1 Механика.

В основе классической механики лежит ряд экспериментальных фактов. Перечислим некоторые из них.

А. Пространство и время. Наше пространство трехмерно и евклидово, то есть обладает расстоянием между двумя точками, а время - одномерно. Данный постулат кажется очивидным, однако в более развитых разделах физики применяют многомерные пространства.

Принцип относительности Галилея. Существуют системы координат (называемые инерциальными), обладающие следующими свойствами:

1) Все законы природы (не только механические) во все моменты времени одинаковы во всех инерциальных системах координат.

2) Все системы координат, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно одной инерциальной системы, также инерциальны.

Инерциальные системы - идеал, выдуманный физиками- и в то же время - великое открытие. Без понятия инерциальной системы нельзя построить легкую физику, однако в природе таковых не существует, хотя бы из-за вселенского проникновения гравитационных сил.

В. Принцип детерминированности Ньютона. Первоначальное расположение системы в эвклидовом пространстве и первоначальные скорости материальных частиц определяют все их дальнейшее движение. Факт не тревиальный. Можно придумать систему для прогноза движения которой требуется начальное ускорение, однако в природе таковых не существует.

Пусть $\overrightarrow{r(t)}$ - текущий радиус-вектор точки, положение которой зависит от времени. Тогда

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{r(t)}}{dt} = \dot{r(t)} \qquad \texttt{-скорость точки}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d^2\overrightarrow{r(t)}}{dt^2} = \ddot{r(t)} \qquad \texttt{- ускорение точки}$$

1.1 Кинематика

(от греч. kinema, родительный падеж kinematos - движение), раздел механики, посвященный изучению геометрических свойств движений без учета их масс и действующих на них сил.

Задача 1. Точка движется по прямой согласно уравнению

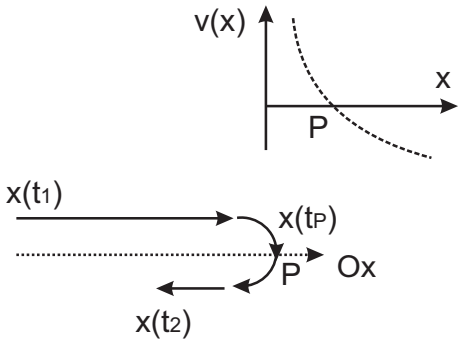
$$x = x(t) = 3 * A * B^2 - A * t^3$$

Определить среднюю скорость $< v >$ точки в интервале времени

$$[B - \Delta; B + \Delta]$$

Решение . Рассмотрим, не имеет ли движение точек поворота, то есть точек изменения знака скорости. Действительно,например, до точки поворота тела перемещалось вдоль оси координат, и имело тем самым положительную скорость,

а после точки поворота она начинает двигаться против направления оси координат и знак скорости отрицателен. Ясно, что в момент смены знака скорость должна равняться нулю.Если рассмотреть ход движения в указанном интервале, то оно будет выглядеть следующим образом. Вычисление средней скорости



по формуле

$$< v >= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

оказалось бы неверным, так как средняя скорость равна пройденному пути, разделенному на интервал времени, а не смещению разделенному на интервал времени. В нашем варианте правильная формула для вычисления средней скорости такова

$$< v >= \frac{((x(t_P) - x(t_2)) + (x(t_P) - x(t_1))}{t_2 - t_1}$$

Момент остановки тела находится из условия равенства скорости нулю. При условии задачи, это означает, что

$$v(t_P) = \frac{dx}{dt} = 3 * A * B^2 - 3 * A * t^2 = 3 * A * (B^2 - t^2) = 0$$

то есть $t_P = B$.

Задача 2. По прямой линии движутся две материальные точки согласно уравнениям $x_1 = A_1 + B_1 * t + C_1 * t^2$ и $x_2 = A_2 + B_2 * t + C_2 * t^2$, где

$$A_1 = 10\text{м}; \quad B_1 = 1\frac{\text{м}}{c}; \quad C_1 = -2\frac{\text{м}}{c^2};$$
$$A_1 = 3\text{м}; \quad B_1 = 2\frac{\text{м}}{c}; \quad C_1 = 0.2\frac{\text{м}}{c^2};$$

В какой момент времени τ скорости этих точек будут одинаковыми.

Решение. Аналитически скорости точек выражаются формулами:

$$v_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = B_1 + 2 * C_1 * t;$$
$$v_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = B_2 + 2 * C_2 * t;$$

Приравняем их между собой

$$B_1 + 2 * C_1 * t = B_2 + 2 * C_2 * t$$

Отсода момент времени τ находится из равенства

$$(C_2 - C_1) * \tau = (B_1 - B_2)$$

или

$$\tau = \frac{B_1 - B_2}{C_2 - C_1}$$

Численно:

$$\tau = \frac{(1-2)\frac{\text{м}}{c}}{(0.2-(-2))\frac{\text{м}}{c^2}}$$

то есть тела могли встретится только до момента начала движения

$$\tau = -0.45\,c$$

1.2 Второй закон Ньютона как дифференциальное уравнение.

Движение под действием постоянной силы

Уравнение движения, вместе с начальными условиями, выглядит следующим образом

$$\begin{cases} m * \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = F; \\ x(t=0) = x_0; \\ \dfrac{dx}{dt}(t=0) = v_0; \end{cases}$$

Сила постоянна $F = const$.

Чаще всего данная система записывается по-другому

$$\begin{cases} m * \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = F; \\ x\,|_{t=0} = x_0; \\ \dfrac{dx}{dt}\,|_{t=0} = v_0; \end{cases}$$

С математической точки зрения данная система равенств представляет собой задачу Коши - то есть решение дифференциального уравнения при начальных условиях. Найдем решение представленной задачи. Для этого вспомним, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t);$$

Тогда непосредственно дифференциальное уравнение окажется записанным следующим образом:

$$m * \frac{dv}{dt} = F$$

В последнем уравнении разделим переменные - то есть в буквальном смысле слова представим производную по времени $\frac{dv}{dt}$ как частное двух дифференциалов dv и dt. Тогда можно умножить дробь на знаменатель и записать

$$m * dv = F * dt$$

Интегрируем обе части равенства, воспользовавшись простейшим свойством интеграла, а именно

$$\int dx = x$$

Результат интегрирования - в представленном случае "x"называется *первообразной*. Переменную интегрирования можно назначить любым образом и результат интегрирования не измениться. Конкретно, по отношению к нашему варианту если вместо "x"берется "v", то

$$\int dv = v$$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть

$$\int F\,dt = F * \int dt = F * t$$

Вообще говоря, к результату интегрирования (то есть к первообразным)положено каждый раз приписывать произвольную постоянную, однако при равенстве двух интегралов достаточно записать постоянную только в одной части равенства (обычно в правой части). У нас это выглядит следующим образом:

$$m * v = F * t + C$$

Произведение $m * v$, стоящее слева называется *импульсом*. Из условия задачи изветна скорость в начальный момент времени. Положим в последнем уравнении $t = 0$. Тогда

$$m * v_0 = F * 0 + C_1$$

то есть постоянная $C_1 = m * v_0$. Таким образом

$$m * v = F * t + m * v_0$$

Вернемся к определению скорости как первой производной от координаты

$$m * \frac{dx}{dt} = F * t + m * v_0$$

Еще раз разделим переменные, домножив равенство на dt.

$$m * dx = F * t * dt + m * v_0 * dt$$

Переменную, умноженную на постоянную величину мы интегрировать уже умеем:

$$\int m * \ dx = m * x;$$

$$\int m * v_0 * dt = m * v_0 * t$$

Осталось взять интеграл от слагаемого с силой. Из Приложения 1 следует

$$\int F * t * \, dt = F * \frac{t^2}{2}$$

Собирем все результаты вместе

$$m * x = \frac{1}{2} * F * t^2 + m * v_0 * t + C_0$$

При $t = 0$

$$m * x_0 = F * 0 + m * v_0 * 0 + C$$

Результатом окажется $C_0 = m * x_0$.

Итак, решением задачи Коши для координаты тела - $x(t)$, движущегося при воздействии постоянной силы,

$$\begin{cases} m * \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = F; \\ x\,|_{t=0} = x_0; \\ \dfrac{dx}{dt}\,|_{t=0} = v_0; \end{cases}$$

будет

$$m * x(t) = \frac{1}{2} * F * t^2 + m * v_0 * t + m * x_0;$$

Чаще всего последнее равенство делят на массу:

$$x(t) = \frac{1}{2} * \frac{F}{m} * t^2 + v_0 * t + x_0;$$

При этом закон изменения импульса таков

$$m * v = F * t + m * v_0$$

или, после деления на массу, закон изменения скорости

$$v(t) = \frac{F}{m} * t + v_0$$

Заметим, что данные уравнения удобнее и часто легче интегрировать каждый раз заново, чем применять конечный результат. Однако дав подобный совет, мы его придерживаться не будем, чтобы сократить объем учебного пособия.

Движение тела, брошенного вертикально верх Пусть материальная точка массы "m"вылетает из нулевой координаты $X_0 = 0$ с вертикальной скоростью $v(t = 0) = v_0$. На точку действует только сила веса $F = P = -m * g$. Минус возникает из-за того, что направление силы противоположно направлению движения. Результатом интегрирования уравнения движения будет

$$x(t) = -\frac{1}{2} * \frac{m * g}{m} * t^2 + v_0 * t + 0 = -\frac{1}{2} * g * t^2 + v_0 * t;$$

и для скорости

$$v(t) = -\frac{m*g}{m}*t + v_0 = -g*t + v_0;$$

Определим время пролета тела до наивысшей точки x_{max} и координату наивысшей точки.

Долетев до максимально возможной высоты тело зависает, поэтому $v_{max} = 0$. В результате

$$0 = -g*t_{max} + v_0;$$

Время полета до верхней точки траектории

$$t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Подставим найденное значение времени в равенство для координат

$$H = x_{max} = -\frac{1}{2}*g*(\frac{v_0}{g})^2 + v_0*\frac{v_0}{g} = -\frac{1}{2}*\frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}*\frac{v_0^2}{g};$$

Получаем известный школьный результат

$$H = \frac{1}{2}*\frac{v_0^2}{g}$$

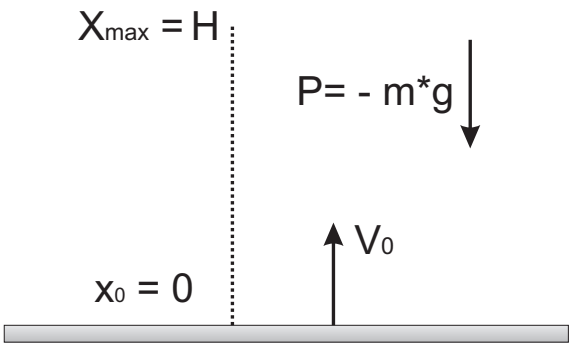
При отсутствии силы трения время полета материальной точки вверх до наивысшего состояния совпдает с временем полета тела вниз и скорость в момент приземления совпадает со скоростью вылета. Тогда скорость тела около земли при падении с высоты H равна

$$v = \sqrt{2*g*H}$$

Формула также известная. Нам необходимо было получит ее средствами интегрального исчисления, чтобы показать процесс решения дифференциальных уравнений с начальными условиями.

Падение тела с высоты H в присутствии сил трения тела о воздух.

Тело (материальная точка) падает с высоты $x_0 =$ с нулевой начальной скоростью $v_0 = 0$. Сила трения является функцией скорости $F = F(v)$. Чаще всего сила трения пропорциональна первой степени скорости $F(v) = k*v$. В представленном случае сила веса совпадает с направлением движения и поэтому берется



с плюсом, а сила трения о воздух противоположна направлению движения и отрицательна.

