (1) \\ 2x_1 + \ \ 4x_2 \quad\ - x_4 = 80; \quad (2) \\ 15x_1 + 10x_2 \qquad - x_5 = 300; \ (3) \\ x_1 + \qquad\qquad\qquad x_6 = 25; \\ \qquad x_2 + \qquad\qquad\qquad x_7 = 20; \\ \qquad\qquad x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,7} \end{array} \right\} \textbf{(A)}$$

Применив метод искусственного базиса, запишем вспомогательную задачу:

$$\boldsymbol{min}\{\varphi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \left| \begin{array}{l} 50x_1 + 20x_2 - x_3 + \xi_1 = 1000; \\ 2x_1 + \ \ 4x_2 \quad - x_4 + \xi_2 = 80; \\ 15x_1 + 10x_2 \qquad - x_5 + \xi_3 = 300; \\ x_1 + \qquad\qquad\qquad x_6 \qquad = 25; \\ \qquad x_2 + \qquad\qquad\qquad x_7 = 20; \\ x_i \geq 0; i = \overline{1,7};\ \xi_i \geq 0; i = \overline{1,3} \end{array} \right\}$$

Базис: $\boldsymbol{\xi_1}$, $\boldsymbol{\xi_2}$, $\boldsymbol{\xi_3}$, $\boldsymbol{x_6}$, $\boldsymbol{x_7}$.

Однако **можно сократить количество фиктивных переменных**, проделав некоторые тождественные преобразования системы **(A)**. **Для этого первое уравнение (1) вычитаем из второго (2) и третьего (3), а затем поменяем в них знаки на противоположные.** Получим систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{array}{l} 50x_1 + 20\,x_2 - \ x_3 \qquad\qquad\qquad = 1000; \\ 48x_1 + 16x_2 - \ x_3 + x_4 \qquad\quad = 920; \\ 35x_1 + 10x_2 - \ x_3 + \quad x_5 \qquad = 700; \\ x_1 + \qquad\qquad\qquad\qquad x_6 \quad = 25; \\ \qquad\quad x_2 + \qquad\qquad\qquad x_7 = 20\,. \end{array}$$

Составим вновь вспомогательную задачу:

$$\boldsymbol{min}\ \{\varphi = \xi_1 \left| \begin{array}{l} 50x_1 + 20x_2 - x_3 + \xi_1 \ = \ 1000; \\ 48x_1 + \ 16x_2 - \ x_3 + x_4 \ \ = \ 920 \\ 35x_1 + \ 10x_2 - x_3 + \qquad x_5 \ = 700; \\ x_1 + \qquad\qquad\qquad\qquad x_6 \ = 25; \\ \quad x_2 + \qquad\qquad\qquad\quad x_7 \ = 20; \\ \qquad x_i \geq 0;\ i = \overline{1,7};\ \xi_1 \geq 0. \end{array} \right\}$$

Базис: $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{x_4}$, $\boldsymbol{x_5}$, $\boldsymbol{x_6}$, $\boldsymbol{x_7}$. Задача почти каноническая.

Исходная таблица

	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
B	x_0	Коэффициенты при неизвестных							
		$\boldsymbol{x_1} \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ξ_1
1 ξ_1	1000	50	20	-1					1
0 $\to \boldsymbol{x_4}$	920	**48**	16	-1	1				
0 x_5	700	35	10	-1		1			
0 x_6	25	1					1		
0 x_7	20		1					1	
φ	1000	50	20	-1					

Итерация 1

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных							
		x_1	$\boldsymbol{x_2} \downarrow$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ξ_1
$\rightarrow\ \boldsymbol{\xi_1}$	125/3		**10/3**	1/24	-25/24				1
x_1	115/6	1	1/3	−1/48	1/48				
x_5	175/6		-5/3	13/48	-35/48	1			
x_6	35/6		-1/3	1/48	-1/48		1		
x_7	20		1					1	
φ	125/3		10/3	1/24	-25/24				

Итерация 2

B	x_0	Коэффициенты при неизвестных							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ξ_1
x_2	25/2		1	1/80	-5/16				3/10
x_1	15	1		−1/40	1/8				-1/10
x_5	50			−1/4	-5/4	1			1/2
x_6	10			1/40	-1/8		1		1/10
x_7	15/2			-1/80	5/16			1	-3/10
$\boldsymbol{\varphi}$	**0**								-1

Следовательно, линейная система **(A)** обладает планами. Выпишем каноническую систему $(*)$, равносильную исходной, из последней симплексной таблицы вспомогательной задачи ЛП:

$$\begin{array}{l} x_2 + \frac{1}{80}x_3 - \frac{5}{16}x_4 = \frac{25}{2}; \\ x_1 - \frac{1}{40}x_3 + \frac{1}{8}x_4 = 15; \\ -\frac{1}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_4 + x_5 = 50; \qquad (*) \\ \frac{1}{40}x_3 - \frac{1}{8}x_4 + x_6 = 10; \\ -\frac{1}{80}x_3 + \frac{5}{16}x_4 + x_7 = \frac{15}{2}. \end{array}$$

Далее решаем почти каноническую задачу: $\min(4x_1 + 3x_2)$ при условиях (*).

Исходная таблица

	0	**4**	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
B	x_0	Коэффициенты при неизвестных						
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3 x_2	25/2		1	1/80	-5/16			
4 x_1	15	1		−1 /40	1/8			
0 x_5	50			−1/4	-5/4	1		
0 x_6	10			1/40	-1/8		1	
0 x_7	15/2			-1/80	5/16			1
F	195/2			-1/16	-7/16			

Получено оптимальное решение (x_1=15, x_2= 25/2, x_3= 0, x_4= 0, x_5 = 50, x_6= 10, $x_7 = 15/2$), $\boldsymbol{F_{min} = \frac{195}{2}}$ **руб. (см.А).**

Вывод: для составления суточного рациона надо взять 15 кг корма вида I и 12.5 кг корма вида II. Рацион будет достаточно питательным, его себестоимость минимальна, а стоимость = 97.5 руб. Значения добавочных переменных ($x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 50,\ x_6 = 10,\ x_7 = 15/2$) показывают, что питательных веществ видов А и В в рационе содержится соответственно 1000 и 80 ед., а веществ вида С на 50 ед. больше минимальной нормы – 300 ед. Кроме того, для суточного рациона будет израсходовано корма вида I на 10 кг меньше, имеющегося в запасе, а корма вида II – на 7.5 кг меньше.

В заключение отметим, что для некоторых типов задач ЛП (например, для транспортных задач) разработаны дополнительно специальные методы решения, оказывающиеся в ряде случаев более удобными и экономными.

Примечание: Если среди базисных переменных завершающей симплексной таблицы вспомогательной задачи содержится хотя бы одно искусственное переменное, то необходимо провести дополнительные преобразования, прежде чем придем к базису без искусственных переменных [4, с. 44].

Пусть, например, в завершающей симплексной таблице вспомогательной задачи остались ζ_1, ζ_2, X_1. Выпишем систему, которая при $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0$ будет неканонической

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 - \quad a'_{13}x_3 + \quad a'_{14}x_4 + \quad a'_{15}x_5 &= b'; \\ a'_{22}x_2 + \quad a'_{23}x_3 + \quad a'_{24}x_4 + \quad a'_{25}x_5 &= 0; \\ a'_{32}x_2 + \quad a'_{33}x_3 + \quad a'_{34}x_4 + \quad a'_{35}x_5 &= 0; \end{aligned}$$

Если $a'_{22} \neq 0$, то делим 2-е уравнение на a'_{22}, затем исключим x_2 из 1-го и 3-го уравнений (точно также, как в методе Гаусса). Получим

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + \left(a'_{13} - a'_{12}\frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)x_3 + \left(a'_{14} - a'_{12}\frac{a'_{24}}{a'_{22}}\right)x_4 + \left(a`_{15} - a'_{12}\frac{a'_{25}}{a'_{22}}\right)x_5 &= b_1 \\ x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 \qquad + \frac{a'_{24}}{a'_{22}}x_4 + \qquad \frac{a'_{25}}{a'_{22}}x_5 &= 0 \\ \left(a'_{33} - a'_{32}\frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)x_3 + \left(a'_{34} - a'_{32}\frac{a'_{24}}{a'_{22}}\right)x_4 + \left(a`_{35} - a'_{32}\frac{a'_{25}}{a'_{22}}\right)x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Затем исключим аналогично x_3 из 1-го и 2-го уравнения. Придем к канонической системе, равносильной исходной.

Глава 3. Целочисленное линейное программирование.

Важное значение в ЛП имеет случай, когда неизвестные целочисленные. Задача ЛП с дополнительным условием целочисленности неизвестных исследуется в новой **области математического программирования – целочисленном (дискретном) программировании (ЛЦП).**

§1 Метод Гомори

К основной задаче ЛП добавим дополнительное условие – условие целочисленности неизвестных, в результате получим задачу ЛЦП. Можно, конечно, получить дробное оптимальное решение задачи ЛП и его округлить до ближайших целых значений. Но тогда может случиться, что мы будем либо близки к оптимальному плану задачи ЛЦП, либо далеки, либо вообще уйдем за пределы множества планов ЛЦП. **Один из возможных методов решения задачи ЛЦП – метод Гомори**. **Идея метода базируется на представлении вещественного числа в виде суммы его целой и дробной частей.** Как известно, целой частью вещественного числа «а» называется наибольшее целое число, не превосходящее «а». Обозначение целой части **[а].** Разность $\beta = \mathrm{a} - [\mathrm{a}]$ есть дробная часть числа «а». Очевидно, например, что $0 \le \beta < 1$ и $\mathrm{a} = [\mathrm{a}] + \beta$. Например: $[5,2] = 5$; $\beta = 0,2$; $5,2 = 5 + 0,2$; $[-3,6] = -4$; $\beta = 0,4$; $-3,6 = -4 + 0,4$; $[8] = 8$; $\beta = 0$

Рассмотрим метод Гомори на примере (общая задача ЛП):

План задачи линейного программирования называют целочисленным, если все его составляющие целые числа.
Для определения целочисленного решения задачи:

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (7.1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (7.2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \quad (7.3) \end{aligned}$$

$$x_i \ge (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_i - \text{целые } (j = 1, 2, \dots n), \qquad (7.4)$$

или в краткой форме:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), x_i - \text{целые}$$

можно использовать алгоритм Гомори, состоящий из следующих этапов.

Первый этап. Задача (7.1) - (7.3) решается симплекс-методом до получения оптимального плана.

Второй этап. В последнюю симплекс-таблицу, содержащую оптимальный план, добавляют ограничение

$$-\beta_{i1}x_1 - \beta_{i2}x_2 - \cdots - \beta_{in}x_n \le -\beta_i, \qquad (7.5)$$

составленное для i - ой строки следующим образом:

$$\beta_{ij} = a'_{ij} - \left[a'_{ij}\right] = a'_j - n_{ij}$$

$$\beta_i = b'_i - [b'_i] = b'_i - n_i, \qquad (7.6)$$

где

$$n_i \le b'_i < n_i + 1, \;\; 0 \le \beta_i < 1$$
$$n_{ij} \le a'_{ij} < n_{ij} + 1, \qquad 0 \le \beta_{ij} < 1.$$

(Символом $[a]$ обозначают целую часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a).

Третий этап. В последней симплекс-таблице **выбирают введенную строку разрешающей. Разрешающий столбец выбирают по правилу двойственного симплекс-метода**. С выбранным таким образом разрешающим элементом осуществляют переход по известному алгоритму к следующей симплекс-таблице. Если при этом полученное решение окажется еще не целочисленным, то общий шаг повторяют.

Примечания.

1. Признаком отсутствия целочисленного решения в задаче (7.1)-(7.4) служит появление хотя бы одной строки с дробным свободным членом и целыми остальными коэффициентами. То есть в этом случае соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах.
2. Дополнительное ограничение целесообразно составлять для строки, содержащей в **столбце свободных членов наибольшую дробную часть.**
3. Дополнительное ограничение можно составлять несколько иначе, то есть в качестве коэффициентов при неизвестных выбрать единицы. Тем самым получим ограничение в виде

$-x_1 - x_2 - \cdots - x_n \le -1.$

Схема решения задачи (7.1) – (7.4)

1. Исходную задачу решают симплекс-методом до получения оптимального решения без учета требования целочисленности его.
2. Составляют дополнительное ограничение для строки, содержащую наибольшую дробную часть в столбце свободных членов.
3. Коэффициенты нового ограничения вносят в последнюю симплекс-таблицу.
4. Введенную строку выбирают разрешающей.
5. Разрешающий элемент выбирают по принципу двойственного симплекс-метода.
6. С выбранным таким образом разрешающим элементом осуществляют переход (по известным правилам) к следующей симплекс-таблице.
7. В случае необходимости составляют еще одно дополнительное ограничение и процесс повторяют до получения целочисленного решения.

Пример.

$$\boldsymbol{max\{f(x) = -3x_1 \;\; + 16\,x_2} \left| \begin{array}{r} \boldsymbol{-x_1 + 5x_2 \le 15;} \\ \boldsymbol{5x_1 - \;\; x_2 \le 12;} \\ \boldsymbol{x_i \;\ge 0; \;\;\; i = 1, 2} \\ \boldsymbol{x_i = 0, 1, 2} \dots \; (*) \end{array} \right\} \qquad \textbf{(1)}$$

Отбросим пока условие целочисленности (*) и **решим задачу ЛП**

$$\mathbf{max\{f(x) = -3x_1 + 16\,x_2} \left| \begin{array}{r} \mathbf{-x_1 + 5x_2 + x_3 = 15;} \\ \mathbf{5x_1 - x_2 + \qquad\quad x_4 = 12;} \\ \mathbf{x_i \;\ge 0; \;\;\; i = 1, 4.} \end{array} \right\} \qquad \textbf{(2)}$$

Задача ЛП – каноническая.

