**Раздел 4. Основы теории вероятностей и математической статистики.**

**Тема 4.2.** **Случайная величина, её функция распределения и числовые характеристики.**

**4.2.1. Основные определения.** Часто в результате испытания происходят события, заключающиеся в том, что некоторая величина принимает одно из своих возможных значений. В таких случаях удобно вместо множества событий рассматривать одну переменную величину (называемую случайной величиной). Случайная величина обозначается через *X*, *Y*, Z, … и т.д.

***Случайной*** называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

**Примеры.**

1. В студенческой группе 25 человек. Пусть величина *Х* – число студентов, находящихся в аудитории перед началом занятий. Ее возможными значениями будут числа 0, 1, 2,…,25. При каждом испытании (начало занятий) величина Х обязательно примет одно из своих возможных значений, т.е. наступит одно из событий *Х* = 0, *Х* = 1, …, *Х* = 25.

2. Измерение курса акции некоторого предприятия. Возможные события заключаются в том, что стоимость акции *Y* примет некоторое значение в пределах от 0 до ∞.

3. Однократное бросание игральной кости. Возможные события заключаются в том, что на верхней грани выпадает Z: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

4. Подбрасывается монета *n* раз. Возможные результаты: герб выпал 0, 1, 2, …, *n* раз.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

**Определение.** Если множество возможных значений случайной величины конечно или образуют бесконечную числовую последовательность, то такая случайная величина называется *дискретной* (примеры 1, 3, 4).

**Определение**. Случайная величина, множество значений которой заполняет сплошь некоторый числовой промежуток, называется *непрерывной* (пример 2).

Если случайная величина не относится ни к дискретным, ни к непрерывным случайным величинам, то ее называют *смешанной*.

Очевидно, что для полной характеристики дискретной случайной величины мало знать ее значения. Необходимо им поставить в соответствие вероятности.

**Определение.** Соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется *законом распределения* данной случайной величины.

Простейшая формой задания закона распределения дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины (обычно в порядке возрастания) и соответствующие им вероятности:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *х*1 | *х*2 | … | *хn* | … |
| *Р* | *р*1 | *р*2 | … | *рn* | … |

Такая таблица называется рядом распределения. Допустим, что число возможных значений случайной величины конечно: *х*1, *х*2, …, *хn*.

При одном испытании случайная величина принимает одно и только одно постоянное значение. Поэтому события *Х* = *хi* (*i* = 1, 2, … , *n*) образуют полную группу попарно независимых событий.

Следовательно, *р*1 + *р*2 + … + *рn* = 1.

Можно закон распределения изобразить и графически, откладывая на оси абсцисс возможные значения случайной величины, а на оси ординат – соответствующие вероятности. Для большей выразительности полученные точки соединяются прямолинейными отрезками. Получающая при этом фигура называется многоугольником (полигоном) распределения.

**Пример.**

Игральный кубик бросают 3 раза. Случайная величина Х – число выпадений «шестерки». Составить закон распределения случайной величины и построить многоугольник распределения.

Решение.

При трехкратном бросании кубика «шестерка» может не появиться ни разу либо один раз, либо два раза, либо три раза. Следовательно, случайная величина Х принимает значения: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятности каждого из этих значений, воспользовавшись формулой Бернулли:



А=«Выпала «шестерка»».











Закон распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 |  |
| *Р* |  |  |  |  |

Многоугольник распределения имеет вид:

Pi

Xi

1

0

3

2

$$\frac{1}{216}$$

$$\frac{15}{216}$$

$$\frac{75}{216}$$

$$\frac{125}{216}$$

**4.2.2. Функция распределения вероятностей**

Непрерывную случайную величину нельзя охарактеризовать перечнем всех возможных ее значений и их вероятностей. Естественно, встает вопрос о том, нельзя ли охарактеризовать случайную величину иным способом, одинаково годным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Функцией распределения случайной величины *Х* называют функцию *F(x*), определяющую для каждого значения *х*, вероятность того, что случайная величина *Х* примет значение меньше *х*, т.е.

*F(x*) = *P* (*X* <*x*).

Иногда функцию *F(x*) называют интегральной функцией распределения.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Значение функции распределения принадлежит отрезку [0,1]: 0 ≤ *F(x*) ≤ 1.
2. Функции распределения есть неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина *Х* примет значение, заключенное в интервале (*а*, *b*), равна приращению функции распределения на этом интервале:

***Р(а* < *X* < *b*) = *F(b*) – *F(а*).**

1. Если все возможные значения случайной величины *Х* принадлежат интервалу (*а*, *b*), то *F(x*) = 0 при *х* ≤ *а*; *F(x*) = 1 при *х* ≥ *b*.
2. Справедливы следующие предельные отношения:



Для дискретной случайной величины *Х*, которая может принимать значения *х*1, *х*2, …,*хn*, функция распределения имеет вид:



где неравенство ***xi<x*** под знаком суммы означает, что суммирование касается всех тех значений ***хi***, величина которых меньше ***х***.