В данном случае задача Коши для дифференциального уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} m * \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = m * \dfrac{dv(t)}{dt} = -k * v + m * g; \\ x\,|_{t=0} = H; \\ \dfrac{dx}{dt}\,|_{t=0} = v|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

Здесь сила не является постоянной, поэтому интегрировать дифференциальное уравнение придется заново, используя скорость в качестве неизвестной величины. Разделим переменные

$$m * \frac{dv}{m * g - k * v} = -\frac{dv}{\frac{k}{m} * v - g} = -\frac{m}{k}\frac{dv}{(v - \frac{m}{k} * g)} = dt$$

Величина $A = \frac{m}{k} * g$ постоянна. Дифференциал постоянной равен нулю. Поэтому

$$\frac{dv}{v - A} = \frac{d(v - A)}{v - A} =$$
$$= \texttt{замена} \quad u = v - A = \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|v - A|$$

Таким образом интеграл от левой части уравнения дает

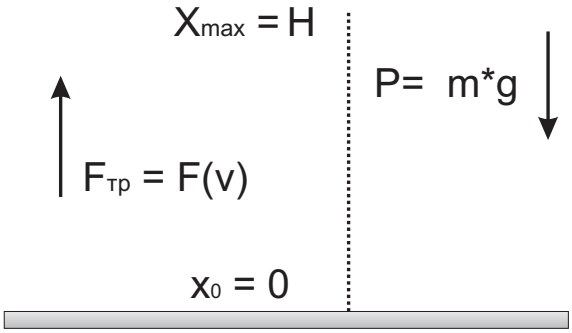
$$-\frac{m}{k} * \ln|v - \frac{m}{k} * g|$$

Элементарно вычисляется интеграл

$$\int dt = t + C_1$$

Приравнивая обе части равенства имеем

$$-\frac{m}{k} * \ln|v - \frac{m}{k} * g| = t + C_1$$



В начальный момент времени скорость является нулевой, а за счет абсолютной величины знак минус исчезает под интегралом.

$$-\frac{m}{k} * \ln(\frac{m}{k} * g) = 0 + C_1$$

Окончательно

$$-\frac{m}{k} * \ln|v - \frac{m}{k} * g| = t - \frac{m}{k} * \ln(\frac{m}{k} * g)$$

или

$$t = \frac{m}{k} * \ln(\frac{m}{k} * g) - \frac{m}{k} * \ln|v - \frac{m}{k} * g|$$

По свойствам логарифмов

$$\ln B - \ln A = \ln(\frac{B}{A}); \qquad q * \ln A = \ln A^q;$$

последнее равенство преобразуется к виду

$$\frac{k}{m} * t = \ln\left|\frac{\frac{m}{k} * g}{v - \frac{m}{k} * g}\right|$$

При малых значениях "k"вычитаемое $\frac{m}{k} * g > v$ поэтому абсолютная величина раскрывается с противоположным знаком

$$\frac{k}{m} * t = \ln\left(\frac{\frac{m}{k} * g}{\frac{m}{k} * g - v}\right)$$

Потенциируем, переходя от логарифмов к показательным функциям:

$$\frac{\frac{m}{k} * g}{\frac{m}{k} * g - v} = e^{\frac{k}{m} * t};$$

Умножим на знаменатель

$$\frac{m}{k} * g = e^{\frac{k}{m} * t} * \frac{m}{k} * g - e^{\frac{k}{m} * t} * v;$$

или

$$\frac{m}{k} * g * \left(e^{\frac{k}{m} * t} - 1\right) = e^{\frac{k}{m} * t} * v;$$

После деления на экспоненту

$$v = \frac{m}{k} * g * \left(1 - e^{-\frac{k}{m} * t}\right);$$

При больших значениях времени "t"вычитаемым можно принебречь и мы получаем *установившееся значение скорости* тела, падающего с определенной высоты.

$$v = \frac{m}{k} * g$$

Самое интересное, что от высоты падения установившееся значение не зависит, а является функцией лишь массы тела "m"и коэффициента трения о воздух "k".

Уравнения колебаний.

Простейшее уравнение колебаний. Гармонический осциллятор

Упругая сила "F"пропорциональна смещению тела "x", причем направлена против движения , так как удаление тела от точки закрепления вызывает реакцию пружины, старающейся вернуть тело в исходное положение. Поэтому для упругой пружины

$$F = -k * x$$

Размерность силы

$$\texttt{ньютон} = \texttt{н} = \frac{\texttt{кг*м}}{c^2}$$

Размерность смещения - метр. Тогда размерность коэффициента пропорциональности "k"равна

$$[k] = \frac{\texttt{кг*м}}{c^2}/\texttt{м} = \frac{\texttt{кг}}{c^2}$$

Позже мы установим каким образом образуется данный вид силы. Однако в данный момент нас интересуют только уравнения движения. Для случая пружины интегрирование носит иллюстративный характер, поэтому начальные условия большого интереса не представляют и мы запишем только второй закон Ньютона для колебаний без трения

$$m * \frac{d^2x}{dt^2} = -k * x;$$

Введем величину

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ее размерность

$$[\omega_0] = \sqrt{\frac{\frac{\texttt{кг}}{c^2}}{\texttt{кг}}} = \sqrt{\frac{1}{c^2}} = \frac{1}{c}$$

Получилась размерность частоты. В данном случае - это, так называемая *круговая частота* $\omega_0 = 2 * \pi * f$, где $f = 1/T$ - обычная частота, а параметр "T"называется периодом колебаний.

После введения круговой частоты уравнение колебаний запишется следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 * x = 0$$

Проверим, что данному уравнению удовлетворяет функция, в которой, как уже говорилось ω_0 - *круговая частота* , а φ - *фаза колебаний.*

$$x(t) = \cos(\omega_0 * t + \varphi)$$

Действительно:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0 * \sin(\omega_0 * t + \varphi) = \omega_0 * \cos(\omega_0 * t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 * \cos(\omega_0 * t + \varphi) = \omega_0^2 * \cos(\omega_0 * t + \varphi + 2 * \frac{\pi}{2}))$$

Мы специально вычислили все призводные, чтобы показать, что каждое дифференцирование вызавает изменение фазы на величину $\pi/2$. Подставив все представленные результаты в уравнение, мы получим точное равенство нулю. Точно также можно проверить возможность выбора $\sin(\omega_0 * t + \varphi)$ в качестве решения.

Затухающий гармонический осциллятор.

Сила трения, как и упругая сила действует против направления движения, замедляя его, поэтому берется она со знаком "минус". Подобно случаю с трением о воздух она пропорциональна скорости движения. Таким образом, явный вид силы трения будет таков:

$$F_{\text{трения}} = -r * \frac{dx}{dt};$$

Уравнение движения

$$m * \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{упругости}} + F_{\text{трения}}$$

преобразуется к форме

$$m * \frac{d^2x}{dt^2} + r * \frac{dx}{dt} + k * x = 0$$

Удобно поделить равенство на массу, опять введя определение $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Кроме того,новое обозначение $\beta = 2 * \frac{r}{m}$. Множитель 2 подставляется для удобства работы в дальнейшем. Уравнение переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta * \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 * x = 0$$

Общее решение уравнения ищется в виде экспоненты с неизвестным коэффициентом в показателе.

$$x(t) = A * e^{\lambda * t}$$

Первая и вторая производные от решения равны

$$\frac{dx}{dt} = \lambda * A * e^{\lambda * t};$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 * A * e^{\lambda * t};$$

Подставим функцию и ее производные в уравнение.

$$A * \left\{\lambda^2 + 2 * \beta * \lambda + \omega_0\right\} * e^{\lambda * t} = 0;$$

Множитель "A"и экспонента при нулевой правой части сократятся и останется так называемое *характеристическое уравнение.*

$$\lambda^2 + 2 * \beta * \lambda + \omega_0 = 0;$$

Видно, что оно получается при применении следующего мнемонического правила, которое Вам понадобится при прохождении курса Высшей математики:"функция x(t) переходит в $1 = \lambda^0$, ее первая производная $x'(t) \to \lambda$, а вторая

производная $x''(t) \to \lambda^2$". Для целей физики обычно хватает характеристического уравнения, представляющего собой приравненный к нулю квадратный трехчлен. Корни его определяются традиционным образом:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Затухание β считается малым по сравнению с *собственной частотой колебаний*ω_0, поэтому предыдущее выражение переписывается так:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{(-1) * (\omega_0^2 - \beta^2)}$$

Комплексный анализ часто используется в реальной физике в качестве промежуточных выкладок. В сущности, единственное, что нам понадобится - это обозначение *мнимой единицы* $i = \sqrt{-1}$. В электротехнике более привычным является символ $j = \sqrt{-1}$ однако за ее пределами "i"более предпочтительно. В результате

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i * \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)} =$$

Воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{i*\theta} = \cos\theta + i * \sin\theta$$

Тогда

$$e^{-\beta \pm i * \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)} * t} = e^{-\beta * t} * \left(\cos(\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}) * t) + i * \sin(\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}) * t\right)$$

Видно, что появление трения введет к небольшому изменению частоты колебаний, а самое главное - к их затуханию.

На рисунке показыны колебания без затухания с амплитудой $A = 10$ и частотой $\omega_0 = 2$, а также колебания с затуханием $\beta = 0.2$. С некоторой степенью условности за время затухания можно принять параметр $\tau = 1/\beta$. Разговор о различных видах энергии у нас пойдет ниже, однако сейчас, чтобы не терять связь с типом колебаний нам выгодно ввести понятие *добротности*.

$$\texttt{Добротность} = Q = \frac{\texttt{Запасенная энергия}}{\texttt{Энергия, потерянная за один период}}$$

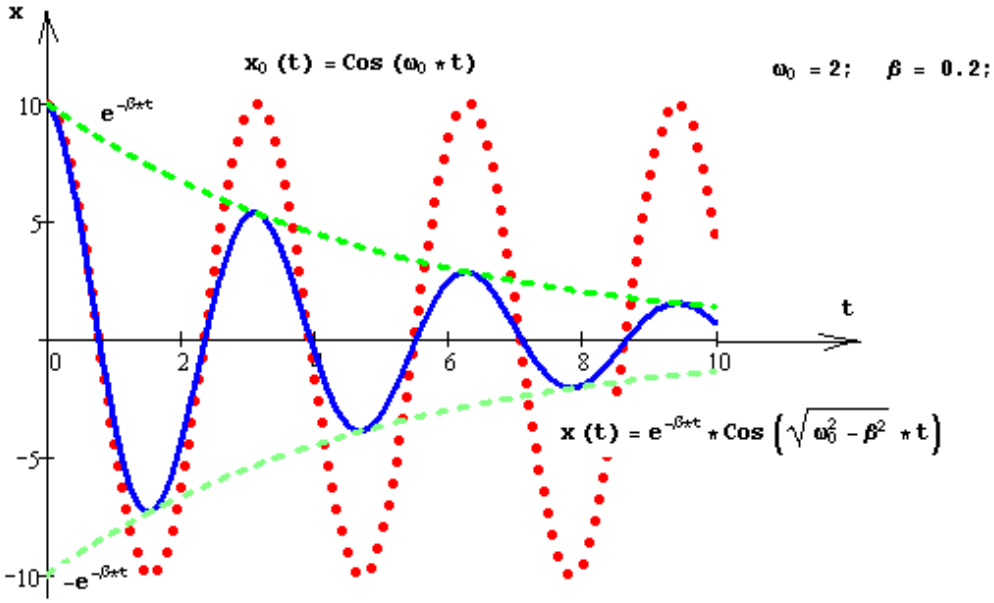
Для слабо затухающего гармонического осциллятора

$$\texttt{Добротность} = Q = \omega_0 * \tau = \frac{\omega_0}{\beta};$$

Чем затухание меньше, тем добротность больше. Значительные величины добротности означают, что за один период колебания затухают столь слабо, что первоначально запасенной энергии хватит на большое количество колебаний.

Гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания

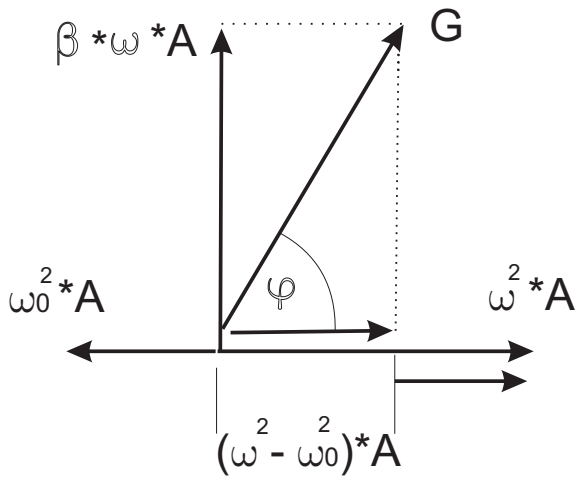
В предыдущих выкладках мы немного "кривили душой". Ясно, что без приложения внешней силы осциллятор никогда сам совершать движение не будет.