Исходная таблица

B	Свободный член	Коэффициенты при неизвестных			
		x_1	$\boldsymbol{x_2} \downarrow$	x_3	x_4
$\longrightarrow \boldsymbol{x_3}$	15	-1	$\mathbf{5}$	1	0
x_4	12	5	-1	0	1
f	0	3	-16	0	0

Итерация 1

B	Свободный член	Коэффициенты при неизвестных			
		$\boldsymbol{x_1} \downarrow$	x_2	x_3	x_4
x_2	3	$-1/5$	1	$1/5$	
$\longrightarrow \boldsymbol{x_4}$	15	$\mathbf{24/5}$		$1/5$	1
f	48	$-1/5$		$16/5$	

Итерация 2

B	Свободный член	Коэффициенты при неизвестных			
		x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	$3\frac{5}{8}$		1	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$
x_1	$3\frac{1}{8}$	1		$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$
f	$48\frac{5}{8}$			$\frac{77}{24}$	$\frac{1}{24}$

План: $\left(\mathbf{3\frac{1}{8}},\ \mathbf{3\frac{5}{8}},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0}\right)$, $\boldsymbol{f_{max}} = \mathbf{48\frac{5}{8}}$ **оказался нецелочисленным**. **Для отыскания целочисленного плана применим метод Гомори (метод отсечений).** С этой целью из завершающей симплексной таблицы выпишем каноническую систему (3) (эквивалентная системе (2)):

$$\left\{\begin{aligned} x_2 + \frac{5}{24}x_3 + \frac{1}{24}x_4 &= 3\frac{5}{8} \\ x_1 + \frac{1}{24}x_3 + \frac{5}{24}x_4 &= 3\frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Свободные члены обоих уравнений дробные. **Выбираем первое уравнение (с наибольшим дробным свободным членом):**

$$x_2+\frac{5}{24}x_3+\frac{1}{24}x_4=3+\frac{5}{8}$$
$$\frac{5}{24}x_3+\frac{1}{24}x_4-\frac{5}{8}=-x_2-0\cdot x_3-0\cdot x_4+3$$

Рассмотрим неравенство (т. н. неравенство Гомори)

$$\frac{5}{24}x_3+\frac{1}{24}x_4-\frac{5}{8}\geq 0, \qquad (3)^*$$

Запишем (с положительным свободным членом)

$$\frac{5}{24}x_3+\frac{1}{24}x_4\geq\frac{5}{8}. \qquad (3)^{**}$$

В [4, с. 173] показано, что любой целочисленный план задачи (2) удовлетворяет и неравенству (3)*. Оптимальный же (нецелочисленный) план задачи (2) не удовлетворяет неравенству (3)*. Добавим неравенство (3)** к условиям задачи (2), то есть:

$$\boldsymbol{max}\ \{\boldsymbol{f(x)=-3x_1+16x_2}\left|\begin{array}{c}\boldsymbol{-x_1+5x_2+x_3=15};\\ \boldsymbol{5x_1-\ x_2+x_4=12};\\ \boldsymbol{\frac{5}{24}x_3+\frac{1}{24}x_4\geq\frac{5}{8}}\\ \boldsymbol{x_i\ \geq 0;\quad i=1,4}\end{array}\right\},$$

а т.к. системы были эквивалентны, то задача ЛЦП запишется **((3) +(3)**):**

$$\boldsymbol{max}\ \{\boldsymbol{f(x)=-3x_1+16x_2}\left|\begin{array}{c}\boldsymbol{x_2+\frac{5}{24}x_3+\frac{1}{24}x_4=3\frac{5}{8}};\\ \boldsymbol{x_1+\ \frac{1}{24}x_3+\frac{5}{24}x_4=3\frac{1}{8}};\\ \boldsymbol{\frac{5}{24}x_3+\frac{1}{24}x_4\geq\frac{5}{8}}\\ \boldsymbol{x_i\ \geq 0;\quad i=1,4}\end{array}\right\} \quad (4)$$

Задача (4) почти каноническая (x_i =1,2,3….).
Решая задачу, получим оптимальный план $\boldsymbol{x^*(0,3,0,\ 15)}$; $\boldsymbol{\max f(x)=48}$.

Замечание 1. Ясно, что всякое дополнительное ограничение сужает область допустимых значений и максимум может быть только меньше или равен, но никак не больше. Оптимальный нецелочисленный план при этом отсекается. Если бы при решении задачи (4) план получился бы нецелочисленным, то необходимо вновь выписать неравенство Гомори к канонической системе из последней симплексной таблицы (новой) и далее вновь решать задачу ЛП и т.д., пока план оптимальной не окажется целочисленным.
Замечание 2. Если левая часть уравнения системы имеет дробные часть равные 0, а правая часть дробная, то задача ЛЦП планов не имеет, например $\boldsymbol{x_2+2x_3+x_4=3\frac{5}{8}}$. Здесь при целых значениях неизвестных никак не получится дробь $\boldsymbol{3\frac{5}{8}}$, т.е. неизвестные нецелочисленны, поэтому для составления неравенства Гомори берем уравнения с дробной левой частью.
Замечание 3. Ранее, когда решали задачу ЛП оптимальный план был: $x_1=3\frac{1}{8}$; $x_2=3\frac{5}{8}$; $x_3=x_4=0$; $f_{max}=48\frac{5}{8}$. Сейчас получили $x_1=0$; $x_2=3$; $x_3=0$; $x_4=15$; $f_{max}=48$. Если бы не применили для решения задачи ЛЦП метод Гомори, а просто округлили бы, глядя на решение задачи ЛП, например, $x_1=3$, $x_2=4$; или $x_1=$

$x_2 = 4$; или $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ то эти планы вообще выходят за пределы множества планов, т.к. не удовлетворяют системе задачи (1), в частности, системе

$$\left.\begin{array}{r} -x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 5x_1 - x_2 \le 12 \end{array}\right\}$$

Ну, а если округлить $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, то хотя это и план, но f(x) = 39, а у нас $f_{max}(x) = 48$, т.е. значения f(x) значительно отличаются.

Пример. Найти

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

при условиях:

$$x_1 - 2x_2 \le 2$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$
$$x_1, x_2 - \text{ целые.}$$

Снимем условие целочисленности.

Max Z = x1 + 2 x2

при условиях:
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$
$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 3$$
$$x_i \ge 0;\ i = \overline{1,5}.$$

Исходная симплексная таблица

Базисные переменные (B)	Свободные члены (x_0)	Коэффициенты при неизвестных				
		x_1	$\boldsymbol{x_2} \downarrow$	x_3	x_4	x_5
x_3	2	1	-2	1		
$\to x_4$	2	-2	**1**		1	
x_5	3	1	1			1
Z	0	-1	-2			

Итерация 1

Базисные переменные (B)	Свободные члены (x_0)	Коэффициенты при неизвестных				
		$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	6	-3		1	2	
x_2	2	-2	1		1	
$\rightarrow x_5$	1	**3**			-1	1
Z	4	-5			2	

Итерация 2

Базисные переменные (B)	Свободные члены (x_0)	Коэффициенты при неизвестных				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	7			1	1	1
x_2	$\frac{8}{3}$		1		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	1			$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Z	$\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$				$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

Задача ЛП решена. Решение нецелочисленное.
В таблице (7.3) получен оптимальный план. В столбце P_0 не все элементы целые. Так как во второй строке в $\overline{P}_0$ содержится наибольшая дробная часть, то для нее составляют дополнительное ограничение, коэффициенты которого следующие:

$$\beta_{20} = \frac{8}{3} - \left[\frac{8}{3}\right] = \frac{2}{3};\ \beta_{21} = 0 - [0] = 0;$$
$$\beta_{22} = 1 - [1] = 0;\ \ \beta_{23} = 0 - [0] = 0;$$
$$\beta_{24} = \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3};\ \beta_{25} = \frac{2}{3} - \left[\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}.$$
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \geq \frac{2}{3},$$

или

$$-0x_1 - 0x_2 - 0x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \leq -\frac{2}{3}.$$

Добавляем неравенство Гомори к итерации 2. Получим задачу ЦЛП:

Max $Z = x_1 + 2x_2$

при условиях:

$$
\begin{aligned}
x_3 + x_4 + x_5 &= 7\\
x_2 + \tfrac{1}{3}x_4 + \tfrac{2}{3}x_5 &= \tfrac{8}{3}\\
x_1 - \tfrac{1}{3}x_4 + \tfrac{1}{3}x_5 &= \tfrac{1}{3}\\
-\tfrac{1}{3}x_4 - \tfrac{2}{3}x_5 &\le -\tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$x_i \ge 0;\quad i = \overline{1,5}.$

$x_i;\ i = \overline{1,5}$ (целые).

Исходная симплексная таблица

Базисные переменные (B)	Свободные члены (x_0)	Коэффициенты при неизвестных					
		x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{x_4} \downarrow$	x_5	S_2
x_3	7			1	1	1	
x_2	$\frac{8}{3}$		1		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
x_1	$\frac{1}{3}$	1			$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\rightarrow S_2$	$\frac{-2}{3}$				$\boldsymbol{\frac{-1}{3}}$	$\frac{-2}{3}$	1
Z	$\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$				$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	

Итерация 1

Базисные переменные (B)	Свободные члены (x_0)	Коэффициенты при неизвестных					S_2
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5			1		-1	3
x_2	2		1				1
x_1	1	1				1	-1
S_2	2				1	2	-3
Z	5					1	1

Получили оптимальное и целочисленное решение $\bar{x} = (1;2;5;2;0)$ L(max) = 5. Дадим геометрическую интерпретацию решения данной задачи. Из рис. 1 видно, что максимально значение целевая функция принимает в точке $A\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$, то есть решение $\bar{x} = \left(\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ является оптимальным, но без учета требования целочисленности.

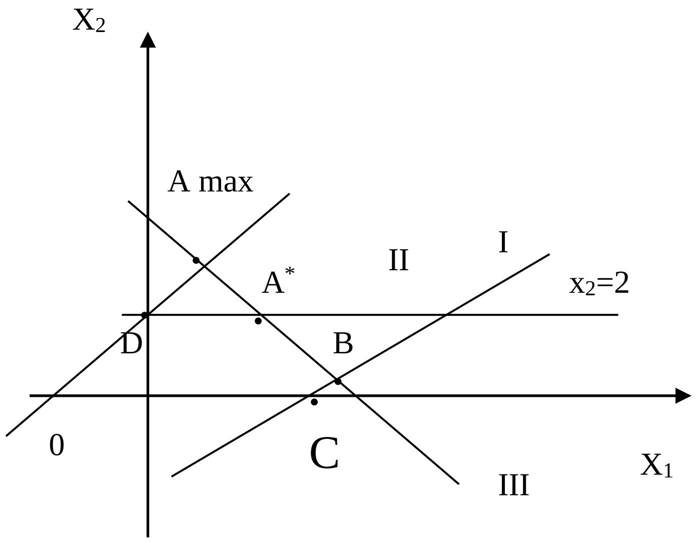


Рис. 1

С учетом требования целочисленности решение $\bar{x} = \left(\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ не является оптимальным, поэтому используем дополнительное ограничение $-0x_1 - 0x_2 - 0x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \le \frac{2}{3}$ или $\frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \ge \frac{2}{3}$. Значения переменных x4 и x5 подставим из второго и третьего уравнений системы ограничений $x_4 = 2 + 2x_1 - x_2$, $x_5 = 3 - x_1 - x_2$. В результате получим $x_2 \le 2$. Этому неравенству на рис. 1 соответствует полуплоскость, ограниченная прямой $x_2 = 2$, отсекающей от многоугольника допустимых решений треугольник АДА*. В новом многоугольнике допустимых решений ОДА*ВС найдем точку А*(1,2), в которой целевая функция принимает максимальное значение. Так как координаты точки А* – целые числа, то решение $\bar{x}^* = (1,2)$ является оптимальным планом исходной задачи.

§2. Пример постановки задачи рационального раскроя [4, с.176].

Пусть имеется достаточно большое количество брёвен длиной 3 м. Брёвна следует распилить *на заготовки двух видов: длиной 1,2 м. и 0,9м.;* причем заготовок каждого вида должно быть получено не менее *50 шт. и 81 шт.* соответственно. Каждое бревно может быть распилено на указанные заготовки несколькими способами. Требуется найти число брёвен, распиливаемых каждым способом с тем, чтобы необходимое количество заготовок каждого вида было получено из наименьшего количества бревен.

Решение. Бревно, длиной 3м может быть распилено на заготовки нужной длины следующими способами:

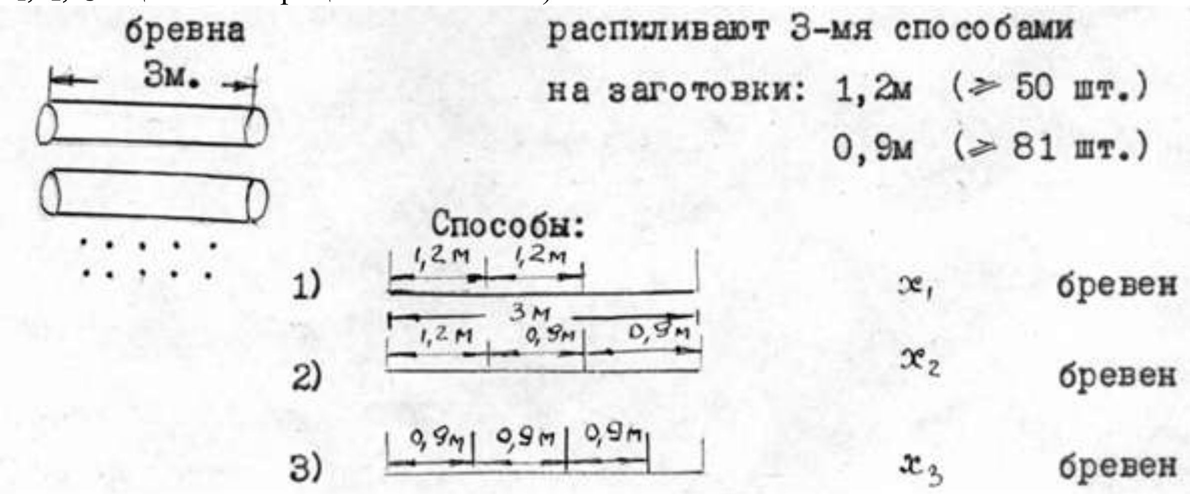
1).На 2 заготовки длиной 1,2м;

2). На 1 заготовку длиной 1,2м и 2 заготовки длиной 0,9м;

3). На 3 заготовки длиной 0,9м.