Поясним эту формулу исходя из определения функции ***F(x*).** Предположим, что аргумент ***х*** принял какое-то определенное, но такое, что выполняется неравенство ***xi*<*x*≤*xi*+1**. Тогда левее числа ***х*** на числовой оси окажутся только те значения случайной величины, которые имеют индекс 1, 2, 3, …, *i*. Поэтому неравенство ***Х*<*x*** выполняется, если величина ***Х*** примет значения ***хк***, где *k* = 1, 2, …, *i*. Таким образом, событие ***Х*<*x*** наступит, если наступит любое, неважно какое, из событий *Х* = *х*1, *Х*=*х*2, *Х*=*х*3, …, *Х*=*хi*. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения вероятностей имеем:



Коротко говоря, для дискретной случайной величины функция распределения вычисляется для каждого значения как сумма вероятностей, соответствующих всем предшествующим значениям случайной величины.

**Пример.**  Найти интегральную функцию распределения случайной величины Х, заданной рядом распределения и построить ее график. Найдите вероятность того, что значение случайной величины попадет в интервал (1,5; 2,8).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 1 | 2 | 3 |  |
| *Р* | 0,3 | 0,2 | 0,5 |

Решение.

Пусть *х* ≤ 1, тогда *F(x*) = 0, так как событие *Х* < *х* будет невозможным.

Если 1 < *х* ≤ 2, то имеем *F(x*) = *p*1 = 0,3.

Если 2 < *х* ≤ 3, то *F(x) = p*1 + *p*2 = 0,5.

Если *х* > 3, то *F(x) = p*1  + *p*2 + *p*3 = 1.

Окончательно получаем:



График функции *F(х*) имеет вид.

     

Вероятность того, что случайная величина *Х* примет значение, заключенное в интервале (*1,5*, *2,8*), равна приращению функции распределения на этом интервале:

***Р(1,5* < *X* < *2,8* )= *F2,8*) – *F(1,5*).**

По графику найдем значения функции распределения и искомую вероятность:

F(1,5)=0,3; F(2,8)=0,5; Р(1,5 < X < 2,8 )=0,5-0,3=0,2.

**4.2.3 Числовые характеристики случайной величины.**

Закон распределения полностью определяет случайную величину, однако, не всегда его возможно привести в полном объеме. Для решения многих проблем достаточно знания отдельных числовых параметров, характеризующих наиболее существенные черты случайной величины. С помощью таких характеристик во многих случаях удается исследовать поведение случайных величин. Основными числовыми характеристиками случайной величины являются:

* математическое ожидание;
* мода;
* медиана;
* дисперсия;
* среднее квадратическое отклонение.

### 4.2.3.1 Математическое ожидание

***Математическим ожиданием*** (ожидаемым значением или средним значением) дискретной случайной величины называют число M(X) = x1p1 + x2p2 + ...+ xnpn – сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности. Математическое ожидание измеряется в тех же единицах, что и сама величина. Если все значения случайной величины равновероятны, то математическое ожидание совпадает со средним арифметическим значением.   Математическое ожидание случайной величины *Х* указывает некоторое среднее значение, около которого группируются все возможные значения *Х*.

**Пример 1.** Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины задан в виде таблицы. Найти математическое ожидание этой величины.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Р | 0,02 | 0,03 | 0,1 | 0,15 | 0,4 | 0,15 | 0,1 | 0,03 | 0,02 |

Решение.

Случайная величина является дискретной, т.к. принимает конечное множество значений. По определению математического ожидания получаем:



**Пример 2.** Для проведения лотереи изготовили 100 билетов. Из них 1 билет с выигрышем 500 рублей, 10 билетов по 100 руб и остальные по 5 рублей (беспроигрышная лотерея). Наудачу выбирают билет. Найти математическое ожидание выигрыша.

Решение:

Построим закон распределения случайной величины Х – размера выигрыша.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | 500 | 100 | 5 |
| Р |  |  |  |

Математическое ожидание случайной величины Х равно:



Для того чтобы лотерея приносила доход, цена билета должна быть больше, чем средний выигрыш, например 30 руб. (Доход 3000 – 1945 = 1055 руб.). Отдельный игрок может и выиграть, но в конечном итоге доход будет у организатора лотереи.

Механическая интерпретация математического ожидания дискретной случайной величины – если на оси абсцисс расположить точки x1, x2, ..., xn, в которых сосредоточены массы p1, p2, ..., pn, причем, то М(Х) – абсцисса центра тяжести.

Математическое ожидание находят для однородных величин.

Например, нет смысла искать среднюю урожайность зерновых и бахчевых культур в фермерском хозяйстве. Причем, и для однородных величин нахождение математического ожидания бывает иногда лишено смысла. Например, средняя температура больных в больнице.

**Свойства математического ожидания**

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине M(C) = C
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания M(CX) = CM(X)
3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий M(XY) = M(X) **.** M(Y)
4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий M(X + Y) = M(X) **+** M(Y)

**Пример 1.**

Производится 3 выстрела с вероятностями p1 = 0,4; p2 = 0,3; p3 = 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х1 | 1 | 0 |  | X2 | 1 | 0 |  | X3 | 1 | 0 |
| Р1 | 0,4 | 0,6 |  | P2 | 0,3 | 0,7 |  | P3 | 0,6 | 0,4. |

Решение.