Сомнения древних физиков, которые были опровергнуты только во времена Ньютона, заключалсь в том, что они считали тело способным к движению лишь при воздействии силы. Однако это не так. Если, например, толкнуть тележку то она будет далее двигаться без внешних сил (когда трение отсутствует) , а первоначальный толчок можно исключить из внимания. Тоже самое происходит для грузика, закрепленного на пружине. Пружина растягивается (например, рукой) и в какой-то момент времени отпускается. Далее она производит колебания без внешнего воздействия и тем самым совершает *свободные колебания*, о которых говорилось выше. Однако, возможна ситуация, когда сила воздействует на осциллятор уже после того, как он запущен. В таком случае в правой части уравнения стоит не нуль, а вполне определенная функция. Легче всего рассматривается вариант, когда вынуждающая сила имеет колебательный характер, например

$$F_{\text{вынуждающая}} = F_0 * \cos(\omega * t);$$

Предполагается, что частота вынуждающей силы ω отлична от частоты соб-



ственных колебаний системы ω_0. Уравнение движения запишется в виде

$$m * \frac{d^2x}{dt^2} + r * \frac{dx}{dt} + k * x = F_{\text{вынуждающая}} = F_0 * \cos(\omega * t);$$

Поделим все слагаемые на массу и введем ранее назначенные обозначения. Кроме них добавим обозначение $G = F_0/m$. Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta * \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 * x = G * \cos(\omega * t)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде колебаний с *вынуждающей* частотой. То есть подставлять в уравнение будем не

$$x(t) = A * \cos(\omega_0 * t + \varphi)$$

как раньше, а функии и ее производные от

$$x(t) = A * \cos(\omega * t + \varphi);$$

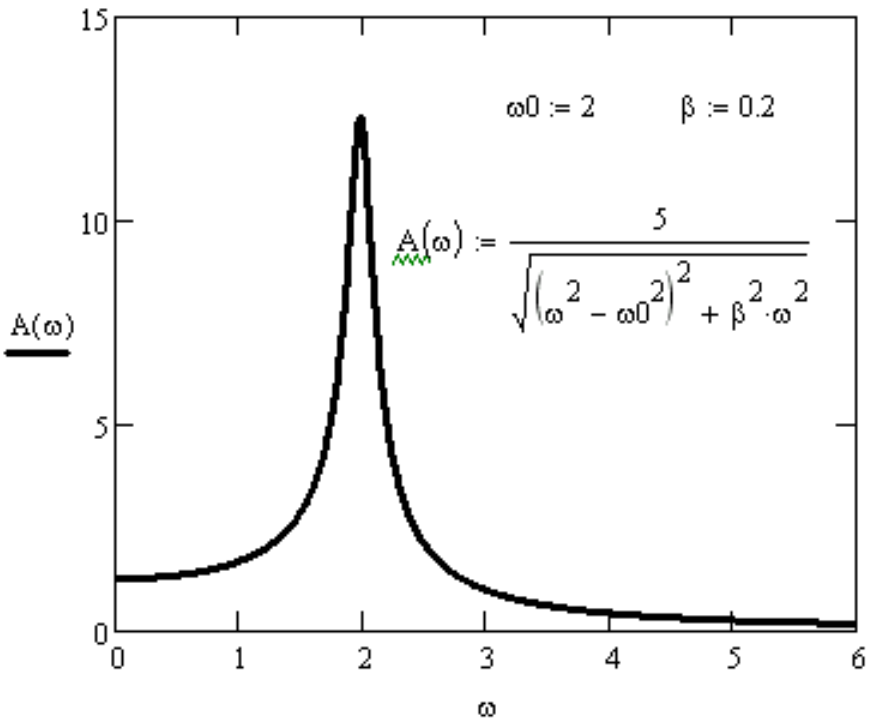
Производные имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -\omega * \sin(\omega * t + \varphi) = \omega * \cos(\omega * t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 * \cos(\omega * t + \varphi) = \omega^2 * \cos(\omega * t + \varphi + 2 * \frac{\pi}{2}))$$

Подстановка всех предыдущих выкладок в уравнение дает

$$\omega^2 * A * \cos(\omega * t + \varphi + 2 * \frac{\pi}{2})) + \beta * \omega * A * \cos(\omega * t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 * A * \cos(\omega * t + \varphi) = G * \cos(\omega * t)$$

Явно данное уравнение решить не очень трудно, но весьма громоздко. Однако существует очень красивый графический способ его решения. Мы ведь не даром отмечали отличие в фазе $\pi/2$ у каждого элемента уравнения. С учетом фаз и амплитуд слагаемых графическая диаграмма получиться следующей Длина



(норма) результирующего вектора равна с одной стороны

$$\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\beta * \omega)^2} * A$$

а, с другой стороны, равна вынуждающему ускорению G. Отсюда, величина амплитуды вынужденного колебания равна

$$A(\omega) = \frac{G}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\beta * \omega)^2}}$$

Из диаграммы также следует, что тангенс фазы вынужденного колебания, как отношение двух катетов прямоугольного треугольника, равен

$$tg(\varphi) = \frac{\beta * \omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)};$$

Как амплитуда, так и фаза становятся функциями вынуждающей частоты. Особенно это заметно по амплитуде, для которой характерно явление *резонанса*. При приближении частоты вынуждающих колебаний ω к частоте собственных колебаний системы ω_0 амплитуда принимает угрожающе большие значения.

1.3 Кинетическая и потенциальная энергия систем с одной степенью свободы.

Системой с одной степенью свободы мы будем называть систему, описываемую одним дифференциальным уравнением

$$m * \frac{d^2x}{dt^2} = f(x);$$

Как видно, время явно в данное уравнение не входит и оно зависит только от координаты. Здесь "m масса системы. "f(x) силовая функция определенного вида.

Кинетической энергией системы называется выражение

$$T = \frac{1}{2} * m * v^2 = \frac{1}{2} * m * \left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Потенциальной энергией называется интеграл от силы по пройденному пути

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$$

Знак в этой формуле выбран таким образом, чтобы потенциальная энергия тела была тем больше, чем выше тело находится.

*Полной энергией*называется сумма

$$E = T + U$$

Полная энергия движения точки сохраняется. Действительно

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T+U)}{dt} == \frac{1}{2} * m * 2 * \frac{dx}{dt} * \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dU}{dx} * \frac{dx}{dt}$$

Однако

$$\frac{dU}{dx} = -f(x)$$

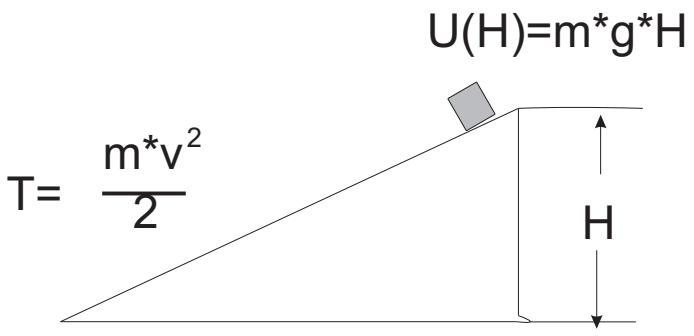
Вынося первую производную от координаты, получим

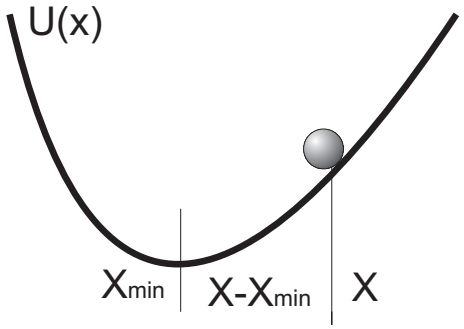
$$\frac{dx}{dt}\left(m * \frac{d^2x}{dt^2} - f(x)\right) = 0;$$

согласно исходного дифференциального уравнения.

Напомним, что мы вывели закон сохранения энергии для систем, явно не зависящих от времени. При этом говорят, что система однородна по времени.

Из закона сохранения энергии некоторые соотношения получаются легче, чем при решении дифференциальных уравнений. Например, пусть материальная точка скатывается по клину с любым углом наклона. В начале движения





полная энергия равна

$$E = m * g * H;$$

так как начальная скорость нулевая и кинетическая энергия отсутствует. В конце движения, наоборот исчезает потенциальная энергия, а кинетическая становится равной полной энергии

$$E = \frac{1}{2} * m * v^2;$$

Из равенства левых частей равны правые

$$\frac{1}{2} * m * v^2 = m * g * H$$

Масса сокращается и мы получаем формулу для скорости, которая при интегрировании дифференциальных уравнений потребовала гораздо больше усилий

$$v = \sqrt{2 * g * H}$$

Чаще всего закон сохранения энергии применяют вместе с законом сохранения импульса, но совместным использованием законов мы займемся немного позже.

Вывод закона Гука из общего вида потенциальной энергии.

Рассмотрим так называемую *"потенциальную яму"* - понятие, весьма популярное в квантовой механике. В принципе, она может быть самой обыкновенной реальной ямой, но чаще всего - это ограничения, вызванные силовым полем. Например, чем больше растягивается пружинка, тем больше энергии она запасает, стремясь вернуть точку в исходное положение, наподобие стенок естественной ямы. Разложим потенциальную энергию в ряд Тейлора в окрестности точки минимума.

$$U(x) = U(x_{min}) + U'(x_{min}) * (x - x_{min}) + \frac{1}{2} * U''(x_{min}) * (x - x_{min})^2 + ...$$

По необходимому условию экстремума

$$U'(x_{min}) = 0;$$

Обозначим

$$k = U''(x_{min})$$

Тогда

$$U(x) = U(x_{min}) + \frac{1}{2} * k * (x - x_{min})^2$$

Сила в одномерном случае равна производной потенциальной энергии. Так как производная от постоянного значения $U(x_{min})$ равна нулю, то

$$f(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2} * 2 * k * (x - x_{min}) = -k * (x - x_{min});$$

Такая зависимость, выражающая закон Гука, как мы видим верна не только для упругих тел, но для многих произвольных силовых полей, имеющих точку минимума.

1.4 Системы, однородные по координате. Закон сохранения импульса

Напомним, что второй закон Ньютона записывется следующим образом:

$$m * \frac{dv}{dt} = F;$$

Так как масса в принципе может явно зависить от времени, например, уменьшаться при сгорании топлива, то ее необходимо занести под знак производной. Кроме того, мы выразим силу через потенциальную энергию.

$$\frac{d(m * v)}{dt} = -\frac{dU}{dx};$$

Пространство называется *однородным*, если его характеристики одинаковы во всех точках. При этом потенциальная энергия не зависит от координаты и

$$\frac{dU}{dx} = 0;$$

В результате равенства нулю производной по времени сохраняется *импульс*

$$p = m * v = const;$$

Если система не изолирована, то она может быть неоднородна по одним координатам и однородна по другим. В частности, если на систему действует сила $\overrightarrow{F}$, то полный импульс системы не сохраняется. Однако сохраняется составляющая импульса в направлении, перпендикулярном силе $\overrightarrow{F}$. На этом основано решение большого числа задач.

Решим, например, такую простую задачу. Раньше, когда не было дульных тормозов сзади пушки делали земляной клин, чтобы пушка далеко не откатывалась. Пусть пушка имеет массу M, снаряд обладает массой m и вылетает со скоростью u в горизонтальном направлении. При этом пушка в результате выстрела начинает двигаться по клину. На какую высоту она поднимется ? Решение: Система орудие - снаряд не является изолированной - на нее действует вес орудия $\overrightarrow{P}$ и сила реакции Земли $\overrightarrow{N}$. Однако в горизонтальном направлении

на систему силы не действуют. Это означает, что горизонтальная составляющая импульса сохраняется. В первоначальный момент времени, когда снаряд и пушка покоились суммарный импульс равнялся нулю, следовательно после выстрела, с учетом направления скоростей

$$m * u - M * v = 0$$

Отсюда начальная скорость пушки

$$v = \frac{m}{M} * u$$

Осталось применить закон сохранения энергии

$$M * g * H = M * \frac{v^2}{2}$$

Окончательно, высота подъема пушки по склону

$$H = \frac{\left(\frac{m}{M}u\right)^2}{2 * g}$$

Формула Константина Эдуардовича Циалковского Рассмотрим движение ракеты в условиях отсутствия внешнего силового воздействия, включая трение о воздух. Общий импульс системы "ракета, летящая со скоростью v, переменной массы m и струя газа с постоянной скоростью испускания "w"остается постоянным, то есть

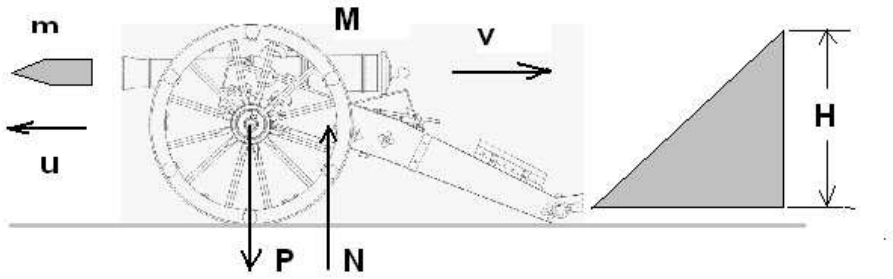
$$m * \frac{dv}{dt} + w_{\text{газа}} * \frac{dm}{dt} = 0;$$

Формально поделим на дифференциал по времени и раздели переменные, выделив элементы, содержащие массу ракеты в одну часть уравнения

$$dv = -w * \frac{dm}{m}$$

Интегрирование дает

$$v + C = -w * ln|m|;$$



В начальный момент испускания $v = 0$ и $m = m_0$, таким образом

$$C = -w * \ln|m_0|;$$

Окончательно

$$v = w * (\ln|m_0| - w * ln|m|) = w * \ln\left|\frac{m_0}{m}\right|;$$

С уменьшением массы ракеты логарифм возрастает, соответственно растет и полетная скорость ракеты.

Сейчас на данную формулу обращают не так много внимания, однако для своего времени она была по-истинне революционна. Дело в том, что наиболее вероятная скорость перемещения молекул газа далека от космической. Например, для кислорода она равна 500 $\frac{\text{м}}{c}$, для продуктов сгорания водорода в кислороде - около 3 $\frac{\text{км}}{c}$. Поэтому до начала 20 века в научной литературе была широко распространена мысль, что космические полеты невозможны. Только появление формулы Циалковского опровергло эту мысль. Однако логарифм - очень медленно растущая функция. Имея исходную скорость газов $w = 3\frac{\text{км}}{c}$ и конечную первую космическую скорость $v = 8\frac{\text{км}}{c}$ мы получим после потенциирования

$$m_{\text{стартовая}} = e^3 * m_{\text{выхода на орбиту}} = 20 * m_{\text{выхода на орбиту}};$$

Другими словами, при массе космического корабля в 5 тонн, стартовая масса ракеты - около 100 тонн, и это без учета дополнительных потерь энергии.