Другие способы раскроя, очевидно, не следует принимать во внимание.

Пусть x_1, x_2, x_3 – число бревен, распиливаемых 1, 2 и 3 способами соответственно (т.е. x_1, x_2, x_3 – целые неотрицательные числа).



Всего брёвен (шт.): $x_1 + x_2 + x_3$

Надо найти

$$\boldsymbol{min\{ f = x_1 + x_2 + x_3 \left| \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 \geq 50 \\ 2x_2 + 3x_3 \geq 81 \end{array}\right\} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \\ x_i = 0, 1, 2, \ldots;\ i = \overline{1,3} \end{array} \right.}$$

Ответ: $\boldsymbol{x*(7,\ 36,\ 3); \min\quad f(x*) = 46.}$ Для того, чтобы получить необходимое количество заготовок каждого вида надо 7 бревен распилить первым способом; 36 - вторым; 3 – третьим. То есть получили:

2*7 +36 =50;

2*36 +3*3=81.

Решение:

$$\boldsymbol{min\{ f = x_1 + x_2 + x_3 \left| \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 - x_4 = 50 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 81 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{array} \right\}}$$

Надо ввести искусственный базис, для этого проделаем тождественное преобразование: уравнение с большей правой частью (81) вычтем из 1-го уравнения и сменим знаки на противоположные:

$$2x_1 + x_2 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 50 - 81;$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -31;$$
$$\boldsymbol{-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 31.}$$

Получим задачу:

$$\boldsymbol{min\{f = x_1 + x_2 + x_3 \left| \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 31 \\ 2x_2 + \qquad 3x_3 - \qquad x_5 = 81 \\ \qquad\qquad x_i \geq 0, \;\; i = \overline{1,5} \end{array} \right\}}$$

Вводим искусственное переменное ξ_1 (во втором уравнении), решаем вспомогательную задачу и т.д.

Глава 4. Теория двойственности в ЛП

§ 1. Симметричные двойственные задачи

Задача об использовании сырья [4, стр.4, 38].

Из сырья I и II (например: мука и вода), запасы которого ограничены и составляют 60 и 45 единиц соответственно, изготавливается продукция 3-х видов. На производство единицы ***продукции 1 го вида затрачивается*** 4 ед. сырья I и 2 ед. сырья II; **2 го вида** – 2 и 6 соответственно, а 3 го вида – 6 и 4 ед. Выручка от производства единицы продукции каждого вида составляет соответственно 12 руб., 15руб., 19руб. ***Надо найти такой план выпуска продукции, при котором сырье не будет перерасходовано, а суммарная выручка будет наибольшей.***

Сырье	**Затраты сырья на единицу продукции вида**			**Запасы сырья**
	1	**2**	**3**	
I	4	2	6	60
II	2	6	4	45
Выручка за ед. продукции (руб)	12	15	19	

Пусть:
x_1 – количество единиц выпущенной продукции 1-го вида;
x_2 – количество единиц выпущенной продукции 2-го вида;
x_3 – количество единиц выпущенной продукции 3-го вида.
Тогда можно записать:

$$\boldsymbol{max\{f(x) = 12x_1 + 15x_2 + 19x_3 \left| \begin{array}{c} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 60 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 45 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,3} \end{array} \right\}} \qquad (\mathbf{1})$$

Вводим искусственный базис (x_4 , x_5) и решаем каноническую задачу.

Исходная таблица

B	Св. член	Коэффициент при неизвестных				
		$\boldsymbol{x_1} \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5
$\longrightarrow \boldsymbol{x_4}$	60	**4**	2	6	1	
x_5	45	2	6	4		1
f	0	-12	-15	-19		

Итерация 1

B	Св. член	Коэффициент при неизвестных				
		x_1	$\boldsymbol{x_2} \downarrow$	x_3	x_4	x_5
x_1	15	1	1/2	3/2	1/4	
$\longrightarrow x_5$	15		**5**	1	- 1/2	1
f	180		- 9	- 1	3	

Итерация 2

B	Св. член	Коэффициент при неизвестных				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	27/2	1		7/5	3/10	-1/10
x_2	3		1	1/5	-1/10	1/5
f	207			4/5	21/10	9/5

Ответ: x_1 = 13,5 единиц
x_2 = 3 единицы
$f_{max} = 207$ руб.

Для получения максимальной выручки 207 руб., надо выпустить 13,5 ед. продукции 1-го вида и 3 ед. 2-го вида, значение x_3= 0 означает, что продукцию 3-го вида выпускать не следует.

Поставим своей целью назначить «справедливые» продажные цены на оба сырья. Пусть, например, y_1 - цена единицы I-го сырья, y_2 – цена единицы II-го сырья. Тогда стоимость всего сырья $g(y) = 60y_1 + 45y_2$. Общая задача ЛП имеет вид:

$$\min\{g(y) = 60y_1 + 45y_2 \left| \begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 \geq 12 \\ 2y_1 + 6y_2 \geq 15 \\ 6y_1 + 4y_2 \geq 19 \\ y_i \geq 0,\ i = 1,2 \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Любое решение задачи (2) называется планом оценок ресурсов, а оптимальный план – оптимальные оценки. Разумеется, оптимальные оценки ресурсов, определенные в условиях данной задачи имеют относительный смысл. В условиях другой задачи те же ресурсы могут иметь другие оценки.

$$\left.\begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 - y_3 = 12 \\ 2y_1 + 6y_2 - \quad y_4 = 15 \\ 6y_1 + 4y_2 - \qquad y_5 = 19 \end{array}\right\}.$$

Или после тождественных преобразований (вычитаем из третьего уравнения первое и второе и меняем знаки) система примет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{r} 2y_1 + 2y_2 + y_3 - y_5 = 7 \\ 4y_1 - 2y_2 + \quad y_4 - y_5 = 4 \\ 6y_1 + 4y_2 - \qquad y_5 = 19 \end{array}\right\}.$$

Формулируем задачу минимизации:

$$\min\{y = \xi_1 \left| \begin{array}{c} 2y_1 + 2y_2 + y_3 - y_5 = 7 \\ 4y_1 - 2y_2 + \quad y_4 - y_5 = 4 \\ 6y_1 + 4y_2 - \qquad y_5 + \xi_1 = 19 \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,5},\ \ \xi_1 \geq 0 \end{array} \right\}. \qquad (3)$$

Исходная таблица

	0	0	0	0	0	0	1
B	Св. член	Коэффициент при неизвестных					
		$\boldsymbol{y_1}\downarrow$	y_2	y_3	y_4	y_5	ξ_1
0 y_3	7	2	2	1		-1	
$\boldsymbol{\rightarrow 0\ \ y_4}$	4	**4**	-2		1	-1	
1 ξ_1	19	6	4			-1	1
φ	19	6	4			-1	

Итерация 1

B	Св. член	Коэффициент при неизвестных					
		y_1	y_2	y_3	y_4	$\boldsymbol{y_5}\downarrow$	ξ_1
y_3	5		3	1	-1/2	-1/2	
y_1	1	1	-1/2		1/4	-1/4	
$\rightarrow \boldsymbol{\xi_1}$	13		7		-3/2	**1/2**	1
φ	13		7		-3/2	1/2	

Итерация 2

B	Св. член	Коэффициент при неизвестных					
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	ξ_1
y_3	18		10	1	-2		1
y_1	15/2	1	3		-2/4		1/2
y_5	26		14		-3	1	2
φ	0						-1

Решаем почти каноническую задачу.

$$\min\{g(y) = 60y_1 + 45y_2 \left| \begin{array}{l} y_1 + 3y_2 - \frac{1}{2}y_4 = 7,5 \\ 10y_2 + y_3 - 2y_4 = 18 \\ 14y_2 - 3y_4 + y_5 = 26 \\ y_i \geq 0, \ \ i = \overline{1,5} \end{array} \right\}$$

Исходная таблица

B	Св. член	Коэффициент при неизвестных				
		y_1	$\boldsymbol{y_2}\downarrow$	y_3	y_4	y_5
y_1	7,5	1	3		-1/2	
$\rightarrow \boldsymbol{y_3}$	18		**10**	1	-2	
y_5	26		14		-3	1
g	450		135		-30	

Итерация 1

B	Св. член	Коэффициент при неизвестных				
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	2,1					
y_2	1,8		1	1/10	-2/10	
y_5	0,8					
g	207			-13,5	-3	

Ответ: $y_1 =$ 2,1 руб.; y_2 = 1,8 руб. – оптимальные оценки ресурсов. $y_3 = y_4 = 0$, y_5=0,8 руб.

Вывод: ***Для получения «справедливой» продажной стоимости сырья надо назначить цены за единицу I сырья – 2,1 руб.; за единицу II сырья – 1,8 руб.*** Равенства $y_3 = y_4 = 0$ означает, что продажная стоимость сырья равна выручке от продажи единицы продукции 1 и 2 видов; $y_5 =$ 0,8 руб. означает, что продажная стоимость сырья на изготовление единицы продукции 3-го вида на 0,8 руб. больше выручки. **Минимальная продажная стоимость всего сырья в задаче (2) = максимуму выручки в задаче (1).**

Рассмотренные задачи (1) и (2) образуют пару т.н. симметричных двойственных задач.

В общем виде:

Задача I	Задача II
Максимизировать $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ при условиях: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2$ $\vdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m$ $x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,n}$	Минимизировать $g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$ при условиях: $a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1$ $a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2$ $\vdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n$ $y_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,m}$

Матрица А здесь транспонируется. Задача II является двойственной к задаче I, а задача I двойственной к задаче II. Обе задачи I и II образуют пару симметричных двойственных задач.

Итак, экономически [4, с.58] I задача трактуется как задача определения оптимального плана выпуска продукции **«n»** наименований из **«m»** ресурсов (плана с наибольшей возможной выручкой). Двойственную к I – II[ю] задачу трактуем как задачу определения оптимальных оценок ресурсов, таких цен единицы каждого ресурса, при которых выручка не превосходила бы затрат на ресурсы и вместе с тем суммарная стоимость ресурсов была бы минимальной.

Теорема: 1. Значение целевой функции задачи I не превосходит значения целевой функции задачи II для любого её плана, т.е. $f(x) \le g(y)$ (см. пример на использование сырья – текущие значения целевых функций).

Теорема 2. ***(критерий оптимальности двойственных задач).*** Если для некоторых планов соответствующих двойственных задач значения целевых функций равны, то эти планы оптимальны.

Основная теорема двойственности. ***Если одна из двойственных задач I или II имеет решение, то имеет решение и другая, причем значения целевых функций для оптимальных планов обеих задач совпадают.***

Теорема: Для того, чтобы задачи максимизации (минимизации) имели решение, необходимо и достаточно, чтобы целевая функция этой задачи была ограничена сверху (снизу) на непустом множестве ее планов.

Теорема: Для того, что бы задача I обладала планами, а задача II планов не имела, необходимо и достаточно, чтобы целевая функция задачи I была не ограничена сверху на множестве ее планов. Для того, чтобы задача II обладала планами, а задача I планов не имела, необходимо и достаточно, чтобы целевая функция задачи II была не ограничена снизу на множестве ее планов.

Например:

Задача I	Задача II
$\max\{3x_1 + x_2 \left\| \begin{array}{c} x_1 - 4x_2 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{array} \right\}$	$min\, g(y) = 8y_1 + 6y_2$ при условиях: $y_1 - 2y_2 \ge 3$ $-4y_1 + y_2 \ge 1$ $y_1 \ge 0$ $y_2 \ge 0$

В задаче I $maxf = +\infty$; сложив неравенства задачи II получим: $-3y_1 - y_2 \ge 4$. Оно не выполняется ни при каких значениях y_1 и y_2.

И, наконец, случай когда обе задачи I и II не имеют планов.

Задача I	Задача II
$max\, f(x) = 3x_1 + 5x_2$ при условиях: $3x_1 - 4x_2 \le 5$ $2x_1 \le -7$ $x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$	$min\, g(y) = 5y_1 - 7y_2$ при условиях: $3y_1 + 2y_2 \ge 3$ $-4y_2 \ge 5$ $y_1 \ge 0$ $y_2 \ge 0$

Каждая из I и II задачи не имеет ни одного плана; из 2-го неравенства I задачи вытекает $x_1 \le -3{,}5$; из 2-го неравенства II задачи $y_1 \le \ -1{,}25$ (в то время, как они должны быть $\ge$ 0).

Итак, при рассмотрении пары симметричных двойственных задач могут возникнуть 3 случая:

1. ***I и II задачи имеют решение.***
2. ***Одна имеет ($\pm\infty$), значит другая решения не имеет.***
3. ***Обе задачи решения не имеют.***

Решение II задачи : $y_i, \quad i = \overline{1, m}$ – оптимальные оценки.

Эти оценки были введены Л. В. Конторовичем как «разрешающие множители» или по-другому, «объективно-обусловленные оценки».

§2. Несимметричные двойственные задачи.