На основании свойства 4 искомое математическое ожидание равно:



**Пример 2.**

Найти математическое ожидание случайной величины (4Х + 5) если М(Х) = 2.

Решение.



**4.2.3.2 Дисперсия случайной величины.**

Случайные величины могут иметь одинаковые математические ожидания, но различные возможные значения.

Например,

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | – 100 | 100 |  | Y | – 0,001 | 0,001 |
| P | 0,5 | 0,5 |  | P | 0,5 | 0,5 |
| *M*(X) = 0 |  | *M*(Y) = 0 |

Математические ожидания равны.

Возможные значения Y близки к M(Y), возможные значения Х далеки от своего M(X) то есть для характеристики случайной величины математического ожидания недостаточно, нужна характеристика рассеивания, т.е. разброса значений случайной величины, например в артиллерии важно насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Наиболее полной характеристикой разброса чисел является набор их отклонений от математического ожидания. Но когда набор чисел велик, рассматривать набор отклонений практически неудобно. Нужно описать разнообразие чисел в наборе одной характеристикой, одним числом.

**Размах** – слишком грубая мера разброса чисел в наборе, поскольку учитывает только два из них – наименьшее и наибольшее. Можно попробовать взять «среднее отклонение».

Для любого набора, если только не все числа в нем равны, часть отклонений будет положительна, а часть отрицательна. При этом сумма отклонений равна 0.

В этом состоит основное свойство отклонений: **сумма отклонений чисел от математического ожидания этих чисел равна нулю.**

Сумма отклонений всегда равна нулю, поэтому среднее арифметическое отклонений тоже равна нулю и его нельзя использовать как меру разброса.

Чтобы судит о разбросе, принято складывать не сами отклонения, а их квадраты. Квадраты отклонений неотрицательны, поэтому сумма квадратов отклонений зависит только от абсолютных величин отклонений, а не от их знаков. Чем больше отклонения чисел от математического ожидания, тем больше будет сумма квадратов отклонений. Для того чтобы мера разброса чисел не зависела от их количества в наборе, в качестве такой меры берут среднее арифметическое квадратов отклонений. Эту величину называют **дисперсией** (то есть разброс данных). Обозначим значения случайной величины x1, x2, ..., xn, а математическое ожидание этих значений – буквой ***М***.

***Дисперсией*** случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

*D(X*) = *M(X* –*М(Х*))2.

Дисперсию дискретной случайной величины *Х* удобно вычислять по формуле:



**Свойства дисперсии**

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю D(C) = 0

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат D(CX) = C2D(X)

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин D(X + Y) = D(X) + D(Y)

4. Дисперсия разности двух независимых величин равна сумме их дисперсий D(X – Y) = D(X) + D(Y)

**Следствия**

5. D(C + X) = D(X) где С – const.

6. D(X + Y + Z) = D(X) + D(Y) + D(Z)

**Пример.**

Найти дисперсию случайной величины Х, заданную рядом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 | 5 |
| P | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

Решение.

1. Вычислим математическое ожидание случайной величины:

M(X) = 1 **.** 0,3 + 2 **.** 0,5 + 5 **.** 0,2 = 0,3 + 1,0 + 1,0 = 2,3

1. Найдем квадраты отклонений случайной величины от ее математического ожидания:

(x1 – M(X))2 = (1 – 2,3)2 = (– 1,3)2 = 1,69

(x2 – M(X))2 = (2 – 2,3)2 = 0,09

(x3 – M(X))2 = (5 – 2,3)2 = 7,29

1. Напишем закон распределения квадрата отклонения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| (X – M(X))2 | 1,69 | 0,09 | 7,29 |
| *Р* | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

1. Вычислим дисперсию:

D(X) = 1,69 **.** 0,3 + 0,09 **.** 0,5 + 7,29 **.** 0,2 = 2,01

### 4.2.3.3 Среднее квадратическое отклонение

Дисперсия имеет размерность равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют не дисперсию, а среднее квадратическое отклонение:



Среднее квадратическое отклонение равно корню квадратному из дисперсии, поэтому его размерность равна размерности случайной величины. Например, если Х выражается в линейных метрах, то тоже выражается в линейных метрах, а D(X) – в квадратных метрах.

**Задания для практической работы №10.**

Задан ряд распределения дискретной случайной величины.

1. Найдите значение **р**.
2. Постройте многоугольник распределения.
3. Вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
4. Найдите функцию распределения и постройте ее график.
5. Найдите вероятность того, что значение случайной величины попадет в интервал (a;b).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | **Ряд распределения** | **a** | **b** |
| 7 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2,5 | -2,2 | -2 | -1,5 | -1,3 | -0,8 |
| p | 0,05 | 0,15 | p | 0,5 | 0,1 | 0,05 |

 | -1 | 1 |