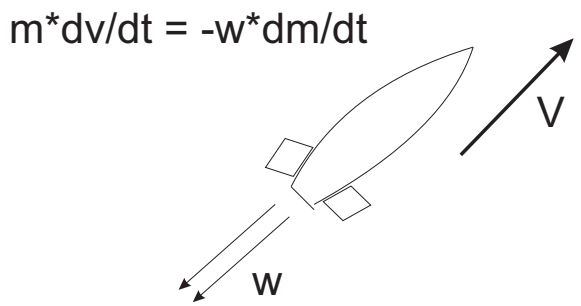
1.5 Центр инерции. Лабораторная система отсчета и система центра инерции.

В общем, векторном варианте, импульс системы выражается через массы m_j и скорости v_j точек следующим образом:

$$\overrightarrow{P} = \sum m_j * \overrightarrow{v_j};$$

где суммирование ведется по всем точкам системы.

Импульс замкнутой механической системы имеет различные значения по отношению к различным инерциальным системам отсчета. Систему, которую мы считаем покоящейся, называют *"лабораторной системой координат"*. Реально таких систем не существует (например, то что относится к якобы покоящимся



предметам на Земле, проносится с огромной скоростью в пространстве вместе с планетой. Однако, опыт и идеализация позволяют эти системы выделить. Коротко лабораторные системы называются "л-системами"и обозначаются без штриха. Возьмем подвижную систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью $\overrightarrow{V}$ относительно неподвижной системы. Все параметры, относящиеся к подвижной системе отмечаются штрихом. По преобразованию Галлилея скорости каждой точки связаны в представленных системах координат равенством

$$\overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{v'_j} + \overrightarrow{V}\,;$$

Поэтому связь между значениями импульсов системы в представленных системах дается формулой

$$\overrightarrow{P} = \sum m_j * \overrightarrow{v_j} = \sum m_j * \overrightarrow{v'_j} + \overrightarrow{V} * \sum m_j\,;$$

или

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P'} + \overrightarrow{V} * \sum m_j\,;$$

Подбирем такую подвижную систему отсчета K', чтобы в ней полный импульс системы $\overrightarrow{P'}$ обращался в нуль. Как следует из предыдущего равенства

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{V} * \sum m_j\,;$$

что позволяет определить скорость подвижной системы

$$\overrightarrow{V} = \frac{\overrightarrow{P}}{\sum m_j} = \frac{\sum m_j * \overrightarrow{v_j}}{\sum m_j}$$

Правая сторона формулы может быть представлена как производная по времени от выражения

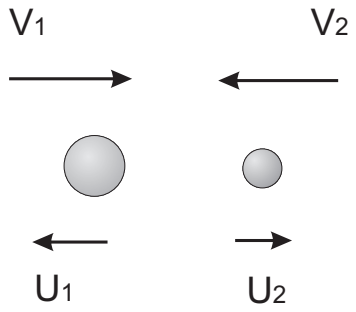
$$\overrightarrow{R} = \frac{\sum m_j * \overrightarrow{r_j}}{\sum m_j}$$

Точку, радиус-вектор которой определяется по данному соотношению называют *центром инерции системы*, а систему координат с началом в представленной точке называю *"системой центра инерции"* или "ц-системой". В "ц-системе"формулировка многих законов механики заметно упрощается.

Задача. Шар массой m_1 движется со скоростью v_1 и сталкивается с шаром массой m_2, движущемся навстречу ему со скоростью v_2.Каковы скорости шаров u_1 и u_2 после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

Решение. Существует два способа решения данной задачи. Один способ, чисто математический, заключается в решении системы уравнений, первое из которых представляет собой закон сохранения импульса, а второе - закон сохранения кинетической энергии системы шаров. Система запишется следующим образом

$$\begin{cases} m_1 * v_1 + m_2 * v_2 = m_1 * u_1 + m_2 * u_2; \\ \frac{1}{2}\, m_1 * v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 * v_2^2 = \frac{1}{2}\, m_1 * u_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 * u_2^2 \end{cases}$$



В общем виде данную систему решить трудно, поэтому мы подставим значения, например, следующие:

$$m_1 = 1\text{кг}; \quad v_1 = 4\,\frac{\text{м}}{c};$$
$$m_2 = 2\text{кг}; \quad v_1 = 3\,\frac{\text{м}}{c};$$

В результате получиться система

$$\begin{cases} 1*4+2*3 = 1*u_1+2*u_2; \\ \frac{1}{2}\,1*4^2+\frac{1}{2}\,2*3^2 = \frac{1}{2}\,1*u_1^2+\frac{1}{2}\,2*u_2^2 \end{cases}$$

Сократим последнюю строку на $\frac{1}{2}$ и проведем необходимые действия:

$$\begin{cases} u_1+2*u_2 = 10; \\ u_1^2+2*u_2^2 = 34 \end{cases}$$

Из первой строки

$$u_1 = 10-2*u_2;$$

Подставим это значение во вторую строку:

$$100-40*u+4*u^2+2*u^2 = 34$$

Здесь, для удобства выкладок $u_2 = u$. Возникает квадратное уравнение:

$$6*u^2-40*u+66 = 0$$

или, после сокращения на 2

$$3*u^2-20*u+33 = 0;$$

Его корни

$$u_{1,2} = \frac{10\pm\sqrt{100-3*33}}{3} = \frac{10\pm 1}{3}$$

В принципе, физическая сущность задачи не накладывает никакие ограничения на эти корни, поэтому подходят оба корня. Однако второй корень

$$u = \frac{10-1}{3}\,\frac{\text{м}}{c} = 3\,\frac{\text{м}}{c}$$

в точности совпадает по значению с первоначальной скоростью второго шара. Поэтому в качестве решения квадратного уравнения мы возьмем первый корень

$$u = \frac{10+1}{3}\,\frac{\text{м}}{c} = \frac{11}{3}\,\frac{\text{м}}{c}$$

Осталось из закона сохранения импульса определить скорость первого шара после столкновения

$$u_1 = 10 - 2 * u_2 = 10 - 2 * \frac{11}{3} = \frac{8}{3}\,\frac{\text{м}}{c};$$

Решение задачи в системе центра масс. В первую очередь определим скорость центра масс

$$V_{\text{цм}} = \frac{m_1 * v_1 + m_2 * v_2}{m_1 + m_2} = \frac{1*4+2*3}{1+2}\frac{\text{м}}{c} = \frac{10}{3}\frac{\text{м}}{c}$$

Заметим, что направление скорости центра масс совпадает с направлением оси Ox. Исходные скорости части частиц в системе центра масс с учетом направления скоростей равны:

$$v_{1\,\text{цм}} = (4 - \frac{10}{3})\frac{\text{м}}{c} = \frac{2}{3}\frac{\text{м}}{c}$$
$$v_{2\,\text{цм}} = (-3 - \frac{10}{3})\frac{\text{м}}{c} = -\frac{19}{3}\frac{\text{м}}{c}$$

Совместная кинетическая энергия двух шаров до столкновения в системе центра масс равна

$$\frac{1}{2}\left(m_1 v_{1\,\text{цм}}^2 + m_1 v_{1\,\text{цм}}^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 * \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 * \left(-\frac{19}{3}\right)^2\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{8+361}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{369}{9}\right)\frac{\text{кг} * \text{м}^2}{c^2}$$

В системе центра масс, как мы установили выше в теоретических выкладках импульс системы равен нулю, поэтому

$$m_1 * u_{1\,\text{цм}} + m_2 * u_{2\,\text{цм}} = 0;$$

Другими словами, в системе центра масс частицы движутся в разные стороны с пропорциональными скоростями:

$$m_1 * u_{1\,\text{цм}} = -m_2 * u_{2\,\text{цм}};$$

В нашем варианте

$$1 * u_{1\,\text{цм}} = -2 * u_{2\,\text{цм}};$$

В результате кинетическая энергия шаров после столкновения в системе центра масс равна

$$\frac{1}{2} * \left(m_1 * u_{1\,\text{цм}}^2 + m_2 * u_{2\,\text{цм}}^2\right) = \frac{1}{2} * \left(1 * (-2 * u_{2\,\text{цм}})^2 + 2 * u_{2\,\text{цм}}^2\right) = \frac{1}{2} * 6 * u_{2\,\text{цм}}^2;$$

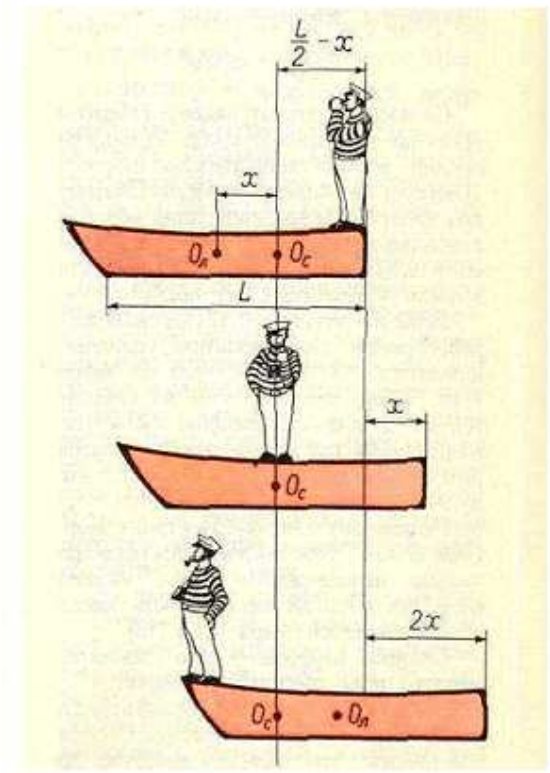
Приравняем кинетические энергии до и после столкновения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{369}{9}\right)\frac{\text{кг} * \text{м}^2}{c^2} = \frac{1}{2} * 6 * u_{2\,\text{цм}}^2$$

Отсюда

$$6 * u_{2\,\text{цм}}^2 = \frac{369}{9}$$

Решим следующую задачу. (журнал "Квант", 1972, номер 3, стр. 58, Зайцев И.А., "Импульс. Закон сохранения импульса."). Человек массы m находится на корме лодки массы M, стоящей в пруду. Длина лодки L. На сколько сдвинется лодка относительно берега, если человек перейдет с кормы лодки на нос ?



Решение. Так как в горизонтальном направлении на систему лодка-человек силы не действуют, положение ее центра масс должно сохраняться. Но положение центра масс системы определяется положением центра масс лодки и человека.Где находится центр масс объединенной системы "лодка-человек мы не знаем. Поэтому будем считать, что он находится в точке O_c, отстоящей от центра масс лодки $O_л$, на расстояние "x". Значение "x"мы определим из закона сохранения момента силы (см. верхний рисунок)

$$M * x = m * (\frac{L}{2} - x)$$

После выкладок

$$x = \frac{m}{2 * (m + M)} * L$$

Когда человек окажется на середине лодки (см. средний рисунок), то очевидно он пройдет путь x - то есть расстояние до центра. Когда человек перейдет с кормы лодки на ее середину, то, очевидно, положение его центра масс совпадет с положением центра масс системы (см. средний рисунок). Следовательно, и положение центра масс лодки должно также совпадать с положением центра масс масс системы, то есть лодка должна переместиться на "x". На такое же расстояние переместится лодка при переходе человека на нос. Таким образом, полное перемещение лодки

$$2 * x = \frac{m}{m+M} * L$$

Решение, предложенное автором статьи можно дублировать еще одним, более естественным решением.

Решение задачи 2

Пусть "z расстояние от центра масс лодки до какой-либо точки, например, до берега. "y расстояние кормы, на которой находится человек, до центра масс лодки. "L длина лодки. "x искомое расстояние, которое проплывет лодка, когда человек перейдет с кормы на нос. Так как до перемещения человека система "лодка-человек"покоилась, то при всех последующих операциях центр тяжести этой объединенной системы должен оставаться на одном и том же месте, при отсутствии внешних воздействий. Координата цента тяжести системы до начала движения равна

$$Z_0 = \frac{M * z + m * (z + y)}{M + m}$$

Координата центра тяжести системы после перехода человека с носа на корму характеризуется следующими изменениями:

к координате центра тяжести лодки прибавиться велечина смещения лодки и мы вместо "z"получим $(z + x)$.

старое положение человека "y"по отношению к центру тяжести лодки не измениться - так как это измерение, проводимое внутри лодки. Однако, при смещении на нос из этой координаты вычтется длина лодки "L".