Рассмотрение таких задач часто полезно в ЛП. Причём эти задачи сводятся к симметричным. Задача I – основная задача ЛП, задача II задача минимизации, но $\boldsymbol{y_i}$, $\boldsymbol{i = \overline{1,m}}$ ***во II задаче могут быть любого знака.***

Сведение осуществляется следующим образом. Как известно, равенство $a = b$ равносильно паре неравенств $a \le b$ и $a \ge b$; или $a \le b$ и $(-a \le -b)$. В задаче I каждое уравнение заменяется парой неравенств такого рода. Тогда задача I будет задачей максимизации с «n» переменными и «2m» неравенствами. Затем выписываем симметричную ей двойственную задачу. Например, дано:

Задача I	Задача II
$max\ f(x) = -7x_1 - 2x_2 - 10x_3 + 3x_4$ при условиях: $3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -6$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 13$ $x_i \ge 0, i = \overline{1,4}$ Ответ: (2,3,0,0) $max\ f(x) = -20$	$min\ g(y) = -6y_1 + 13y_2$ при условиях: $3y_1 + 2y_2 \ge -7$ $-4y_1 + 3y_2 \ge -2$ $y_1 + 4y_2 \ge -10$ $-2y_1 - y_2 \ge 3$ y_1, y_2 – любого знака Ответ: (-1,-2), $min\ g(y) = -20$

Сведем к паре симметричных двойственных задач ЛП

Задача I	Задача II
$max\ f(x) = -7x_1 - 2x_2 - 10x_3 + 3x_4$ при условиях: $3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 \le -6$ $-(3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4) \le -(-6)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 13$ $-(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4) = -13$ $x_i \ge 0, i = \overline{1,4}$	$min\ g(y) = -6y_1' + 6y_1'' + 13y_2'$ $- 13y_2''$ при условиях: $3y_1' - 3y_1'' + 2y_2' - 2y_2'' \ge -7$ $-4y_1' + y_1'' + 3y_2' - 3y_2'' \ge -2$ $y_1' - y_1'' + 4y_2' - 4y_2'' \ge -10$ $-2y_1' + 2y_1'' - y_2' + y_2'' \ge 3$ $y_i^{','','} \ge 0; \quad i = 1,2$

У задачи II, когда y_i – любого знака, любой план называется псевдопланом.

Теорема: Если x^* некоторый план задачи I, а y^* - некоторый псевдоплан задачи II и *f(x*)=g(y*)*, то x^* и y^* оптимальные план и псевдоплан I и II задачи.

Глава 5. Примеры задач оптимизации .		
§1. Решить задачи оптимиэации графическим методом (1-7).		
№	**Задача**	**Ответ**
1	$\max Z = 2x_1 + x_2 + 4$ $x_1 + x_2 \geq 4$ $8x_1 - 4x_2 \geq -16$ $x_1 \geq 2$ $x_2 \leq 9.$	$Z_{min} = 39; x_1 = 13; x_2 = 9.$
2	$\min Z = 3x_1 - x_2 + 6$ $2x_1 + 5x_2 - 10 \leq 0$ $2x_1 + x_2 - 6 \leq 0$ $x_1 + 2x_2 - 2 \geq 0$ $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0.$	$Z_{min} = 4; x_1 = 0; x_2 = 2.$
3	$\min Z = 2x_1 + 3x_2$ $x_1 + x_2 \leq 4$ $6x_1 + 2x_2 \geq 8$ $x_1 + 5x_2 \geq 4$ $x_1 \leq 3$ $x_2 \leq 3$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$Z_{min} = 11; x_1 = 1; x_2 = 3.$
4	$\max Z = 2x_1 + x_2$ $x_1 + x_2 \leq 20$ $x_1 \leq 10$ $x_2 \leq 30$ $x_1 + x_2 \geq 10$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$Z_{max} = 30; x_1 = 10; x_2 = 10.$
5	$\min Z = x_1 + x_2$ $0 \leq x_1 \leq 1$ $0 \leq x_2 \leq 2$ $0 \leq x_1 + x_2 \leq 3$ $-1 \leq x_1 - x_2 \leq 0$	. $Z_{min} = 0; x_1 = 0; x_2 = 0.$
6	$\max Z = x_1 - x_2$ $1 \leq x_1 + x_2 \leq 2$ $2 \leq x_1 - 2x_2 \leq 3$ $1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	Система ограничений несовместна.

7	$\max Z = 3x_1 + 4x_2$ $-1 \leq -x_1 + x_2 \leq 1$ $x_1 + x_2 \geq -1$ $-x_1 + 2x_2 \leq 2$ $2x_1 - x_2 \leq 2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$Z_{min} = 10;\ x_1 = 2;\ x_2 = 2.$
§2. Решить задачи оптимизации симплексным методом (8 – 34).		
8	$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$ $-x_1 + x_2 \leq 5$ $-x_1 + 5x_2 \leq 41$ $3x_1 + 5x_2 \leq 77$ $5x_1 - x_2 \leq 63$ $2x_1 - 5x_2 \leq 16$ $x_j \geq 0\ (j = 1, 2).$	$Z_{max} = 77;\ x_1 = 9;\ x_2 = 10;$
9	$\text{Max } Z = 5x_1 + 5x_2 - 9x_3$ $3x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 \leq 1$ $x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 1$ $x_j \geq 0\ (j = 1, 2, 3, 4).$	$Z_{max} = \frac{35}{11};\ x_1 = \frac{7}{11};\ x_2 = x_3 = 0;$ $x_4 = \frac{2}{11};$
10	$\text{Max } Z = 8x_1 + 5x_2$ $2x_1 + x_2 \leq 10$ $x_1 + x_2 \leq 12$ $4x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1 + 4x_2 \leq 10$ $x_j \geq 0\ (j = 1, 2).$	$Z_{max} = \frac{322}{15};\ x_1 = \frac{22}{15};\ x_2 = \frac{32}{15};\ x_3 = \frac{138}{15};\ x_4 = \frac{126}{15};$ $x_5 = x_6 = 0;$
11	$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2$ $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ $3x_1 + 2x_2 \leq 10$ $2x_1 + x_2 \leq 18$ $x_j \geq 0\ (j = 1,2).$	$Z_{max} = \frac{116}{5};\ x_1 = \frac{6}{5};\ x_2 = \frac{16}{5};$ $x_3 = x_4 = 0; x_5 = \frac{62}{5};$
12	$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6$ $-2x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1 + x_2 \leq 20$ $x_j \geq 0\ (j = 1,2).$	
13	$\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$ $x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3$ $x_j \geq 0\ (j = 1,2,3,4).$	
14	$\text{Min } Z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$ $3x_1 - x_3 \leq 8$ $-x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 1$ $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 6$ $x_j \geq 0\ (j = 1, 2, 3).$	$Z_{min} = -9;\ x_1 = 3;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;$

15	$\text{Min } Z = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3$ $6x_1 + 15x_2 + 6x_3 \le 9$ $14x_1 + 42x_2 + 16x_3 \le 21$ $2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \le 4$ $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3).$	$Z_{min} = -\frac{105}{16};\ x_1 = 0;\ x_2 = 0; x_2 = \frac{21}{16};$
16	$\text{Min } Z = x_1 - 3x_2 + x_3$ $3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7$ $-2x_1 + 4x_2 \le 12$ $-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10$ $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3).$	$Z_{min} = -9;\ x_1 = 4;\ x_2 = 5;$
17	$\text{Max } Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}8x_4$ $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24$ $3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12$ $6x_1 + 3x_3 + x_4 \le 35$ $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3, 4).$	$Z_{max} = 3{,}6;\ x_1 = 4;\ x_2 = x_3 = 0;$ $x_4 = 2{,}5;$
18	$\text{Min } Z = 2x_1 - 3x_2$ $-5x_1 + 3x_2 \le 15$ $x_1 - 2x_2 \le 4$ $5x_1 - 4x_2 \le 40$ $-2x_1 + x_2 \le 2$ $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3, 4).$	Линейная форма не ограничена.
19	$L(x) = 4x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to max,$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = \overline{1{,}4}.$	$\max L(x) = 24$ при $x = (3, 2, 0, 0).$
20	$L(x) = -2x_1 + 4x_2 + x_4 \to min,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 9, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = \overline{1{,}4}.$	$\min L(x) = 8$ при $x = (2, 3, 0, 0).$
21	$L(x) = x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \to max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = \overline{1{,}4}.$	$\max L(x) = 8$ при $x = (1 - t)x_1 + tx_2, 0 \le t \le 1,$ где $x_1 = (0, 0, 2, 2),\quad x_2 = (0, 1, 0, 3).$
22	$L(x) = -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to min,$ $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 18, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = \overline{1{,}4}.$	$\min L(x) = -8$ при $x = (1 - t)x_1 + tx_2,\quad 0 \le t \le 1,$ где $x_1 = (5, 0, 0, 3),\quad x_2 = (4, 2, 0, 0).$
23	$L(x) = x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 \to max,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 + x_5 = 22, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = \overline{1{,}5}.$	$\max L(x) = 26$ при $x = (3, 4, 7, 0, 0).$
24	$L(x) = 3x_1 + 5x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	$\max L(x) = 3$ при $x_1 = 3;\ x_2 = 6.$

25	$L(x) = 7x_1 + 6x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \le 60, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 100, \\ -5x_1 + 2x_2 \le 20, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	$\max L(x) = 148$ при $x_1 = 4;\ x_2 = 20.$
26	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 11, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	$\max L(x) = \infty.$
27	$L(x) = 3x_1 - 10x_2 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 45, \\ -4x_1 + 3x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 126, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 30, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	$\min L(x) = -153$ при $x_1 = 9;\ x_2 = 18$
28	$L(x) = 2x_1 - x_2 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	Нет решений.
29	$L(x) = 2x_1 - 2x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 1, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	$\max L(x) = 4$ на отрезке прямой $x_1 - x_2 = 2.$
30	$L(x) = x_1 - x_2 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 0, x_2 \ge 0. \\ 1 \le x_1 \le 3, \end{cases}$	$\min L(x) = -4$ при $x_1 = 1;\ x_2 = 5.$
31	$L(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 14, \end{cases}$ $x_i \ge 0\ .$	$\max L(x) = 12$ в точке $X^* = (3, 0, 2, 0).$
32	$L(x) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to min;$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6, \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0.$	$\max L(x) = 11$ в точке $(5, 0, 4).$
33	$L(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 - x_3 \le 17, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 19, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 7, \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0.$	$\min L(x) = 2$ в точках отрезка $x = (1-t)x_1 + tx_2,$ где $x_1 = (4, 5, 0);$ $x_2 = (7, 5, 3)$

34	$L(x) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \to max;$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = \overline{1,5}.$	$\max L(x) = 201$ при $x = (0, 7, 10, 0, 63)$.
§3. Используя метод искусственного базиса для нахождения исходного опорного плана, решить следующие задачи (35 – 52).		
35	$Min\ Z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4$ $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$ $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3, 4).$	$Z_{min} = 2;\ x_1 = 3;\ x_2 = 0;$ $x_3 = 1;\ x_4 = 3;$
36	$Max\ Z = 3x_1 - x_2$ $-3x_1 + 2x_2 \le 15$ $4x_1 - x_2 \ge 20$ $3x_1 + x_2 \ge 30$ $x_1 - 2x_2 \le 20$ $x_j \ge 0\ (j = 1,2).$	Линейная форма не ограничена.
37	$Min\ Z = -x_1 + 2x_2$ $x_1 + 3x_2 \ge 6$ $-x_1 + 2x_2 \le 1$ $x_1 + x_2 \le 5$ $3x_1 - x_2 \ge 6$ $x_j \ge 0\ (j = 1,2).$	$Z_{min} = -3{,}5;\ x_1 = 4{,}5;\ x_2 = 0{,}5;$
38	$Min\ Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ $3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 8$ $x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \ge 4$ $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3, 4).$	$Z_{min} = \frac{11}{4};\ x_1 = \frac{10}{4};\ x_2 = \frac{1}{4};$ $x_3 = x_4 = 0;$
39	$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$ $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 9$ $2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8$ $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 7$ $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3).$	$Z_{max} = 18;\ x_1 = x_2 = 0;\ x_3 = 9/2;$
40	$Min\ Z = 12x_1 + 27x_2 + 6x_3$ $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 14$ $x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6$ $6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \ge 22$ $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3).$	$Z_{min} = 54;\ x_1 = 2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 5;$
41	$L(x) = 4x_1 + 4x_2 + x_3 \to max;$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = \overline{1,4}.$	$\max L(x) = 24$ при $x = (3, 3, 0, 0)$.

42	$L(x) = x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,4}.$	$\min L(x) = -9$ при x $= (1-t)x_1 + tx_2,$ $0 \leq t \leq 1,$ где $x_1 = (0, 5, 2, 0),$ $x_2 = (0, 0, 3, 1).$
43	$L(x) = 2x_2 + 2x_3 + x_4 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 3, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,4}.$	$\max L(x) = 10$ при $x = (1-t)x_1 + tx_2,\ \ 0 \leq t \leq 1,$ где $x_1 = (9, 0, 5, 0),$ $x_2 = (0, 3, 2, 0).$
44	$L(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_4 \to min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,4}.$	$\min L(x) = -1$ при $x = (4, 0, 0, 3).$
45	$L(x) = -x_1 + 3x_2 + x_4 \to max;$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,4}.$	$\max L(x) = \infty.$
46	$L(x) = 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3\ , \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,4}.$	$\min L(x) = -\infty.$
47	$L(x) = x_1 + \ 3x_2 - 4x_3 - x_5 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ 4x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$	$\min L(x) = -8$ при $x = (0, 5, 2, 0, 15).$
48	$L(x) = -x_2 + 5x_3 + x_5 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 = 20, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ -2x_2 + x_3 + x_5 = 6, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$	$\max L(x) = 17$ при $x = (1-t)x_1 + tx_2,\ \ 0 \leq t \leq 1,$ где $x_1 = (8, 3, 4, 0, 0),$ $x_2 = (0, 5, 3, 0, 7).$
49	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to max;$ $\begin{cases} 3x_1 + x_3 \leq 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 15, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$	$\max L(x) = 13$ при $x = (3, 2, 1).$
50	$L(x) = -\,x_2 + x_3 \to min;$ $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$	$\min L(x) = 2$ при $x = (1-t)x_1 + tx_2,$ $0 \leq t \leq 1,$ где $x_1 = (1, 0, 2),$ $x_2 = (3, 1, 3).$
51	$L(x) = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \to max;$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$	Система ограничений несовместна.
52	$L(x) = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 2, \end{cases}$ $x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$	$\min L(x) = 4$ при $x = (\ 0, 0, 11).$
§4. Найти целочисленное решение задач оптимизации (53 – 62).		

