1 Полупризнак равенства треугольников

1.1 Совсем немного теории

Задача 1 *Равны ли два треугольника ABC и $A'B'C'$, если известно, что $\angle A = \angle A'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$?*

Ответ на эту задачу, полученный, например, с помощью теоремы синусов (а нам нужно методами восьмого класса!) дает ответ. При выполнении условий предыдущей задачи либо треугольники ABC и $A'B'C'$ равны, либо $\angle C + \angle C' = 180°$.

Вообще, очень полезно изучить теоремы синусов и косинусов!!!

Задача 2 *Докажите, что если $\angle A = \angle A' \geqslant 90°$, то треугольники равны.*

Задача 3 *Докажите, что если $BC = BB' > AB$, то треугольники равны.*

1.2 Применение полупризнака

Задача 4 *В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Найдите угол C, если $A_1I = B_1I$.*

Задача 5 *Пусть в обозначениях предыдущей задачи $\angle C = 60°$. Докажите, что*
а) $A_1I = B_1II$;
б) найдите угол IA_1B_1.

Задача 6 *Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B треугольника ABC пересекаются в точке J, причем $AJ = BJ$. Найдите AC, если $\angle ABC = \beta$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R.*

Задача 7 *Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, а J — центр вневписанной окружности. Докажите, что описанная окружность пересекает IJ в его середине.*

(Эта точка по традиции Русановского лицея обоначается W, а утверждение — часть леммы о трилистнике.)

Задача 8 *Что можно сказать о треугольнике ABC, если биссектрисы его углов A и B образуют равные углы со сторонами BC и AC соответственно.*

Задача 9 *В треугольнике ABC центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите угол C.*

(Эта окружность — окружность девяти точек.)

Задача 10 *В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 16$. Известно, что центр окружности, проходящей через вершину B и середины сторон AB и AC, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.*

Задача 11 *В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Найдите угол A, если известно, что $\angle C_1B_1B = 30°$, а $\angle C \neq 120°$.*

Задача 12 *В треугольнике ABC $\angle BCA = 120°$. Найдите $\angle BB_1C_1$.*

Задача 13 *Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Через вершину C проведем прямую ℓ, параллельную AB. Пусть прямые A_1C_1 и B_1C_1 пересекают прямую ℓ в точках D и E соответственно. Докажите, что $CD = CE$.*

Задача 14 *Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Найдите угол C, если $\angle A_1C_1B_1 = 90°$.*