В результате "новая"координата центра тяжести системы станет равной

$$Z_0 = \frac{M * (z + x) + m * ((z + x) + y - L)}{M + m}$$

Как мы уже сказали, из-за замкнутости системы "новая"координата совпадает со старой. Знаменатель в обеих формулах одинаков, поэтому на него равенство сразу можно сократить и останется

$$M * z + m * (z + y) = M * z + m * (z + y) + M * x + m * x - m * L$$

После приведения подобных членов

$$x = \frac{m}{m+M} * L$$

Результаты двух различных способов решений совпадают.

1.6 Изотропные пространства. Закон сохранения момента импульса

Изотропность пространства относительно какой-либо оси вращения означает, что свойства замкнутой системы не меняются при ее повороте как целого относительно данной оси. Тогда величина

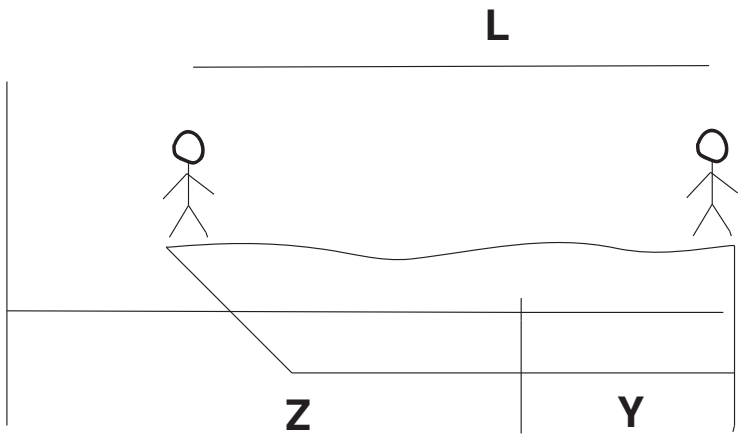
$$m * v * r = const;$$

В трехмерном пространстве момент импульса точки определяется через векторное произведение.

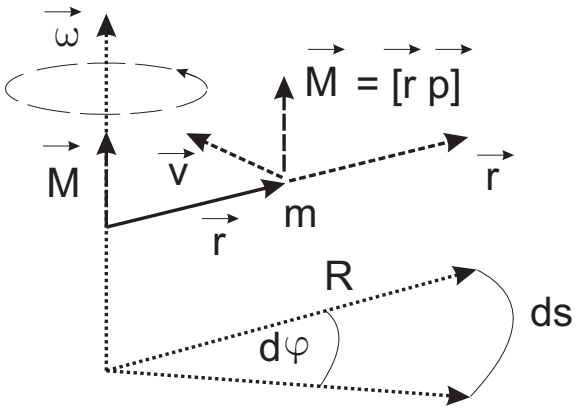
$$\overrightarrow{M} = [\overrightarrow{r}, m * \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}]$$

Напомним, что результат векторного произведения перпендикулярен к каждому из составляющих векторов и его направление определяется "правилом буравчика". где $\overrightarrow{p}$ - импульс точки Покажем, что в простейшем, показанном на рисунке случае модуль момента импульса совпадает с первоначальной простой формулой.Модуль векторного произведения по определению равен

$$M = r * (m * v) * \sin\theta;$$



Z + X



В случае простейшего движения скорость перпендикулярна к радиус-вектору материальной точки и $\theta = \pi/2$. Значит $\sin\theta = 1$ и первоначальная формула верна.

1.7 Энергия вращения твердого тела. Моменты инерции.

Вспомним, что линейная скорость точки выражается через угловую скорость ω и ее расстояние до оси "R"следующим образом:

$$v = R * \omega$$

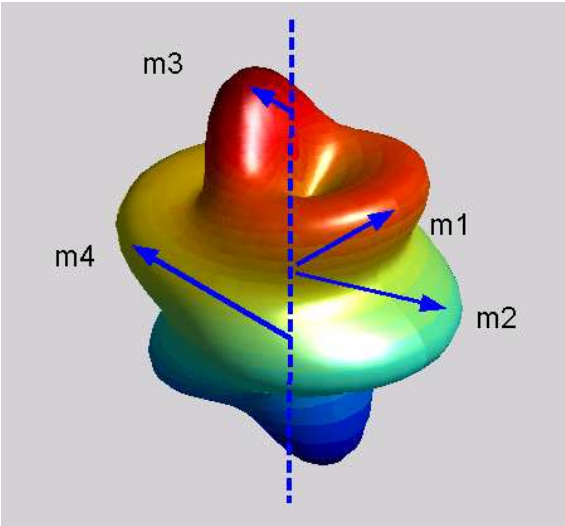
Подставим это значение скорости в определение кинетической энергии.

$$T = \frac{m * v^2}{2} = \frac{(m * R^2) * \omega^2}{2}$$

Как видно, величина

$$J = m * R^2$$

назваемая *моментом инерции материальной точки*, заменяет собой массу в обучном уравнении энергии в случае вращательного движения. Конечно, для одной материальной точки вводить момент инерции не было особой необходимости, однако тела имеют различную конфигурацию, и подобные показатели для различных фигур имеют существенно разные характеристики. Момент инерции



сложного тела получается суммированием моментов инерции его индивидуальных точек. То есть для сложного тела

$$\sum_{\text{по всем точкам}} m_j * R_j^2$$

В непрерывных телах суммирование переходит в интегрирование - однако это уже ближе к математике, чем к физике. Моменты инерции относительно простых тел приведены далее (рисунки тел и формулы к ним взяты из MathCad

- справочные таблицы). Самое главное, что понятно с точки зрения физики - что моменты инерции зависят от свойств симметрии тела и от расположения оси, относительно которой момент инерции определяется.Вообще говоря моменты инерции твердого тела образуют матрицу из 9 величин (матрица 3*3). Дело в том, что при общем рассмотрении угловая скорость имеет три прекции - угловая скорость вращения вокруг оси oX, угловая скорость вращения относительно оси oY и аналогично относительно oZ. И каждой проекции угловой скорости соответствуют три проекции момента инерции. Однако для симметричных тел картина заметно упрощается.

Задача. При какой скорости автомобиль, движущийся по дуге окружности радиуса $R - 130$ метров может опрокинуться? Центр тяжести автомобиля находится на высоте $h = 1$ метр над дорогой, ширина следа автомобиля $L = 1.5$ метра. *Решение.* В момент опрокидования автомобиля как сила реакции дороги N, так и сила трения $F_{\text{тр}}$ приложены к "внешнему"колесу (так как "внутреннее"уже начинает отрываться от дороги и с ней уже не сцеплена). При движении автомобиля по окружности центробежная сила уравновешена силой трения:

$$\frac{m * v^2}{R} = F_{\text{тр}}$$

Центробежная сила при этом создает момент, опрокидывающий автомобиль во внешнюю сторону

$$\frac{m * v^2}{R} * h$$

Максимальный момент силы реакции дороги $N = m * g$ относительно центра тяжести равен

$$m * g * \frac{L}{2}$$

(в момент опрокидывания сила реакции проходит, как сказано выше, через внешнее колесо). Приравнивая эти моменты, найдем уравнение для максимальной скорости, при которой автомобиль еще не опрокидывается:

$$\frac{m * v^2}{R} * h = m * g * \frac{L}{2}$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{g * L * R}{2 * h}} \approx 30\frac{\text{м}}{c} \approx 110\frac{\text{км}}{\text{час}}$$

Задача Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью $v = 70$ км/час, делая поворот радиусом $R = 100$ метров. На какой угол α к горизонту он должен при этом наклониться, чтобы не упасть?

*Решение.*Сила трения между мотоциклом и дорогой

$$F_{\text{тр}} = \frac{m * v^2}{2}$$

так как она уравновешивает центробежное ускорение.Сила реакции дороги

$$N = m * g$$

Условие равенства силы трения и силы реакции относительно центра тяжести дает уравнение

$$F_{\text{тр}} * L * \sin\alpha = N * L * \cos\alpha$$

где L - расстояние OA от центра тяжести до следа мотоцикла. Подставляя сюда $F_{\text{тр}}$ и N, находим, что

$$tg(\alpha) = \frac{g * R}{v^2}$$

откуда

$$\alpha = arctg\left(\frac{g * R}{v^2}\right) \approx 70^\circ$$

Отметим, что равнодействующая сил N и $F_{\text{тр}}$ при этом угле наклона мотоцикла проходит через центр тяжести, что и обеспечивает равенство нулю суммарного момента сил N и $F_{\text{тр}}$.

Задача. Железная дорога проходит так, как показано на рисунке. Какой участок пути подвергается наибольшему разрушению при движении поездов?

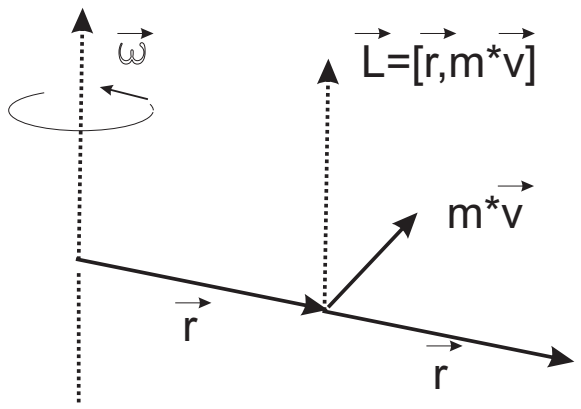
Решение

1.8 Момент количества движения. Момент силы

Для одной точки *моментом количества движения* называется *векторное произведение*

$$\overrightarrow{L} = [\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}]$$

где $\overrightarrow{p} = m * \overrightarrow{v}$ - момент импульса точки. Посмотрим, что направление момента количества движения совпадает с направлением угловой скорости Если



тело вращается вокруг фиксированной оси, то модуль момента импульса можно выразить через момент инерции точки $J = m * r^2$ и угловую скорость $\omega = \frac{v}{r}$. Именно:

$$L = r * m * v = r^2 * m * \frac{v}{r} = (m * r^2) * \omega = J * \omega;$$

где$J = m * r^2$ - момент инерции точки относительно оси вращения.

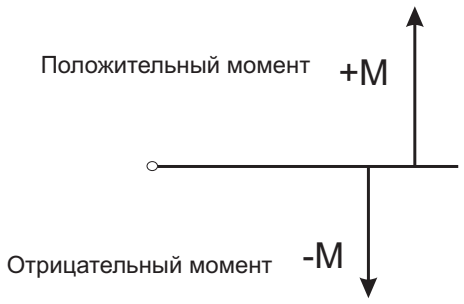
Суммирование по всем точкам не данное выражение, так как все точки тела вращаются относительно оси с одной и той же угловой скоростью. Поэтому для любого тела, имеющего момент инерции J (а не только для материальной точки) и вращающегося вокруг фиксированной оси с угловой скоростью ω момент импульса по модулю равен

$$L = \sum_{\text{по всем точкам}} (m_j * r_j^2) * \omega = J * \omega;$$

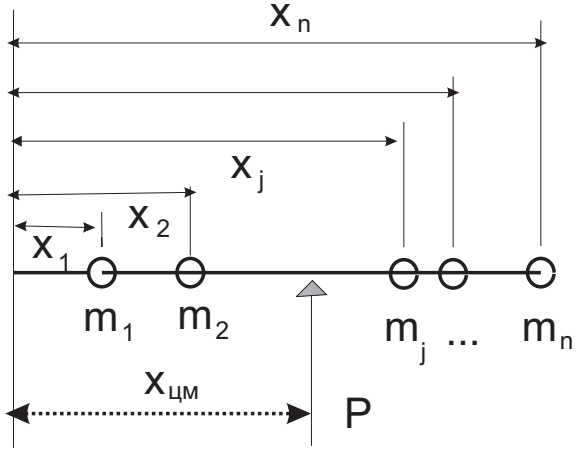
Момент силы - это *векторное произведение*

$$\overrightarrow{M} = [\overrightarrow{r}, \overrightarrow{F}]$$

Данное определение является обобщением школьной формулы, которая выражает момент силы через произведение длины рычага на силы (или как говорят "силы на плечо"). В простейшем варианте вращения вокруг точки или вокруг оси момент силы считается положительным, если он вращает тело против часовой стрелки и отрицательным, если он стремиться вращать тело по часовой стрелке.



Воспользуемся равенством для момента силы для нового способа вывода формулы центра тяжести. Пусть массы m_j находятся на одной прямой на расстоянии x_j от начала координат. Центр тяжести тела - это точка, в которой необходимо приложить полный вес всех материальных точек, чтобы тело находилось в равновесии. Момент силы тяжести каждой материальной точки M_j



естественно, взятый по модулю - это

$$M_j = (m_j * g) * x_j$$

где g - ускорение свободного падения Общий момент всех точек относительно начала координат

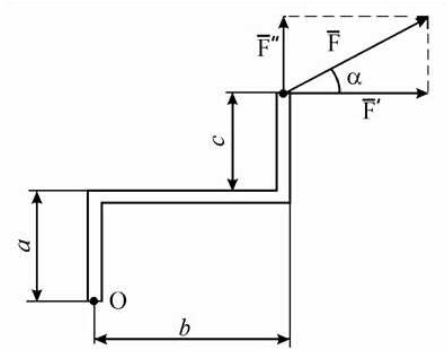
$$M = \sum_{j=1}^{n} (m_j * g) * x_j$$

По принятому выше соглашению этот момент отрицателен. Сила, противоположная силе веса всех точек, наоборот создает положительный момент

$$M = P * x_{\text{цт}} = \left(\sum m_j\right) * g * x_{\text{цт}}$$

Приравняем моменты между собой и сократим тождество на g. Вновь получим формулу координаты центра тяжести тела.