53	$Max\ Z = 8x_1 + 6x_2$ $3x_1 + 5x_2 \leq 11$ $4x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;$	$Z_{max} = 16;\ x_1 = 2;\ x_2 = 0;$ $x_3 = 5;\ x_4 = 0.$
54	$Max\ Z = 2{,}5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ $4{,}5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 14$ $2x_1 + 6.3x_2 + x_3 \leq 11$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;$	$Z_{max} = 8;\ x_1 = 2;\ x_2 = 0\ ;\ x_3 = 1;$ $x_4 = 0;\ x_5 = 6.$
55	$Max\ Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$ $x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;$	$Z_{max} = 6;\ x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 0;$ $x_4 = 0.$
56	$Max\ Z = x_1 - 2x_2$ $5x_1 - 2x_2 \leq 3$ $x_1 + x_2 \geq 1$ $-3x_1 + x_2 \leq 3$ $-3x_1 - 3x_2 \leq 3$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;$	$Z_{max} = -1;\ x_1 = 1;\ x_2 = 1.$
57	$Max\ Z = x_1 + 2x_2$ $x_1 - 2x_2 \leq 2$ $-2x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;$	$Z_{max} = 5;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2;$
58	$Max\ Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3$ $x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 4$ $5x_1 - x_3 \leq 12$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;$	$Z_{max} = 4;\ x_1 = 2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0.$
59	$Max\ Z = 3x_1 - 4x_2$ $-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$ $x_1 - 2x_2 + x_4 = 3$ $x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 5$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots$ $x_5 \geq 0;$	$Z_{max} = 9;\ x_1 = 3;\ x_2 = 0;\ x_3 = 9;$ $x_4 = 0;\ x_5 = 2.$
60	$Min\ Z = 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 11x_4 + 12x_5$ $x_1 + 2x_4 + x_5 = 3$ $x_2 - 3x_4 + 4x_5 = 2$ $x_3 + x_4 - 2x_5 = 1$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots\ x_5 \geq 0;$	$Z_{min} = 8;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;$ $x_4 = 1;\ x_5 = 1;$
61	$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 200x_5 + 20x_6$ $5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 100$ $3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 100x_5 + 10x_6 \leq 150$ $-2x_2 + 10x_5 + 11x_6 \leq 0$ $-x_4 + 10x_5 + x_6 \leq 0$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots\ x_6 \geq 0;$	$Z_{max} = 61;\ x_1 = 5;\ x_2 = 11;\ x_3 = 3;$ $x_4 = 2;\ x_5 = 0;\ x_6 = 2.$

62	$Max\ Z = -2x_1 - x_2 + 3x_3$ $x_1 \quad + x_3 \leq 8$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 29$ $3x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$ $-x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 21$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;$	$Z_{max} = 15;\ x_1 = 0;\ x_2 = 3;\ x_3 = 6;$

Раздел 2. Нелинейное программирование

Глава 1.

§ 1. Задачи нелинейного программирования с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений.

Чтобы проиллюстрировать более наглядно различие между линейными и нелинейными задачами, ограничимся решением задачи с двумя переменными, так как решение таких задач может быть представлено графически.

Задача.

На множестве решений системы неравенств

$$\boldsymbol{x^2+y^2 \leq 36;}$$
$$\boldsymbol{x \geq 0;}$$
$$\boldsymbol{y \geq 0.}$$

найти глобальные экстремумы функции $\mathbf{z = 2x + y}$.

Решение. На рис. 1 множество допустимых решений заштриховано. Это множество выпукло. Линиями уровня функции $\mathbf{z = 2x + y}$ являются параллельные прямые с угловым коэффициентом K = - 2. Очевидно, что глобальный минимум достигается в точке O(0; 0), а глобальный максимум— в точке A касания прямой уровня и окружности $x^2 \pm y^2 = 36$. Найдем координаты точки **A**. Для этого достаточно составить уравнение прямой l и решить систему, состоящую из уравнения прямой и уравнения окружности. Заметим, что прямая l перпендикулярна линии уровня, а, следовательно, ее угловой коэффициент K_1 равен $\frac{1}{2}$ **(K_1K = — 1).** Прямая l проходит через точку O и имеет угловой коэффициент

$K_1 = \frac{1}{2}$.

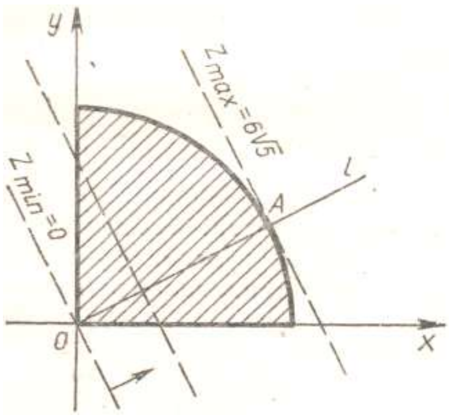


Рис. 1

Поэтому ее уравнение таково: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$.

Решая систему

$$x^2+y^2= 36;$$
$$y = \frac{1}{2}x,$$

получаем $x = \frac{12*\sqrt{5}}{5}$, $y = \frac{6*\sqrt{5}}{5}$.

Итак, глобальный минимум, равный 0, достигается в точке O (0;0), а глобальный максимум, равный $6\sqrt{5}$, — в точке A (2,4-$*\sqrt{5}$; 1,2*$\sqrt{5}$). Локальных экстремумов, отличных от глобальных, функция не достигает.

§ 2. Задачи нелинейного программирования с линейной системой ограничений, но нелинейной целевой функцией.

Множество допустимых решений таких задач всегда выпукло, так как линейные ограничения образуют выпуклый многогранник в n-мерном пространстве. Однако в отличие от линейного программирования при нелинейной целевой функции оптимальное решение не обязательно находится в вершине этого многогранника.

Задача.

Определить наибольшее значение функции z = $\sqrt{x^2 + y^2}$ при условии

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 4y - 24 \le 0}; \\ \mathbf{x \ge 0}; \\ \mathbf{y \ge 0}. \end{cases}$$

Решение. Множество допустимых решений заштриховано на рис. 2. Если целевой функции придавать фиксированные значения $\mathbf{c}$, то будем получать окружности с центром в начале координат и радиусом $\mathbf{c^2}$. Пусть $\mathbf{c}$ = 1, 2, ... Начертим ряд окружностей (линии уровня целевой функции). Из рисунка 2 видно, что функция $\mathbf{z} = \sqrt{x^2 + y^2}$ достигает наибольшего значения, равного 8, в точке A (8;0): **z** = 8.

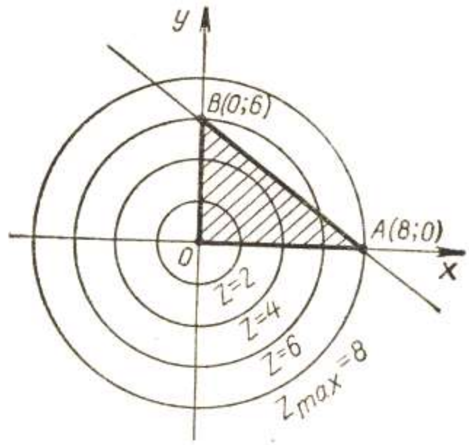


Рис.2

К рассматриваемому типу нелинейных задач относятся и задачи с дробно-линейной целевой функцией.

Решение задач дробно-линейного программирования симплексным методом

Дробно-линейной функцией называется функция вида

$$z = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n}.$$

Задача. Найти максимальное значение функции $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{2x_1 - x_2}}{\mathbf{x_1 + 2x_2 + 1}}$ на множестве решений системы ограничений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Решение. Введем обозначение:

$$x_1 + 2x_2 + 1 = \frac{1}{y_0},\ y_0 > 0 \qquad (1)$$

Тогда $z = 2x_1y_0 - x_2y_0$

Обозначим $x_1y_0 = y_1,\ x_2y_0 = y_2,\ x_3y_0 = y_3,\ x_4y_0 = y_4$. Целевая функция запишется тогда так: $z = 2y_1 - y_2$

Преобразуем систему ограничений, умножив обе части всех ограничений на y_0:

$$\begin{cases} x_1y_0 - 2x_2y_0 + x_3y_0 = 2y_0 \\ 2x_1y_0 + x_2y_0 + x_4y_0 = 6y_0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, y_0 \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Включим в систему ограничений (2) ограничение (1) и перейдем к переменным y_0, y_1, y_2, y_3, y_4:

$$\begin{cases} -2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \\ -6y_0 + 2y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ y_0 + y_1 + 2y_2 = 1 \\ y_0 > 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что мы получили задачу линейного программирования: найти максимальное значение $z = 2y_1 - y_2$ на множестве решений системы (3). Эту задачу линейного программирования решаем симплексным методом, обозначив $z_1 = -z$ и учитывая, что $z_{max} = -\min(z)$.

§ 3. Задачи нелинейного программирования с нелинейной системой ограничений и нелинейной целевой функцией.

Задача. На множестве решений системы ограничений

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 36;}$$
$$\boldsymbol{x \geq 0;}$$
$$\boldsymbol{y \geq 0.}$$

найти глобальные экстремумы функции **z = (x - 3)² + (y - 2)²**.

Решение. Линиями уровня функции $\mathbf{z = (x - 3)^2 + (y - 2)^2}$ являются окружности с центром в точке **A (3; 2)** (рис. 3). Из рисунка видно, что глобальный минимум функция **z** достигает в точке A (3; 2), а глобальный максимум - в точке B (0; 6). Следовательно

$\mathbf{z_{min} = 0}$: $\mathbf{z_{max} = 25}$.

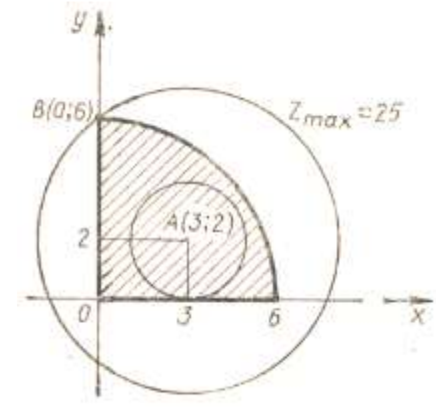


Рис. 3.

Задача. Найти глобальные экстремумы функции $\mathbf{z} = x^2 + y^2$ на множестве системы ограничений

$$\begin{cases} (\mathbf{x}-\mathbf{5})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{3})^2 \geq \mathbf{9}; \\ (\mathbf{x}-\mathbf{5})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{3})^2 \leq \mathbf{36}; ; \\ \mathbf{x}+\mathbf{y} \geq \mathbf{8}; \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Решение. На рис. 4 множество допустимых решений заштриховано. Как видно из рисунка, оно не является выпуклым. Очевидно, что наименьшее значение функция $\mathbf{z}$ достигает в точке B, а наибольшее - в точке K (точка касания окружности $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$ и линии уровня). Найдем координаты точек **B** и **K**. Точка B принадлежит прямой **x + 8 = y** и окружности $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$. Поэтому ее координаты находим из системы:

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ x + y = 8 \end{cases}.$$

Или
$$\begin{cases} (3-y)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ x = 8 - y \end{cases}.$$

Или
$$\begin{cases} 2y^2 - 12y + 9 = 0 \\ x = 8 - y \end{cases}.$$

Откуда
$$\begin{cases} y = 3 + 3\sqrt{0,5} \\ x = 5 - 3\sqrt{0,5} \end{cases},$$

или
$$\begin{cases} y = 3 - 3\sqrt{0,5} \\ x = 5 + 3\sqrt{0,5} \end{cases}.$$

Получим B $(5 - 3\sqrt{0,5};\ 3 + 3\sqrt{0,5})$.

Точка K принадлежит линии центров 00_1 с уравнением $y = \frac{3}{5}x$ и окружности $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 36$. Приходим к системе:

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 = 36 \\ y = \dfrac{3}{5}\,x \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases} 17x^2 - 170x - 25 = 0 \\ y = \frac{3}{5}\,x \end{cases}.$$

В результате получим

$$\left(\begin{cases} x = 5 + \frac{30}{\sqrt{34}} \\ y = 3 + \frac{18}{\sqrt{34}} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 5 - \frac{30}{\sqrt{34}} \\ y = 3 - \frac{18}{\sqrt{34}} \end{cases} \right).$$

Таким образом, получим $K\left(5 + \frac{30}{\sqrt{34}};\ 3 + \frac{18}{\sqrt{34}}\right)$.

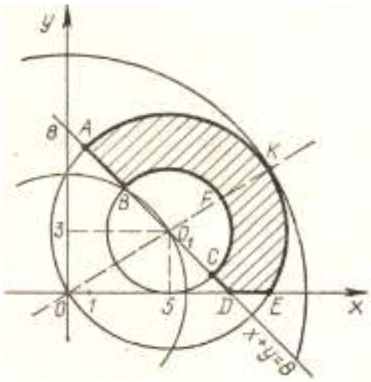


Рис. 4.

Следовательно, $z_{\min} = 43 - 12\sqrt{0{,}5;}$. $z_{\max} = 40 + 12\sqrt{34}$. Заметим, что точка F является точкой локального максимума, так как значение функции Z в ней больше, чем значения в соседних вершинах B и C. Аналогично, точка C является точкой локального минимума.

Разобранные задачи позволяют нам увидеть ряд особенностей нелинейных задач, которые делают их более трудными для решения, чем линейные задачи. ***Если система ограничений задачи линейная, а целевая функция нелинейная, то целевая функция может достигать оптимума не обязательно в граничной точке множества допустимых планов, а если она достигает экстремума в граничной точке, то эта точка не обязательно является крайней.*** Следовательно, не существует вычислительного метода для задач такого типа, который ограничивался бы только перебором вершин множества допустимых решений. Заметим также, что в некоторых задачах этого типа локальный оптимум не совпадает с глобальным.

В случае нелинейной системы ограничений утверждение *о* выпуклости области допустимых решений не сохраняется. Если множество допустимых решений не выпукло, то может существовать отличный от глобального локальный оптимум даже при линейной целевой функци. Следует отметить, что в случае существования локальных оптимумов, отличных от глобальных, нет возможности использовать вычислительный метод симплексного типа, основанный на переходе от одной вершины к соседней, который оканчивался бы при достижении вершины, доставляющий локальный экстремум целевой функции по сравнению со всеми соседними вершинами.

Для задач нелинейного программирования, имеющих отличные от глобального локальные оптимумы, большинство вычислительных методов позволяет найти точку именно локального оптимума. В общем случае они не позволяют установить, совпадает ли она с точкой глобального оптимума. Тем не менее эти методы отыскания локального оптимума часто оказываются очень полезными на практике. В теории нелинейного программирования особый интерес представляют выпуклые и вогнутые функции. Оказываются справедливыми следующие утверждения:
Пусть F(x) - выпуклая функция, заданная на замкнутом выпуклом множестве X. Тогда любой локальный минимум F(x) на X является глобальным минимумом F(x) на X.
Если F(x) - вогнутая функция на замкнутом выпуклом множестве X, то любой локальный максимум F(x) на X является глобальным максимумом.

§4. Градиентный метод нелинейного программирования.

Пусть мы имеем некоторую функцию $z = f(x_1; x_2)$ двух действительных переменных и некоторую точку A$(x_1^0; x_2^0)$, принадлежащую области определения X этой функции. Назовем градиентом функции f вектор $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1^0}; \frac{\partial f}{\partial x_2^0})$ (символ ∇f читается: «набла» f).
Градиент ∇f в точке A перпендикулярен касательной к линии уровня функции $z = f(x_1; x_2)$ в этой точке. Например дана функция $z = x^2 + y^2$. Построим несколько ее линий уровня (рис. 55):

$$\bar{r}_1 = \nabla f(A).\ \bar{r}_2 = \nabla f(B).$$

Известно, что направление градиента ∇f служит направлением максимальной скорости роста функции. На примере задачи с двумя переменными покажем геометрическую картину градиентного метода.

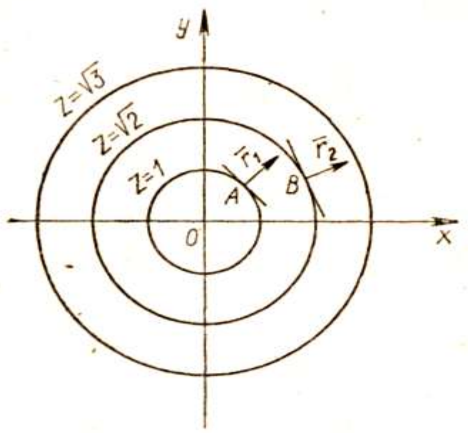
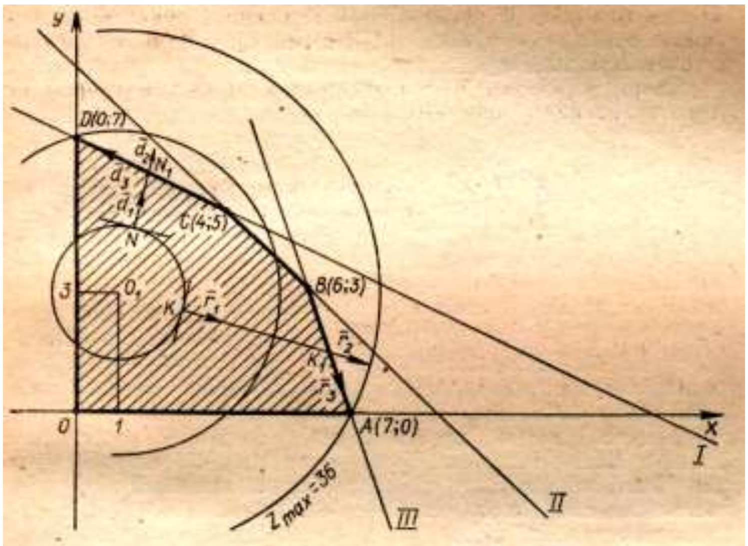


Рис 55.

Задача 7.6.1. **Найти глобальный максимум $z = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$ на множестве решений системы неравенств.**

$$\begin{cases} \mathbf{x + 2y - 14 \le 0} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{x + y \quad \le 9} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{3x + y \quad \le 21} & \mathbf{(3)} \\ \\ \mathbf{x \ge 0} \\ \mathbf{y \ge 0} \end{cases}$$

Предположим, что мы начинали с некоторого допустимого решения, определённого координатами точки K. Градиент $\nabla f(K)$ или $\bar{r}_1$ является вектором, перпендикулярным касательной к линии уровня в точке K. Мы двигаемся из точки K в направлении $\bar{r}_1$ до тех пор, пока не достигнем границы множества допустимых решений K_1. Дальше мы не можем двигаться в направлении $\bar{r}_2$ $(\bar{r}_2 = \nabla f \quad {}_1K_1)$, так как при этом мы выйдем из множества допустимых решений. Поэтому мы выбираем вектор $\bar{r}_3$, составляющий с вектором $\bar{r}_2$ наименьший угол по сравнению с любым другим вектором с началом в точке K_1 и лежащим в множестве допустимых решений. Таким образом, на следующем шаге мы двигаемся вдоль прямой $3x + y = 21$ (3). Это приводит нас в точку $A(7;0)$. На этом процесс заканчивается. Геометрически это выражается тем, что $\bar{r}_4$ составляет тупой угол с любым вектором в множестве допустимых решений, выходящим из точки А. ***Заметим что в точке А функция достигает глобального максимума:*** $\boldsymbol{z_{max} = 36}$. Предположим теперь, что, решая эту же задачу, в качестве начального допустимого решения мы выберем точку N (рис. 56). В этом случае мы сначала по направлению d_1 достигаем точки N_1, а затем по направлению d_3 вдоль прямой $x + 2y - 14 = 0$ (1) попадаем в точку D $(0;7)$. На этом процесс заканчивается: $z = (0;7) = 16$. В точке D функция достигает лишь локального максимума. Даже на одном примере видно, что результат решения зависит от того, с какой точки допустимого решения начинается процесс.



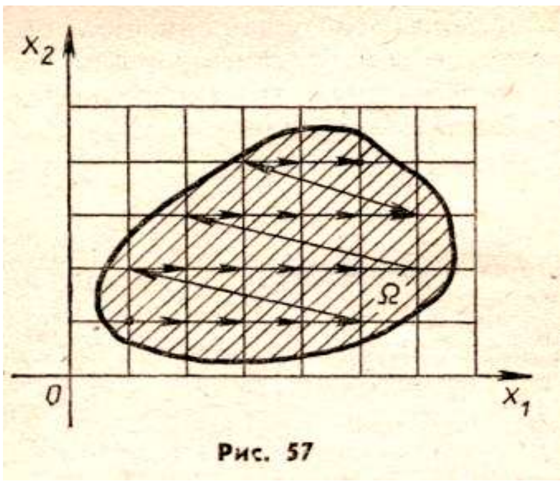


Рис. 56.

Градиентные методы в лучшем случае обычно сходятся лишь к локальному минимуму. Впрочем бывает и так, что даже такая сходимость отсутствует.

Только в том случае, когда задача обладает подходящими свойствами выпуклости или вогнутости, можно быть уверенным, что процесс сходиться к глобальному экстремуму.

Рассмотрим далее идею метода обхода узлов пространственной сетки. Он заключается в том, что для каждой переменной устанавливается определенный интервал изменения (шаг поиска). Затем берем начальную точку с минимальными координатами и проверяем, входит ли эта точка в множество допустимых решений. После этого вычисляем в ней значение целевой функции. Увеличиваем одну из координат на заданный интервал, а остальные координаты оставляем без изменения. Таким образом осуществляется передвижение вдоль одной оси на величину шага. Для новой точки тоже проверяем ее принадлежность множеству Ω и вычисляем значение целевой функции. Опять увеличиваем на интервал ту же координату и испытываем полученную точку и т.д. Дойдя до границы множества Ω, изменяем на величину шага другую координату, т. е. смещаемся в сторону, и снова от некоторой начальной точки двигаемся до границы области и т.д. (рис. 57). Здесь значениям переменных

$$x = x_0$$
$$x = x_0 + \Delta x,$$
$$x = x_0 + 2\Delta x,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x = x_0 + n\Delta x$$

геометрически соответствуют параллельные гиперплоскости, отстоящие друг от друга на величину шага Δx. Число систем таких плоскостей равно числу переменных. В пересечениях они образуют точки - узлы пространственной сетки. В процессе поиска мы обходим поочередно узлы, принадлежащие многограннику допустимых планов, и вычисляем в каждом случае значение целевой функции. Наибольшее (наименьшее) из них указывает с точностью до шага оптимальную точку. ***Этот метод, как нетрудно было уже заметить, связан с огромным объемом вычислительной работы. Он пригоден для решения задач с малым числом переменных и с обязательным применением электронных вычислительных машин.***

§5. Выпуклое программирование.

Общая задача выпуклого программирования заключается в минимизации функции

$$\boldsymbol{f(x) = f(x_1, x_2, \dots x_n)} \qquad (\mathbf{9.1})$$

при условиях:

$$\boldsymbol{\varphi_i(X) = \varphi_i(x_1, x_2, \dots x_n) \le 0 \;\; (i = 1, 2, \dots, m),} \qquad (\mathbf{9.2})$$

то есть в отыскании средних точек области решений Ω такой точки X^*, для которой

$$f(X^*) = \min_{x \in \Omega} f(X) \qquad (9.3)$$

где $f(X)$, $\varphi_i(X)$ – выпуклые гладкие функции.

Приведем общую задачу к каноническому виду. С этой целью в задачу выпуклого программирования вводится дополнительная переменная x_{n+1} и дополнительное ограничение

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) \le x_{n+1}.$$

Тогда задача (9.1) - (9.2) будет эквивалентной задаче минимизации линейной формы

$$Z = x_{n+1} \qquad (9.4)$$

при ограничениях:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) - x_{n+1} \le 0$$
$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots x_n) \le 0 \;\; (i = 1, 2, \dots, m), \qquad (9.5)$$

которая называется канонической.

Или

$$\min Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \qquad (9.6)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \le 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (9.7)$$

где функции φ_i – гладкие и выпуклые. Для решения задачи (9.1) - (9.2) и , следовательно, (9.4) - (9.5) можно использовать метод наискорейшего спуска.

Квадратичное программирование.

Задача **квадратичного программирования заключается в минимизации функции**

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (9.16)$$

при ограничениях

$$\varphi_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (9.17)$$

то есть в отыскании среди точек области решения Ω такой точки X^*, для которой

$$f(X^*) = \min_{x\in\Omega} f(X).$$

Матрица $B = (b_{ij})$ симметрична и положительно определенная. Функция $f(X)$ – выпуклая.

1. Задачу (9.16) –(9.17) можно решить, применив алгоритм выпуклого программирования с некоторыми отличиями.

а) Направление наискорейшего спуска из точки $X^{(0)}$ определяют из следующей задачи линейного программирования

$$\min u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta f(X^{(0)})}{\delta x_j}\xi_j \qquad (9.18)$$

$$a_{iv_1}\xi_1 + a_{iv_2}\xi_2 + \cdots + a_{iv_n}\xi_n \le 0 \ \ (v = 1, 2, \ldots, v_1) \qquad (9.19)$$

$$|\xi_j| \le p \ \ (j = 1, 2, \ldots, n); \qquad (9.20)$$

б) Значение шага t_1 вычисляются по формуле

$$t_1 = \min\{t', \ t''\},$$

где

$$t_1 = -\frac{\left(BX^{(0)} + C\xi^{(1)}\right)}{(\xi^{(1)}, B\xi^{(1)})} \ . \qquad (9.21)$$

Геометрическая интерпретация и графический способ решения задачи квадратичного программирования

Дана задача квадратичного программирования

$$\mathbf{\min f(x_1 x_2) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 + c_1x_2 + c_2x_2} \qquad \mathbf{(9.35)}$$

$$\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 < b_1}$$

$$\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 < b_2}$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m}$$

$$\mathbf{x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.}$$

Линейная система ограничений описывает некоторую выпуклую многоугольную область на плоскости ($x_1 0 x_2$). Множество всех точек $X(x_1, x_2)$, в которых целевая квадратичная функция принимает заданное значение ($f(x_1, x_2) = C_0$) , лежит на линии уровня данной функции. Эти линии являются кривыми, образуземыми при пересечении поверхности (9.35) с плоскостью $f(x_1, x_2) = C_0$. Форма этих кривых зависит от вида квадратичной функции.

Рассмотрим простейшие случаи:

1. $c_{12} = 0;\ c_{11} = c_{22}$.

В этом случае линии уровня являются концентрическими окружностями. Чтобы определить центр этих окружностей, необходимо привести квадратичную функцию к виду

$f(x_1, x_2) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2$.

Пример. Найти минимум и максимум функции

$$\mathbf{f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 + 5}$$

при условиях:

$$\mathbf{x_1 + x_2 \le 1}$$
$$\mathbf{x_1 \ge 0}$$
$$\mathbf{x_2 \ge 0.}$$

Решение. Приведём уравнение квадратичной функции к каноническому виду $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$.Целевая функция представляет семейство концентрических окружностей с центром в точке $O_1\ (-2, 1)$.

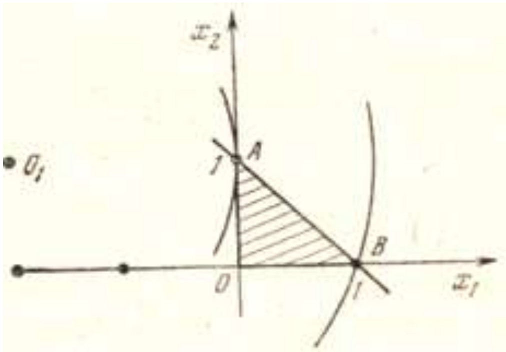


Рис. 9.1 Графическое решение задачи квадратичного программирования. Линии уровня – окружности.