Теорема Вариньона



Пример . Жесткая рама ADCB имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B Ц подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: F = 25 кН, a = 60ѳ, P = 18 кН, g = 75ѳ, M = 50 кН?м, b = 30ѳ, a = 0,5 м. Определить: реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на раму силы: силу , пару сил с моментом M, натяжение троса (по модулю T = P) и реакции связей , , (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

1.9 Основной закон динамики вращательного движения

Продифференцируем момент импульса материальной точки по времени. Получим

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \frac{d[\overrightarrow{r}, m * \overrightarrow{v}]}{dt} = \left[\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}, m * \overrightarrow{v}\right] + \left[\overrightarrow{r}, m * \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right] =$$
$$= [\overrightarrow{v}, m * \overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{r}, m * \overrightarrow{a}] = 0 + [\overrightarrow{r}, \overrightarrow{F}] = \overrightarrow{M};$$

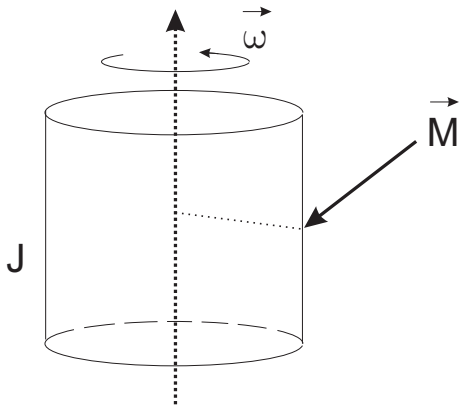
Мы воспользовались тем, что векторное произведение вектора самого на себя $[\overrightarrow{v}, m * \overrightarrow{v}] = m * [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}] = 0$ равно нулю. На примере одной материальной точки мы получаем *основное уравнение вращательного движения*, аналогичное второму закону Ньютона для поступательного движения

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{M}$$

Ранее мы вывели момент импульса для абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг оси. Для такого тела закон динамики вращательного движения выглядит так:

$$J * \frac{d\omega}{dt} = M$$

Рассмотрим простейшую задачу замедления тела моментом силы. Пусть момент M действует против вращения. Тогда уравнение движение принимает вид



$$J * \frac{d\omega}{dt} = -M;$$

Интегрируем данное уравнение один раз

$$J * \omega = -M * t + C$$

Начальная угловая скорость $\omega(t = 0) = \omega_0$. Подставим начальные условия в предыдущее равенство

$$J * \omega_0 = 0 + C$$

Окончательно

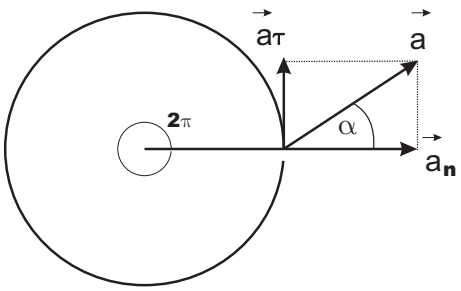
$$J * (\omega_0 - \omega) = M * t$$

В момент остановки $\omega = 0$, что дает

$$J * \omega_0 = M * t_{\text{остановки}}$$

Задача 2. Материальная точка начинает двигаться по окружности с постоянным по величине тангенциальным ускорением. Чему будет равен угол между вектором полного ускорения и радиусом, когда точка сделает полный оборот.

Решение. Введем традиционные обозначения a_τ - тангенциальное (касательное) ускорение, a_n - нормальное ускорение, ω - угловая скорость материальной точки, R - радиус окружности, t - текущее время, T - время, за которое точка сделала полный оборот, α - искомый угол между вектором полного ускорения и радиусом, когда точка сделает полный оборот. По определению



тангенциального ускорения

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

где v - линейная скорость точки, движущейся вдоль окружности. По условию задачи тангенциальное ускорение постоянно. Следовательно

$$\frac{dv}{dt} = A$$

где A - постоянная величина касательного ускорения. Разделим переменные

$$dv = A * dt$$

Интегрируем, используя формулу $\int dx = x + C$. В результате

$$\int dv = v; \quad \int A\,dt = A * t + C;$$

Значение скорости

$$v = v(t) = A * t + C$$

Будем считать, что в начале движения тело покоилось, то есть $v(t = 0) = 0$. После подстановки в последнее уравнение $v(t = 0) = 0 = A * 0 + C$. Отсюда $C = 0$ и линейная скорость материальной точки равна

$$v = A * t$$

Используем формулу, связывающую угловую скорость ω с линейной

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Получаем значение угловой скорости материальной точки

$$\omega = \frac{A * t}{R}$$

Вспомним, что по определению угловая скорость - это первая производная от угла вращения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

С учетом предыдущих результатов

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A * t}{R}$$

Разделим переменные

$$d\varphi = \frac{A * t}{R} * dt$$

и проинтегрируем, воспользовавшись табличным значением интеграла $\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C$ Величина угла

$$\varphi = \varphi(t) = \frac{A * t^2}{2 * R} + C_1$$

Начальное значение угла - нулевое, то есть $\varphi(t = 0) = 0$, что при подстановке в момент времени $t = 0$ в предыдущее равенство дает

$$\varphi(t = 0) = 0 = \frac{A * 0^2}{2 * R} + C_1 = 0 + C_1$$

Произвольная постоянная $C_1 = 0$ и формула для угла под которым видна материальная точка имеет вид

$$\varphi = \varphi(t) = \frac{A * t^2}{2 * R};$$

В момент времени $t = T$ материальная точка завершает полный оборот, то есть $\varphi = 2 * \pi$. Поэтому

$$2 * \pi = \frac{A * T^2}{2 * R};$$

Отсюда

$$T^2 = \frac{4 * \pi * R}{A};$$

Для определения искомого угла α нам понадобится значение нормального ускорения. Нормальное ускорение направлено вдоль радиуса и равно

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Подставим в эту формулу величину линейной скорости, найденную выше

$$a_n = \frac{(A * t)^2}{R} = \frac{A^2 * t^2}{R}$$

В момент, когда точка сделала полный оборот

$$a_n = \frac{A^2 * T^2}{R} = \frac{A^2 * \frac{4*\pi*R}{A}}{R} = 4 * \pi * A;$$

Тангенс угла между вектором полного ускорения и радиусом, когда точка сделает полный оборот - это тангенс угла α между тангенциальным и нормальным ускорением:

$$tg\,\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{A}{4*\pi*A} = \frac{1}{4*\pi} = 0.08;$$

С помощью калькулятора вычислим искомый угол

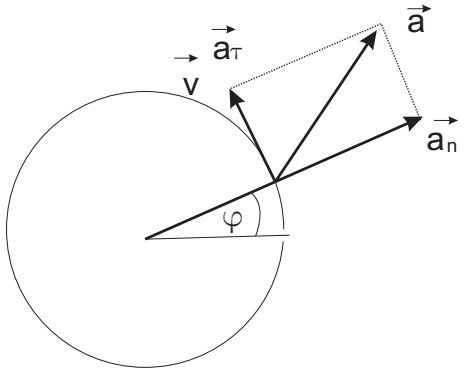
$$\alpha = arctg(0.08) = 0.08\,\texttt{радиана}$$

или $4.55°$

Ответ. Угол между вектором полного ускорения и радиусом, когда точка сделает полный оборот $\alpha = 0.08$ радиана.

Задача 3. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha * t$, где $\alpha = 2*10^{-2}\frac{\text{рад}}{c^3}$. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $60°$ с вектором ее скорости.

Решение. Обозначения a_τ - тангенциальное (касательное) ускорение, a_n - нормальное ускорение, ω - угловая скорость материальной точки, ε - угловое ускорение, R - радиус окружности, t - текущее время, $\alpha = 60°$ - угол между полным ускорением и скоростью. Кроме того, t_0 - искомый момент времени.
Решение. Как видно из рисунка, угол между полным ускорением и скоростью



материальной точки - это угол α между полным ускорением $\overrightarrow{a}$ и тангенциальным (касательным) ускорением $\overrightarrow{a_\tau}$. Полное ускорение есть результирующая нормального ускорения a_n и тангенциального ускорения a_τ. Вычислим каждое из этих ускорений. По определению угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

где ω - угловая скорость материальной точки. По условию задачи

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha * t;$$

Разделим переменные

$$d\omega = \alpha * t * dt$$

Интегрируем, воспользовавшись табличной формулой $\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C$. Получим

$$\omega = \omega(t) = \frac{\alpha * t^2}{2} + C;$$

Угловая скорость в начальный момент времени равна нулю:$\omega(t = 0) = 0$, откуда

$$\omega(0) = 0 = \frac{\alpha * 0^2}{2} + C = 0 + C;$$

и $C = 0$. Таким образом, получено выражение для угловой скорости точки:

$$\omega = \omega(t0 = \frac{\alpha * t^2}{2};$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega * R)^2}{R} = \omega^2 * R;$$

После подстановки угловой скорости в последнюю формулу нормальное ускорение равно

$$a_n = \left(\frac{\alpha * t^2}{2}\right)^2 * R = \frac{\alpha^2 * t^4}{4} * R;$$

По определению тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{d(\omega * R)}{dt} = R * \frac{d\omega}{dt} = R * \varepsilon;$$

Если использовать данные условия задачи $\varepsilon = \alpha * t$, то

$$a_\tau = R * \alpha * t;$$

Из рисунка

$$tg\,\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\frac{\alpha^2 * t^4}{4} * R}{\alpha * t * R} = \frac{\alpha * t^3}{4};$$

По таблицам тригонометрических функций $tg\,\alpha = tg\,60^\circ = \sqrt{3}$. Таким образом,

$$t_0^3 = \frac{4 * \sqrt{3}}{\alpha} = \frac{4 * \sqrt{3}}{2 * 10^{-2}\frac{1}{c^3}} = 200 * \sqrt{3}\,c^3$$

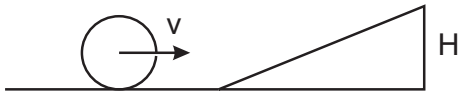
Как мы видим размерность получилась правильной - слева и справа в формуле стоят секунды в кубе. Извлечем корень третьей степени

$$t_0 = \sqrt[3]{200 * \sqrt{3}}\,c = \sqrt[3]{346.41}\,c = 7.02\,c;$$

Ответ: Вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол 60° с вектором ее скорости через $t_0 = 7.02\,c$.

Задача 4. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью $7.2\frac{\text{км}}{\text{час}}$. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии. Уклон горки 10 метров на каждые 100 метров пути.

Решение. Кинетическая энергия состоит из энергии его поступательного движения и энергии вращения и оба этих типа энергиии уходят на подъем обруча по уклону. Масса обруча равна m, радиус обруча - R.



Кинетическая энергия обруча, как обычно, равна

$$T = \frac{m * v^2}{2};$$

Энергия, затрачиваемая на вращение обруча равна

$$T_{\text{вр}} = \frac{J * \omega^2}{2};$$

Здесь $J = m * R^2$ - момент инерции обруча. В случае движения обруча без проскальзывания

$$\omega = \frac{v}{R}$$

где v - линейная скорость центра обруча. Подставляя момент инерции и угловую скорость в формулу энергии вращения, получим:

$$T_{\text{вр}} = \frac{m * R^2 * \left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} == \frac{m * v^2}{2}$$

Итак, полная энергия, запасенная катящимся обручем

$$T + T_{\text{вр}} = \frac{m * v^2}{2} + \frac{m * v^2}{2} = m * v^2;$$

Эта энергия уходит на подъем обруча по склону. Потенциальная энергия обруча после подъема равна

$$U = m * g * H$$

где g - ускорение свободного падения. Из закона сохранения энергии

$$m * v^2 = m * g * H;$$

После сокращения на массу m мы определим высоту подъема H.

$$H = \frac{v^2}{g};$$

Чтобы найти высоту численно прежде всего запишем линейную скорость обруча в единицах измерения системы СИ.

$$7.2\,\frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{7.2 * 1000}{3600}\,\frac{\text{м}}{c} = 2\,\frac{\text{м}}{c}\,;$$

Тогда высота подъема

$$H = \frac{4\frac{\text{м}^2}{c^2}}{9.8\frac{\text{м}}{c^2}} = 0.408\,\text{м};$$

Определим горизонтальную составляющую пути, пройденную обручем. Для этого составим пропорцию

$$10\text{м высоты} \to 100\text{м горизонтального пути}$$
$$0.408\text{м высоты} \to x\text{м горизонтального пути}$$

Отсюда

$$x = \frac{100 * 0.408}{10} = 4.08\text{м};$$

По теореме Пифагора найдем путь, который обруч пройдет по уклону

$$s = \sqrt{0.408^2 + 4.08^2}\,\text{м} = 4.1\text{м}$$

Ответ. Обруч пройдет по уклону 4.1 метра.