Построим область допустимых решений. Минимальное значение соответствует наименьшему радиусу окружности и достигается в точке, в которой окружность касается многоугольника О АВ. Это точка А (0,1). Максимальное значение соответствует наибольшему радиусу и достигается в наиболее удаленной от точки O_1 вершине многоугольника О АВ. Это точка В(1,0). Следовательно, $f_{min} = 4$, $f_{max} = 10$.

2. $c_{12} = 0,\quad c_{11} \ne c_{22}\quad c_{11} > 0\quad c_{22} > 0$.

В этом случае линии уровня являются эллипсами с центрами в точке $O_1(a, b)$ и канонический вид квадратичной функции будет

$$f(x_1, x_2) = c_{11}(x_1 - a)^2 + c_{22}(x_2 - b)^2$$

При этом полуоси эллипса соотносятся как $\frac{\sqrt{c_{22}}}{\sqrt{c_{11}}}$

Пример. Р**ешить задачу методом наискорейшего спуска.**

$$\mathbf{\min f = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2}$$
$$\boldsymbol{\varphi_1 = -2x_1 + 5x_2 - 30 \le 0}$$
$$\boldsymbol{\varphi_2 = 4x_1 + 5x_2 - 60 \le 0}$$
$$\boldsymbol{\varphi_3 = 4x_1 - 5x_2 - 20 \le 0}$$
$$\boldsymbol{\varphi_4 = -x_1 \le 0}$$
$$\boldsymbol{\varphi_5 = -x_2 \le 0.}$$

Решение. В качестве исходного приближения берем точку $X^0(1,0)$. Вычисляем уклонения точки X^0.

$$\varphi_1(X^0) = -32; \;\; \varphi_2(X^0) = -56; \qquad \varphi_3(X^0) = -16;$$

$$\varphi_4(X^0) = -1; \quad \varphi_5(X^0) = 0.$$

Для нахождения направления спуска $\overline{\xi_1} = (\xi_1, \xi_2)$ ищем частные производные функции $f(x_1, x_2)$ в точке X^0:

$\frac{df}{dx_1} = -4x_1 + 2x_2; \qquad \frac{df}{dx_2} = 2x_1 - 2x_2;$ При этом

$\frac{df}{dx_1}\Big| X^0 = -4; \qquad \frac{df}{dx_2}\Big| X^0 = 2.$

Решая задачу линейного программирования

$$\min Z = -4\xi_1 + 2\xi_2$$

$$-\xi_2 \le 0, \qquad |\xi_1| \le 1, |\,\xi_2| \le 1,$$

получим : $\xi_1 = 1;\ \xi_2 = 0;\ \min Z = -4.$

Новое приближение: $\overline{X^1} = \overline{X^0} + t\,\overline{\xi^1}.$

Величина шага

$$t = \min_{t' > 0,\, t'' > 0}(t', t''), \qquad \text{где } t' = -\frac{\min Z}{2|B\overline{\xi'}, \overline{\xi'}|}\ .$$

Здесь $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $t' = -1 < 0;$

t'' - наименьшее положительное число среди отношений

$$-\frac{\varphi_i\left(X^{(0)}\right)}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j}\ (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Следовательно

$$t'' = \min\left\{-\frac{\varphi_2(X^{(0)})}{\sum_{j=1}^{2} a_{2j}\xi_j} = \frac{56}{4}; \quad -\frac{\varphi_3(X^{(0)})}{\sum_{j=1}^{2} a_{3j}\xi_j} = 4\right\} = 4.$$

Отсюда $t = 4$.

Вычисляем координаты точки $X^{(1)}$: $x_1^1 = 1 + 4 = 5;\ x_2^1 = 0.$

Определяем уклонения точки $X^{(1)}$.

$$\varphi_1\left(X^{(1)}\right) = -40; \;\; \varphi_2\left(X^{(1)}\right) = 40; \;\; \varphi_3\left(X^{(1)}\right) = 0; \;\; \varphi_4\left(X^{(1)}\right) = -5; \;\; \varphi_5\left(X^{(1)}\right) = 0.$$

Для нахождения направления спуска $\overline{\xi^2} = (\xi_1, \xi_2)$ решаем задачу линейного программирования:

$$\min Z = -32\xi_1 + 16\xi_2$$
$$4\xi_1 - 5\xi_2 \le 0$$
$$-\xi_2 \le 0$$
$$|\xi_1| \le 1; \quad |\xi_2| \le 1.$$

Решением будут значения $\xi_1 = 1;\ \xi_2 = -\frac{4}{5}$. При этом $\min Z = -\frac{96}{5}$.

Новое приближение: $\overline{X^{(2)}} = \overline{X^{(1)}} + t\,\overline{\xi^2}.$

Определим величину шага t.

$$t' = -\frac{96}{4} < 0, \;\; t'' = \min[20{,}5] = 5.$$

Значит, $t = 5$ и координаты точки $X^{(2)}$ равны:

$$x_1^{(2)} = 5 + 5 = 10; \quad x_2^{(2)} = 0 + \frac{4}{5} * 5 = 4.$$

Определяем уклонение точки $X^{(2)}$.

$$\varphi_1(X^{(2)}) = -30; \quad \varphi_2(X^{(2)}) = 0; \quad \varphi_3(X^{(2)}) = 0; \quad \varphi_4(X^{(2)}) = -10; \quad \varphi_5(X^{(2)}) = -4;$$

Для нахождения направления спуска решаем задачу линейного программирования

$\mathbf{\min Z = -32\, \xi_1 + 12\, \xi_2}$
$\mathbf{4\xi_1 + 5\xi_2 \le 0}$
$\mathbf{4\xi_1 - 5\xi_2 \le 0}$
$\mathbf{|\xi_1| \le 1; \quad |\xi_2| \le 1.}$

Решением будут значения $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 0$; $\min Z = 0$. ***Следовательно, $X^{(2)}(10, 4)$ является оптимальным решением.***

Ответ: $Min\, f = -136$; $x_1 = 10$; $x_2 = 4$.

§6. Параметрическое программирование.

Для всех значений параметра $\delta \le \lambda \le \varphi$, где δ, φ – произвольные действительные числа, найти такие значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые обращают в минимум линейную формулу (6.1)

$$\mathbf{Z = (d_1 + \lambda d'_1)x_1 + (d_2 + \lambda d'_2)x_1 + \dots + (d_n + \lambda d'_n)x_n}$$

при условиях:

$$\begin{array}{c} \mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \mathbf{a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a_{m1}x_2 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m} \end{array} \qquad (6.2)$$

$$\mathbf{x_j \ge 0\ (j = 1, 2, \dots, n).} \qquad (6.3)$$

или краткой форме:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} (d_j + \lambda d'_j) x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \dots, n),$$

где b_i, d_j, d'_j, a_{ij} – заданные постоянные.

Задачу решают в следующем порядке.

1. ***Пользуясь симплекс-методом, решаем задачу (6.1) – (6.3)*** при $\lambda = \delta$ до получения оптимального плана.

Коэффициенты линейной формы равны:

$$c_j = d_j + \lambda d'_j \qquad (6.4)$$

Следовательно, для любого базиса разности $z_j - c_j$ могут быть представлены в виде линейной функции от λ, то есть

$$z_j - c_j = \alpha_j + \lambda \beta_j . \qquad (6.5)$$

Тогда

$$\alpha_j + \delta \beta_j \le 0 \ (j = 1, 2, \dots, n), \qquad (6.6)$$

что означает совместность всей системы неравенств

$$\alpha_j + \lambda \beta_j \le 0 \ (j = 1, 2, \dots, n), \qquad (6.7)$$

Решение задачи (6.1) – (6.3) , полученное при $\lambda = \delta$, является оптимальным для всех значений параметра λ, удовлетворяющих условию $\underline{\lambda} \le \lambda \le \tilde{\lambda}$
где

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max\limits_{\beta_j<0}\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right), \\ -\infty, \text{если } \beta_j \ge 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} \min\limits_{\beta_j>0}\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right), \\ +\infty, \text{если } \beta_j \le 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

Здесь возможны следующие случаи:

а) $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = +\infty$**,** процесс решения закончен. Полученный план при $\lambda = \delta$ остается оптимальным для всех значений параметра $\delta \le \lambda \le \varphi$;

б) $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \neq +\infty$, $\tilde{\lambda} = -\frac{\alpha_к}{\beta_к}$, при $\beta_к > 0$. Если все $\alpha'_{ik} \le 0$, то линейная форма (6.1) при $\lambda > \tilde{\lambda}$ не ограничена снизу. Полученный план при $\lambda = \delta$ остается оптимальным для всех значений параметра $\delta \le \lambda \le \tilde{\lambda}$**;**

в) $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \neq +\infty$ и существует по крайней мере одна $\alpha'_{ik} > 0$. В этом случае в базис вводится вектор $\overline{P_k}$ и исключается вектор $\overline{P_j}$. Новый базис соответствует оптимальному плану хотя бы для одного значения параметра λ.

Если интервал $\underline{\lambda}' \le \lambda \le \tilde{\lambda}'$ является полной совокупностью значений λ, для которых новый базис соответствует оптимальному плану, то $\underline{\lambda}' = \tilde{\lambda}$. Полученный оптимальный план при $\lambda = \delta$ остается оптимальным для всех значений параметра $\delta \le \lambda \le \tilde{\lambda}$. Полагая далее $\lambda = \tilde{\lambda}$, продолжают процесс решения задачи. Аналогичным образом переходят от одного интервала изменения λ к другому, пока один из интервалов не включит $\lambda = \varphi$.
Величины $\tilde{\lambda}$, $\underline{\lambda}$ называют критическими значениями параметра λ, а оптимальные планы, соответствующие различным значениям λ – критическими решениями.

2. ***Пользуясь симплекс-методом, можно убедиться***, что при $\lambda = \delta$ линейная форма не ограничена снизу на выпуклом множестве, определяемом условиями (6.2).

Здесь возможны следующие случаи:

а) $\overline{\boldsymbol{P_k}}$ ***– вектор, подлежащий вводу в базис***, $\alpha_k + \delta\beta_k > 0$, все $\alpha'_{ik} \le 0$. Если $\beta_k \ge 0$, то линейная форма задачи не ограничена снизу для любого λ;

б) если $\boldsymbol{\beta_k} < 0$, неравенство $\alpha_k + \lambda\beta_k > 0$ будет иметь место для всех $\lambda < \tilde{\lambda} = \left(-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right)$, то есть для любого $\lambda \in (\delta, \tilde{\lambda})$ задача не имеет оптимального плана. Если все $\alpha_j + \tilde{\lambda}\ \beta_j \le 0$, то оптимальный план задачи $\lambda = \tilde{\lambda}$ получен.

Пусть $\tilde{\lambda}' = \min\limits_{\beta_j>0}\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$, тогда этот план является решением задачи при $\tilde{\lambda} \le \lambda \le \tilde{\lambda}'$, а далее решение продолжается так же, как в случае (а).

Если не все $\alpha_j + \tilde{\lambda}\ \beta_j \le 0$, в базис вводится любой вектор, для которого $\alpha_j + \tilde{\lambda}\ \beta_j > 0$. Процесс продолжается до тех пор, пока не окажется, что $\alpha_j' + \tilde{\lambda}\ \beta_j' \le 0$, или пока не будет обнаружен вектор $\overline{P_q}$ с $\alpha'_q + \tilde{\lambda}'\beta'_q > 0$, все коэффициенты разложения которого по базису неположительны.

Если $\alpha'_j + \tilde{\lambda}\ \beta'_j \le 0$ для всех j, встречаем случай (а).

Если $\beta'_q \ge 0$, линейная форма задачи не ограничена снизу при всех $\lambda \ge \tilde{\lambda}$.

Если $\beta'_q < 0$, то линейная форма при $\tilde{\lambda}' = \left(-\frac{\alpha_{q'}}{\beta_{q'}}\right)$, где $\tilde{\lambda}' > \tilde{\lambda}$, не ограничена снизу.

Глава 2. Динамическое программирование.

Специфика метода динамического программирования заключается в том, что для отыскания оптимального решения задачи последняя разбивается на ряд последовательных шагов или этапов. Соответственно и сам процесс планирования становится многошаговым. Термин «динамическое программирование» относится скорее к вычислительному методу, чем к особому типу задач. Многие задачи статического характера оказывается возможным сформулировать и решать как задачи динамического программирования. В то же время некоторые динамические задачи успешно решаются методами линейного и нелинейного программирования.

Покажем принцип метода динамического программирования на модели эффективного использования ресурсов.

Имеется некоторое количество ресурса **a,** которое можно использовать N различными способами. Пусть x_i – количество ресурса, используемое i-м способом, $q_i(x_i)$ – доход от использования ресурса i-м способом $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Требуется распределить общее количество ресурса **a** между различными способами, чтобы суммарный доход был максимальным. ***Математически задача выразится следующим образом.***

Найти

$$\max R\left(x_1, x_2, x_{3,\ldots,} x_N\right) = q_1(x_1) + q_2(x_2) + \cdots + q_N(x_N) \qquad (10.1)$$

при условиях:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N = a$$
$$x_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, N). \qquad (10.2)$$

Вместо одной задачи с данным количеством ресурса и фиксированным числом способов рассматриваем целое семейство таких задач, в которых a принимает любые положительные значения и N – любые целые. Развертываем процесс во времени, производим распределение ресурсов в каждую единицу времени.

Зададим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определенных для $n = 1, 2, \ldots, N,\ x \ge 0$ следующим образом:

$$f_n(x) = \max R\,(x_1, x_2, \ldots, x_N), \qquad (10.3)$$

где $x_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x$.

Очевидно, $f_1(x) = \max\limits_{0 \le x_1 \le x} q_1\,(x_1)$

Существует рекуррентное соотношение

$$f_n(x) = \max_{0 \le x_n \le x}\{q_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)\} \qquad (10.4)$$

для $\qquad n = 2, 3, \ldots, N, \quad x \ge 0.$

Вывод этого соотношения основан на принципе оптимальности Беллмана.