.

Задача. Частица движется со скоростью

$$\overrightarrow{v} = t * (5 * \overrightarrow{i} + 3 * \overrightarrow{j} + 4 * \overrightarrow{k})\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Найти путь, пройденный частицей с момента времени $t_1 = 2c$ до момента $t_2 = 3c$.

Решение. Определим траекторию движения, проинтегрировав вектор скорости по времени. Чтобы это сделать, необходимо проинтегрировать каждую компоненту вектора. Например, для компоненты вдоль оси Ох имеем

$$\int 5 * t\,dt = 5 * \frac{t^2}{2} + x_0;$$

Таким образом, радиус - вектор траектории описывается следующим равенством:

$$\overrightarrow{r} = \left(\frac{t^2}{2}\right) * (5 * \overrightarrow{i} + 3 * \overrightarrow{j} + 4 * \overrightarrow{k}) + \overrightarrow{r_0};$$

где $\overrightarrow{r_0}$- некоторый начальный вектор. Направление движения частицы не меняется, так как при изменении текущего времени t пропорции между компонентами направляющего вектора

$$5 * \overrightarrow{i} + 3 * \overrightarrow{j} + 4 * \overrightarrow{k}$$

не изменяются. Другими словами, частица движется по прямой, вдоль данного направления. Из-за прямолинейности движения пройденный путь равен модули разности радиуса вектора в конечный и начальный моменты времени

$$s = |\overrightarrow{r(t_2)} - \overrightarrow{r(t_1)}|$$

или

$$s = \left|\left(\left(\frac{t_2^2}{2}\right) * (5 * \overrightarrow{i} + 3 * \overrightarrow{j} + 4 * \overrightarrow{k}) + \overrightarrow{r_0}\right) - \left(\left(\frac{t_1^2}{2}\right) * (5 * \overrightarrow{i} + 3 * \overrightarrow{j} + 4 * \overrightarrow{k}) + \overrightarrow{r_0}\right)\right|$$

Видно, что постоянная составляющая вектора $\overrightarrow{r_0}$ вычетается и исчезает, а модуль направляющего вектора можно вынести за скобки.

$$s = \left(\left(\frac{t_2^2}{2}\right) - \left(\frac{t_1^2}{2}\right)\right) * \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} =$$

$$\left(\left(\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{2^2}{2}\right)\right) * \sqrt{50} = \left(\frac{5}{2}\right) * \sqrt{25 * 2} = \left(\frac{5 * 5}{2}\right) * \sqrt{2} = 17.678\text{м}$$

Ответ: Путь, пройденный частицей $s = \left(\frac{25}{2}\right) * \sqrt{2} = 17.678\text{м}$

.

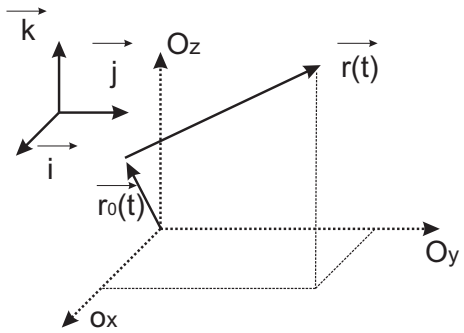
Задача. Движение точки по прямой задано уравнением

$$x = x(t) = A * t + B * t^2;$$

где $A = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$; и $B = -0.5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Определить среднюю путевую скорость $< v >$ движения точки в интервале времени $t_1 = 1\,c$ до $t_2 = 2\,c$

Решение. В первую очередь мы определим, нет ли у движения тела точки поворота - от этого зависит способ измерения пройденного пути. В точке поворота скорость равняется нулю. Действительно,например, до точки поворота тела перемещалось вдоль оси координат, и имело тем самым положительную скорость, а после точки поворота она начинает двигаться против направления оси координат и знак скорости отрицателен. Ясно, что в момент смены знака скорость должна равняться нулю. Итак

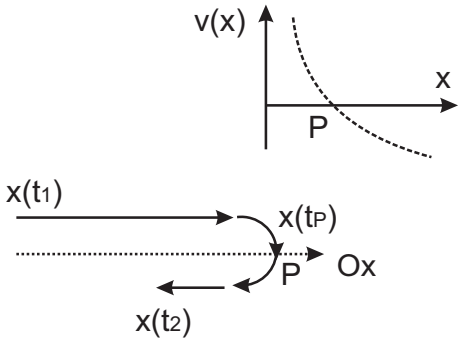
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A * t + B * t^2)}{dt} = A + 2 * B * t = 0;$$



В нашем случае равенство получается следующим

$$2\frac{\text{м}}{\text{с}} - 0.5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} * 2 * t = 0$$

то есть момент точки поворота $t_P = 2c$. Значит тело движется следующим образом



Вычисление средней скорости по формуле

$$< v >= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

оказалось бы неверным, так как средняя скорость равна пройденному пути, разделенному на интервал времени, а не смещению разделенному на интервал времени. В нашем варианте правильная формула для вычисления средней скорости такова

$$< v >= \frac{((x(t_P) - x(t_2)) + (x(t_P) - x(t_1))}{t_2 - t_1}$$

Значение

$$x(t_P) = 2\frac{\text{м}}{\text{с}} * 2\,c - 0.5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} * (2\,c)^2 = 4 - 2 = 2\text{м};$$

Аналогично, начальное и конечное значение координаты равны

$$x(t_1) = 2 * 1 - 0.5 * 1^2 = 1.5\,\text{м};$$
$$x(t_2) = 2 * 3 - 0.5 * 3^2 = 1.5\,\text{м};$$

Пройденный путь

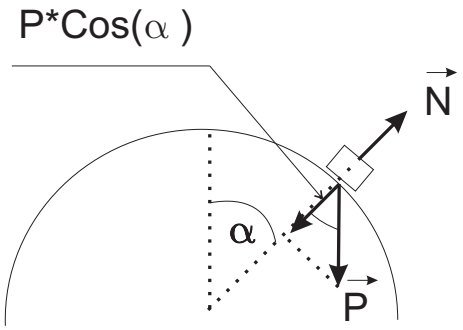
$$(x(t_P) - x(t_2)) + (x(t_P) - x(t_1) = (2 - 1.5) + (2 - 1.5) = 0.5 + 0.5 = 1\,\text{м}$$

Средняя путевая скорость равна

$$< v >= \frac{1\,\text{м}}{(3-1)\,c} = 0.5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ. Средняя путевая скорость точки равна $< v >= 0.5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача. Точка совершает гармоническое колебание. Наибольшее смещение точки равно $x_{Max} = 10\,\text{см}$, наибольшая скорость $v_{Max} = 20\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$. Найти угловую частоту ω колебаний и максимальное ускорение a_{Max} точки.



Решение. В любом случае колебание совершается по закону

$$x = x(t) = A * \cos(\omega * t + \varphi);$$

где ω- угловая частота, φ-фаза колебаний. Скорость колебаний

$$v = v(t) = \frac{dx}{dt} = -A * \omega * \sin(\omega * t + \varphi);$$

Из данных двух формул мы можем определить угловую частоту. Действительно:

$$A = x_{Max} = 0.1\,\text{м};$$
$$A * \omega = v_{Max} = 0.2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Отсюда

$$\omega = \frac{v_{Max}}{x_{Max}} = \frac{0.2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{0.1\text{м}} = 2\frac{1}{\text{с}};$$

Ускорение точки равно

$$a = a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A * \omega^2 * \cos(\omega * t + \varphi);$$

Следовательно, максимальное ускорение точки равно

$$a_{Max} = A * \omega^2 = 0.1\,\text{м} * (2\frac{1}{\text{с}})^2 = 0.4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Ответ: Угловая частота колебаний точки равна $\omega = 2\frac{1}{\text{с}}$. Максимальное ускорение точки равно $a_{Max} = 0.4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Задача. Камешек скользит с наивысшей точки купола, имеющей форму полусферы. Какую дугу α опишет камешек, прежде чем оторвется от поверхности купола ?

Решение. На камешек действует сила тяжести P и реакция сферы N. Под действием этих двух сил тело движется ускоренно по окружности Центробежное ускорение $\frac{v^2}{R}$, где R - радиус сферы, а v - скорость камешка по поверхности сферы, позволяет записать второй закон Ньютона

$$m * \frac{v^2}{R} = P * \cos(\alpha(t)) - N;$$

Здесь $\alpha(t)$ - текущий угол смещения камешка относительно вертикали. По мере смещения сила реакции опоры N спадает до нуля. Величина $N = 0$ соответствует моменту отрыва камешка от сферы. Таким образом, в момент отрыва

$$m * \frac{v^2}{R} = P * \cos(\alpha);$$

Скорость отрыва определим из закона сохранения энергии

$$m * \frac{v^2}{2} = m * g * h;$$

откуда

$$v = \sqrt{2 * g * h}$$

Здесь h - вертикальное расстояние от верхней точки сферы, g - ускорение свободного падения. Из чертежа видно, что

$$\cos(\alpha) = \frac{R - h}{R}$$

Поэтому, равенство

$$m * \frac{v^2}{R} = P * \cos(\alpha);$$

станет выглядеть следующим образом:

$$m * \frac{2 * g * h}{R} = P * \frac{R - h}{R};$$

или

$$R - h = 2 * h;$$

Таким образом, высота отрыва $h = \frac{R}{3}$. Теперь можно расчитать косинус угла отрыва

$$\cos(\alpha) = \frac{R - h}{R} = \frac{R - \frac{R}{3}}{R} = \frac{2}{3}$$

С помощью калькулятора определяем угол отрыва

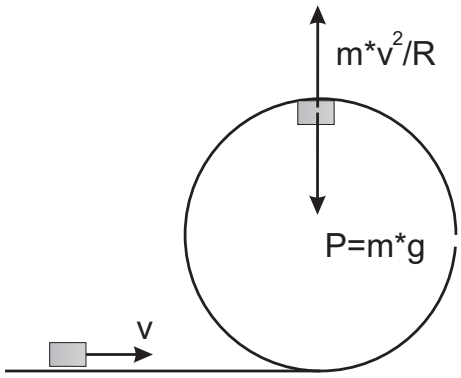
$$\alpha = arccos(\frac{2}{3}) = 0.841\text{рад}$$

Ответ. Камешек до отрыва опишет дугу $\alpha = arccos(\frac{2}{3}) = 0.841\text{рад}$.

Задача. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге. Какую наименьшую скорость v он должен развить, чтобы выключив мотор, проехать по треку, имеющему форму "мертвой петли", радиусом 4 метра ? Трением и сопротивлением пренебречь.

Решние. В верхней точке "мертвой петли"центробежная сила должна по крайней мере уравновешивать силу веса мотоциклиста. То есть

$$m * \frac{v^2}{R} = m * g;$$



Отсюда определяем скорость мотокциклиста

$$v = \sqrt{g * R}$$

Численно

$$v = \sqrt{9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} * 4\,\text{м}} = \sqrt{39.2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 6,261\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

Ответ. Минимальная скорость мотокциклиста должна равняться $v = \sqrt{9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} * 4\,\text{м}} = 6,261\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

.

Задача. Точка совершает колебания по закону $x = A * \cos\omega * t$, где $A = 5$ см, $\omega = 2\frac{1}{c}$. Определить ускорение "а"точки в момент времени, когда ее скорость $v = 8\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение. Скорость точки равна

$$v = v(t) = \frac{dx}{dt} = -A * \omega * \sin\omega * t$$

Ускорение точки равно

$$a = a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A * \omega^2 * \cos\omega * t;$$

Пусть t_0 - момент времени, когда ее скорость $v = 8\frac{\text{м}}{\text{с}}$. С учетом знания амплитуды и угловой частоты

$$0.08\frac{\text{м}}{\text{с}} = -0.05\,\text{м} * 2\frac{1}{c} * \sin\omega * t_0;$$

Отсюда

$$\sin\omega * t_0 = -0.8;$$

Соответственно, косинус в этот момент равен

$$\cos\omega * t_0 = -\sqrt{1 - (\sin\omega * t_0)^2} = -\sqrt{1 - 0.8^2} = -\sqrt{1 - 0.64} = -\sqrt{0.36} = -0.6$$

Теперь можно определить величину ускорения.

$$a = a(t) = -A * \omega^2 * \cos\omega * t_0 = -0.05\,\text{м} * (2 * \frac{1}{\text{с}^2})^2 * (-0.6) = 0.12\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Ответ: Ускорение "а"точки в момент времени, когда ее скорость $v = 8\frac{\text{м}}{\text{с}}$ равно $a = 0.12\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ или $a = 12\frac{\text{см}}{\text{с}}$.

* *

Задача. Твердое тело вращается замедляясь вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\omega \perp \sqrt{\omega}$, где ω - его угловая скорость. Найти среднюю угловую скорость тела за время, в течение которого оно будет вращаться, если в начальный момент времени его угловая скорость была равна ω_0.