Очевидно, $\qquad f_N(a) = \max R\,(x_1, x_2, \ldots, x_N), \sum_{i=1}^{N} x_i = a$

Соотношения (10.4) позволяют заменить вычисление максимума по N переменным в исходной задаче решением N задач, в каждой из которых максимум находится лишь по одной переменной.

Примечания.

1. Наряду с решением исходной задачи получают решения целого семейства сходных между собой задач.
2. Та же идея построения рекуррентных соотношений может быть использована в случае нескольких видов ресурсов, но с увеличением размерности быстро растет объем вычислений.

Схема решения задачи [10.1] –[10.2]

1. Находят функции $f_1(x)$ и $x_1(x)$.

2. Строят рекуррентное соотношение.
3. Находят функции $f_i(x)$ и $x_i(x)$ $(i = 2,3, \dots, N)$.
4. Выбирают значения $fN(a)$ – максимальное значение целевой функции $x_N(a)$ - значение переменной x_N в решении.
5. Остальные переменные получают следующие значения:

$$x_{N-1} = x_{N-1}(a - x_N)$$
$$x_{N-2} = x_{N-2}(a - x_N - x_{N-1})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_k = x_k(a - x_N - \dots - x_{k+1})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_2 = x_2(a - x_N - \dots - x_3)$$
$$x_1 = x_1(a - x_N - \dots - x_2)$$

Пример

$$\mathbf{min\,R\,(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2}$$

при условиях:

$$\mathbf{x_1 + x_2 = 3}$$
$$\mathbf{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.}$$

Решение. Для построения рекуррентного соотношения обозначим $q_1(x_1) = (x_1 - 2)^2$, $q_2(x_2) = (x_2 - 3)^2$. Построим последовательность функций

$$f_n(x\ \ ) \ (n = 1, 2), 0 \leq x \leq 3$$
$$f_1(x) = \min_{0 \leq x_1 \leq x} (x_1 - 2)^2$$

Легко видеть, что при $x < 2 f_1(x) = (x_1 - 2)^2,\ x_1 = x$, а при $x \geq 2 f_1(x) = 0,\ x_1(x) = 2$.
Запишем значения функций $f_1(x)$ и $x_1(x)$ при дискретных целых значениях $\mathbf{x}$ из заданного интервала

$$f_1(0) = 4; \quad x_1(0) = 0; \quad f_1(2) = 0; \quad x_1(2) = 2;$$
$$f_1(1) = 1; \quad x_1(1) = 1; \quad f_1(3) = 0; \quad x_1(3) = 2;$$

Построим рекуррентное соотношение, связывающее функции $f_2(x)$ и $f_1(x)$:

$$f_2(x) = \min_{0 \leq x_2 \leq x} \{(x_2 - 3)^2 + f_1(x - x_2)\}$$

Поскольку записать данную функцию в явном виде сложно, вычислим ее значения при дискретных значениях x:

$$f_2(0) = \min_{x_2 = 0} \{(x_2 - 3)^2 + f_1(0)\} = 13; \quad x_2(0) = 0;$$
$$f_2(1) = \min_{0 \leq x_2 \leq 1} \{[(0 - 3)^2 + f_1(1 - 0)], [(1 - 3)^2 + f_1(1 - 1)]\} = \min\{10,8\} = 8\,;$$
$$x_2(1) = 1;$$

Здесь минимальное значение выбрано из двух выражений – при $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$ и достигается при x_2=1.

$$f_2(2) = \min_{0 \leq x_2 \leq 2} \{(x_2 - 3)^2 + f_1(2 - x_2)\} =$$
$$= \min\{[(0 - 3)^2 + f_1(2 - 0)],$$
$$[(1 - 3)^2 + f_1(2 - 1)], \}$$
$$[(2 - 3)^2 + f_1(2 - 2)]\} = \min\{9, 5, 5\} = 5;$$
$$x_2(2) = 1 \text{ или } 2.$$
$$f_2(3) = \min_{0 \leq x_2 \leq 3} \{(x_2 - 3)^2 + f_1(3 - x_3)\} = \min\{[(0 - 3)^2 + f_1(3 - 0)],$$
$$[(1 - 3)^2 + f_1(3 - 1)], \}$$
$$[(2 - 3)^2 + f_1(3 - 2)], \qquad [(3 - 3)^2 + f_1(3 - 3)]\} = \min\{9, 4, 2, 4\} = 2;\ x_2(3) = 2\,.$$

Находим $x_1(a - x_2) = x_1(1) = 1$.
Следовательно, решение данной задачи следующее $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ R_{min} = 2$.

Глава 3. Метод случайных испытаний.

Пусть каким-то способом выбрано *n* случайных чисел. Принимаем эти числа за значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, проверяем допустимость такого решения и вычисляем для него значение целевой функции. Такой процесс повторяем многократно, фиксируя точку в том случае, если целевая функция в ней достигает лучшего по сравнению с предыдущим значения (в смысле приближения к оптимуму). Общее число случайных проб зависит от числа переменных, требуемой точности искомых величин и заданной вероятности получения оптимального решения. Все это определяется заранее. Поиск прекращается, когда число испытанных точек достигнет расчётного. Точку с наибольшим (наименьшим) значением целевой функции считаем оптимальной. Метод случайных испытаний может быть реализован только на ЭВМ, причем интересно отметить, что случайные числа ЭВМ вырабатывает сама

Глава 4. Геометрическое программирование.

Рассмотренные выше методы нелинейного программирования предназначены для решения задач оптимизации с критерием оптимальности, сформулированным как нелинейная функция независимых переменных, на допустимую область изменения которых накладываются ограничения, имеющие вид равенств или неравенств, возможно также нелинейного вида. Как правило, решение подобных задач методами нелинейного программирования требует значительного объема вычислений и сопряжено с определенными трудностями, обусловленными особенностями целевой функции и ограничений. Поэтому создание методов решения задач нелинейного программирования, использующих специфический характер целевых функций и ограничений для построения эффективных вычислительных схем, несомненно имеет большое практическое значение. К числу таких методов, интенсивно развиваемых в последние годы, относится метод геометрического программирования ,

Основные понятия.

Метод геометрического программирования возник и развивался в связи с задачами инженерного проектирования и имеет целью решение задач оптимизации, в которых критерий оптимальности и ограничения на переменные представляются в виде положительных полиномов, называемых также *позиномами*, вида:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{aij}$$

причем c_j — положительные константы, а показатели степени a_{ij} — произвольные вещественные числа. Предполагается, что независимые переменные $x_i (i = 1, \dots, n)$ принимают только положительные значения.

В общем случае задача геометрического программирования заключается в *минимизации* позинома $\boldsymbol{g_0(x)}$ при наличии ограничений

$$\boldsymbol{g_k(x) \leq 1 \qquad k = 1, \dots, p} \ .$$

Позиномиальные выражения достаточно широко распространены в науке и технике, примером чего являются известные критериальные соотношения, представляющие собой ни что иное как одночленные позиномы. Кроме того, во многих случаях позиномы могут использоваться для аппроксимации функциональных зависимостей различной степени сложности, определяемых математическими моделями или же свойствами рассматриваемых объектов. Таким образом, метод геометрического программирования может применяться во всех тех случаях, когда либо в самой постановке задачи присутствуют позиномиальные выражения, либо имеющиеся зависимости аппроксимируются позиномами.

Свойства геометрического неравенства.

В основе метода геометрического программирования лежит использование свойств неравенства, называемого *геометрическим*, согласно которому среднее геометрическое неотрицательных чисел не превышает их среднего арифметического. Для случая двух чисел *U\ и U2* это неравенство имеет вид:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{U_1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{U_2} \geq \boldsymbol{U_2^{1/2}} \cdot \boldsymbol{U_2^{1/2}}$$

Обобщение геометрического неравенства на случай произвольного числа членов с произвольными положительными *весами* приводит к соотношению:

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_1 U_j \geq \prod_{i=1}^{m} U_j^{\delta_j}$$

в котором U_j $(j = 1, \dots, m)$—произвольные неотрицательные числа, а δ_j, $(j = 1, \dots, m)$ — произвольные положительные веса, удовлетворяющие условию нормализации*:*

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_J = 1.$$

Воспользовавшись заменой переменных,

$$u_j = \delta_j U_j$$

последнее неравенство можно представить в виде:

$$\sum_{j=1}^{m} U_j \geq \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{u_j}{\delta_j}\right)^{\delta_j}.$$

Последнее выражение и будет использоваться при выводе соотношений геометрического программирования.

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \geq \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{c_j}{\delta_j}\right)^{\delta_j}$$

Ниже приведен ряд примеров применения математического аппарата геометрического программирования к решению конкретных задач оптимизации. Представленные задачи, которые с успехом могут быть решены и другими методами, естественно не претендуют на то, чтобы показать все возможности рассматриваемого метода, а являются лишь иллюстрацией основных аспектов его использования.

Расчет оптимальных размеров емкости.

Рассматриваемая задача заключается в расчете размеров цилиндрической емкости заданного объема *V,* которая имела бы минимальную поверхность S. Эта задача уже решалась с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа и была сведена к
задаче минимизации величины
поверхности S, определяемой соотношением

$$\mathbf{S = 2\pi(r^2 + rh)}$$

при ограничении

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}^2\boldsymbol{h} \qquad \textbf{(*)}$$

причем **r** и $\boldsymbol{h}$ — соответственно радиус емкости и ее высота. В данном случае ограничение **(*)** может быть представлено в виде неравенства

$$V \leq \pi r^2 h \ ,$$

которое записывается в виде позиномиального ограничения:

$$\frac{\mathbf{V}}{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{r}^{-2}\mathbf{h}^{-1} \leq \mathbf{1}\ .$$

Вводя обозначения:

$$c_1 = 2\pi, \qquad c_2 = 2\pi, \qquad c_3 = \frac{V}{\pi}$$

$$x_1 = r, \qquad x_2 = h,$$

$$a_{11} = 2, \qquad a_{21} = 0, \qquad a_{12} = 1$$

$$a_{22} = 1, \qquad a_{13} = -2, \qquad a_{23} = -1,$$

запишем поставленную задачу в стандартной форме обозначений позиномов:

$$g_0(x) c_1 x_1^{a11} x_2^{a21} + c_2 x_1^{a12} x_2^{a22} \quad (1)$$

$$g_1(x) = c_3 x_1^{a13} x_2^{23} \leq 1 \qquad (2)$$

Матрица коэффицентов a_{ij} будет:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1-2 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix}$$

и, как нетрудно убедиться, имеет ранг, равный 2, т. е. в задаче есть две независимые переменные *(n'* = 2). Число членов в позиномах (1) и (2) равно 3 (m = 3), поэтому степень трудности задачи в соответствии с выражением (X, 51) составляет:

$$s = m - n' - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$$

Выражение для двойственной функции в данном случае имеет вид:

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\delta}_3^{\boldsymbol{\delta}_3}\left(\frac{\mathbf{c}_1}{\boldsymbol{\delta}_1}\right)^{\boldsymbol{\delta}_1}\left(\frac{\mathbf{c}_2}{\boldsymbol{\delta}_2}\right)^{\boldsymbol{\delta}^2}\left(\frac{\mathbf{c}_3}{\boldsymbol{\delta}_3}\right)^{\boldsymbol{\delta}^3} \qquad (3)$$

поскольку

$$\lambda_1 = \delta_3$$

так как ограничение представляет собой одночленный позином. Условие нормализации при этом записывается как

$$\delta_1 + \delta_2 = 1$$

и совместно с условиями ортогональности:

$$2\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_3 = 0$$

$$\delta_2 - \delta_3 = 0$$

составляет систему трех уравнений относительно трех неизвестных δ_1, δ_2 и δ_3.

Решением системы уравнений будет:

$$\delta_1 = \frac{1}{3}, \qquad \delta_2 = \frac{2}{3}, \qquad \delta_3 = \frac{1}{3}$$

Подстановка значений c_i и δ_i - в выражение двойственной функции (3) дает соотношение

$$v(\delta) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}(6\pi)^{\frac{1}{3}}(3\pi)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

которое и определяет минимальное значение поверхности S. Следующий этап решения задачи заключается в определении размеров емкости.

Окончательно получим:

$$r_1 = x_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$h = x_2 = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

т. е. найдено в точности то же самое решение, которое было определено при использовании метода множителей Лагранжа.

Литература

1. С. Гасс. Линейное програм мирование, пер. с англ.М. ,"Физматгиз", 1961.
2. Ф. И.Карпелевич, Л.Е.Садовский. Элементы линейной алгебры и линейного программирования, М.,"Наука", 1967.
3. П. Е.Данко,А.Г.Попов. Высшая математика в упражнениях и задачах ч. 11, М.,"Высшая школа", 1999 .
4. Пинскер А.Г.,Брыжина Э.Ф. Основы оптимального программирования, Л . 1974 .
5. Калихман И.А. Сборник задач по математическому программированию. «Высшая школа», 1975.
6. Т.Ф. Гуревич В.О. Лущук. Сборник задач по математическому программированию. Москва «Колос», 1977.
7. Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования : учеб. пособие для студ. втузов / Грешилов, Анатолий Антонович. - 2-е изд., доп. - М. : Логос, 2006.
8. Логинова И.В. Методы оптимизации : учебно-методич. пособие / И. В. Логинова, М. С. Мищенко ; Казан. гос. технол. ун-т. - Казань, 2008.
9. Пантелеев С.Д. Математическое программирование и экономические задачи : учеб. пособие / Пантелеев, Сергей Дмитриевич. - М.: Изд-во МГОУ, 2007.
10. Хуснутдинов Р.Ш. Практикум по линейной алгебре и линейному программированию : учеб. пособие / Казан. гос. технол. ун-т. - Казань, 2009.
11. Бозиев С. Н. MATLAB 2006 а в примерах / Бозиев, Садин Назирович ; Рос. гос. ун-т нефти и газа. - М., 2006.
12. Бояринов А. И., Кафаров В. В. Методы оптимизации в химической технологии. Изд. 2-е. М., «Химия» 1975.
13. Монахов В. М. и др. Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1978. 175 с.

Оглавление