Решение. По определению угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

По условию задачи угловое ускорение пропорционально корню квадратному из угловой скорости. Именно

$$\varepsilon = -k * \sqrt{\omega};$$

Таким образом:

$$\frac{d\omega}{dt} = -k * \sqrt{\omega};$$

Разделим переменные:

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = -k * dt$$

Интегрируем

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = \int \omega^{-\frac{1}{2}}\, d\omega = \frac{\omega^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2 * \sqrt{\omega} + C;$$

А интеграл по времени

$$\int (-k)\, dt = -k * t$$

Итак

$$2 * \sqrt{\omega} + C = -k * t;$$

В начальный момент времени при $t = 0$ по условию задачи $\omega = \omega_0$. Подставим эти значения в последнее равенство

$$2 * \sqrt{\omega_0} + C = 0$$

Откуда

$$C = -2 * \sqrt{\omega_0}$$

Окончательный закон изменения угловой скорости

$$2 * \sqrt{\omega} = 2 * \sqrt{\omega_0} - k * t;$$

В момент остановки угловая скорость тела равна нулю. Обозначим момент остановки через T. Тогда из последнего равенства

$$k * T = 2 * \sqrt{\omega_0};$$

Средняя угловая скорость за время вращения по определению равна

$$< \omega >= \frac{\omega_0 - 0}{T} = \frac{\omega_0}{\frac{2*\sqrt{\omega_0}}{k}} = \frac{k * \sqrt{\omega_0}}{2}$$

Ответ. Если угловое ускорение пропорционально корню квадратному из угловой скорости, то есть $\varepsilon = k*\sqrt{\omega}$, то средняя угловая скорость за время вращения равна

$$< \omega >= \frac{k * \sqrt{\omega_0}}{2};$$

Задача. Шар массой $m_1 = 6$ кг налетает на другой покоящийся шар массой $m_2 = 4$ кг. Импульс p_{01} первого шара равен 5 кг*м/с. Удар шаров прямой, неупругий. Определить непосредственно после удара:

1) импульс первого шара p_1 и второго шара p_2

2) изменение импульса Δp первого шара

3) кинетическую энергию первого шара T_1 и второго шара T_2

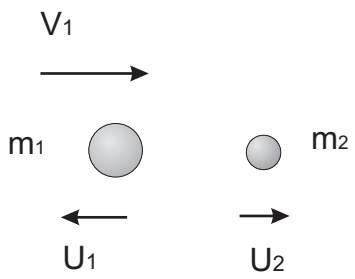
4) изменение кинетической энергии первого шара ΔT_1

5) долю ω_1, кинетической энергии, переданной первым шаром второму шару и долю ω_2, кинетической энергии оставшейся у первого шара.

6) изменение ΔU внутренней энергии шаров

7) долю ω кинетической энергии первого шара, перешедшей во внутреннюю энергию шаров.

Решение. системы уравнений, первое из которых представляет собой закон сохранения импульса, а второе - закон сохранения кинетической энергии системы шаров. Система запишется следующим образом



$$\begin{cases} p_{01} = m_1 * v_1 = m_1 * u_1 + m_2 * u_2; \\ \frac{1}{2} m_1 * v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 * u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 * u_2^2 \end{cases}$$

Подставим в данную стстему конкретные значения

$$m_1 = 6\,\text{кг}; \quad m_1 = 4\,\text{кг}; \quad p_{01} = 5\,\frac{\text{кг*м}}{\text{с}}; \quad v_{01} = \frac{p_{01}}{m_1} = \frac{5}{6}\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

В результате получиться система

$$\begin{cases} 5 = 6 * u_1 + 4 * u_2; \\ \frac{1}{2} * 6 * \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{2} 6 * u_1^2 + \frac{1}{2} 4 * u_2^2 \end{cases}$$

Сократим последнюю строку на $\frac{1}{2}$ и проведем необходимые действия:

$$\begin{cases} 6 * u_1 + 4 * u_2 = 5; \ \frac{\text{кг*м}}{\text{с}} \\ 6 * u_1^2 + 4 * u_2^2 = \frac{25}{6} \ \frac{\text{кг} * \text{м}^2}{\text{с}^2} \end{cases}$$

Из первой строки

$$u_1 = \frac{1}{6}(5 - 4 * u_2);$$

Подставим это значение во вторую строку:

$$\frac{1}{6} * (5 - 4 * u_2)^2 + 4 * u_2^2 = \frac{25}{6}$$

Умножим на 6, получим

$$(5 - 4 * u_2)^2 + 24 * u_2^2 = 25;$$

Раскроем скобки

$$40 * u_2^2 - 20 * u_2 + 25 = 25$$

Останется

$$20 * u_2 * (2 * u_2 - 1) = 0;$$

Один корень $u_2 = 0$ нас не устраивает по физическим соображениям, так как после столкновения второй шар не может оставаться в покое. Поэтому решением уравнения будет скорость второго шара

$$u_2 = \frac{1}{2} \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

При этом скорость первого шара равна

$$u_1 = \frac{1}{6}(5 - 4 * \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}(5 - 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

Теперь мы начнем последовательно отвечать на вопросы

1)После удара импульсы первого шара p_1 и второго шара p_2 равны соответственно

$$p_1 = 6\,\text{кг} * \frac{1}{2} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3 \frac{\text{кг*м}}{\text{с}};$$
$$p_2 = 4\,\text{кг} * \frac{1}{2} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 2 \frac{\text{кг*м}}{\text{с}};$$

2) изменение импульса Δp_1 первого шара

$$\Delta p_1 = 3 \frac{\text{кг*м}}{\text{с}} - 5 \frac{\text{кг*м}}{\text{с}} = -2 \frac{\text{кг*м}}{\text{с}}$$

3) после столкновения кинетическая энергию первого шара T_1 и второго шара T_2 равны соответственно

$$T_1 = \frac{1}{2} * m_1 * u_1^2 = \frac{1}{2} * 6\,\text{кг} * \left(\frac{1}{2}\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 = \frac{3}{4}\,\text{Джоуля};$$
$$T_2 = \frac{1}{2} * m_1 * u_2^2 = \frac{1}{2} * 4\,\text{кг} * \left(\frac{1}{2}\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\text{Дж};$$

Найдем кинетическую энергию первого шара до столкновения

$$T_{01} = \frac{1}{2} * m_1 * v_1^2 = \frac{1}{2} * 6\,\text{кг} * \left(\frac{5}{6}\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 = \frac{25}{12}\,\text{Дж};$$

4) изменение кинетической энергии первого шара ΔT_1

$$\Delta T_1 = \frac{25}{12} - \frac{3}{4} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}\,\text{Дж};$$

5) доля ω_1, кинетической энергии, переданной первым шаром второму шару и долю ω_2, кинетической энергии оставшейся у первого шара.

$$\omega_1 = \frac{T_{01} - T_2}{T_{01}} = \frac{\frac{25}{12} - \frac{1}{2}}{\frac{25}{12}} = \frac{13}{25} = 0.52;$$
$$\omega_1 = \frac{T_{01} - T_1}{T_{01}} = \frac{\frac{25}{12} - \frac{3}{4}}{\frac{25}{12}} = \frac{16}{25} = 0.64;$$

То есть первый шар передал второму 52 $^\circ/_\circ$ своей энергии, а у него самого осталось 48 $^\circ/_\circ$ своей энергии.

2 Молекулярная физика.

2.1 Историческая составляющая в конструкции физики

Нам кажется, что физика, как и математика построены на незыблемых основах аксиом, постулатов и теорем. Однако, именно на примере физики видно, что ее основу составляют не божественные законы, а факты и интерпретация этих фактов, данная людми. Лнгче всего это проследить на примере дисциплины, которую студенты обычно недолюбливают из-за недопогимания - молекулярной физики и термодинамики.

Рассмотрим понятие температуры.

Великий врач Гален (11 в.) предложил все лекарства классифицировать по степени воздействия на организм человека и назвал эти степени градусами ("лат. gradus - степень, ступень, шаг). Было четыре главных градуса: градус тепла, градус холода, градус влажности и градус сухости. Каждый из этих

градусов разбивался еще на три - итого была 12-градусная шкала. Таким образом, понятие температура стало определять величину теплового воздействия на организм в градусах. Однако численную связь между температурой и градусами древние врачи установить не могли. Новый подход к изучению тепловых явлений наметился в XYII веке. Но изучать их было невозможно без точных измерений температуры тел. Первый прибор для измерения температуры сделал Галилео Галилей (1564-1642) в 1600 году. Он состоял из стеклянного шара, наполненного воздухом, от которого отходила трубка, частично заполненная водой, которая заканчивалась в сосуде, также наполненном водой. Когда воздух в шаре расширялся или сжимался, уровень воды в трубке изменялся. Этот прибор измерял довольно неопределенную величину, но все же он позволял сравнивать температуру разных тел в одно и то же время и в одном и том же месте. За термоскопом Галилея последовали многочисленные приборы флорентийских академиков. Академик Каспар Энс в 1636 г. опубликовал книгу "Математический чудотворец", в которой впервые употребил слово термометр ("гр. thermos - теплый + metron - мера) и описал 8-градусную шкалу. Действие всех термометров было основано на изменении объема тел при нагревании. Ими стали измерять давление, влажность и температуру воздуха. Их заполняли уже не водой, а спиртом и наносили деления расплавленной эмалью. Ими можно было измерять температуру с точностью до 10. Сравнительно хороший термометр сделал изобретатель-самоучка бургомистр Магдебурга Отто фон Герике (1602-1686). Его прибор состоял из латунного шара, заполненного воздухом, и изогнутой в форме буквы U трубки со спиртом. Температуру указывал деревянный человечек, который с помощью шнура и блока был связан с латунной запаянной коробочкой, плававшей в открытом конце прибора. Для того, чтобы измерять температуру воздуха в каких-то абсолютных единицах, нужно было избрать за начало шкалы какую-то точку. Герике избрал точку, около которой останавливался его человечек при первых заморозках. Это было наивно, но это был первый шаг.

С конца XYII в. над созданием температурной шкалы трудятся многие ученые. Понадобилось немало времени, чтобы придти к мысли о постоянных точках на шкале температур. Исаак Ньютон (1643-1727) опорную точку отсчета - "нуль"помещает в точке замерзания воды. В своей работе "О шкале степеней тепла и холода"он описывает 12-градусную шкалу: 120 отвечали температуре тела здорового человека. Нидерландский ученый Христиан Гюйгенс (18629-1695) предложил избрать в качестве опорной точки термометра точку кипения воды. Парижский академик Гийом Амонтан в 1703 г. ввел две постоянные точки отсчета - точку кипения воды и "абсолютный нуль", при котором "воздух теряет свою упругость". Конечно, здесь Амонтан ошибся (по современной шкале на 2400 ниже нуля), но все же это было уже достижением. В термометрах Амонтана измерялось не увеличение объема воздуха при нагревании, а изменение его давления, для чего воздух запирался столбиком ртути. Запаяв его, Амонтан исключил зависимость термометра от давления атмосферы. Его термометр стал физическим инструментом. Голландский стеклодув Даниель Фаренгейт (1686-1736) начинает изготавливать спиртовые, а затем и ртутные термометры, которые согласовывались между собой. Самую низкую температуру он ими-

тировал смесью льда, поваренной соли и нашатыря -"нулевая точка". Вторую "точку замерзания воды"он получал, погружая термометр в смесь льда и воды, и считал еҷ за 320, так как все расстояние между этими точками делил на 32 части. Свою шкалу он проверял, измеряя температуру человека, и новая точка попадала на 980.Четвертой опорной точкой он избрал "точку кипения воды", которая попадала на 2120. Термометры Фаренгейта прославились своей точностью. Такой шкалой и сегодня иногда пользуются в Англии и США. Французский естествоиспытатель Рене Реомюр (1681 - 1757) в 1740г. построил свою шкалу на точках замерзания воды - 00 и еҷ кипения - 800. Его термометры широко распространились сначала во Франции, а позже и в России. Их стали вешать в домах и на улицах. Ими широко пользовались вплоть до 30-ых годов Х1Х века. Шведский астроном и физик Андерс Цельсий (1701-1744) ,тщательно исследовавший термометр Реомюра, установил, что точка кипения воды зависит от давления. В итоге появился новый термометр. Точку плавления льда Цельсий принял за 1000, а точку кипения воды при давлении 25 дюймов 3 линии ртутного столба - за 00. Таким образом, вся шкала делилась на 1000. Шведский ботаник Карл Линней (1707-1778) посчитал более удобным для пользования перевернутую шкалу: 00 -температура плавления льда, 1000 - температура кипения воды. Перевернутая стоградусная шкала Цельсия нашла широкое применение во всем мире. Петербургские академики внесли в термометрию свои идеи. Так, академик Ж.Н. Делиль (1688-1768) предложил шкалу, в которой точка плавления льда принималась за 1500, а кипения воды - за 00. Российский академик М.В. Ломоносов (1711-1765) применял в своих исследованиях сконструированный им термометр со шкалой, обратной делилевской. Во всех приборах, которые были придуманы в XYIII в., измерение температуры сводилось к измерению длины столбика воды, спирта или ртути. Термометры работали только в ограниченном интервале температур. Перед учеными стояли две главные задачи: во-первых, установить такие опорные точки, которым бы соответствовали другие выбранные точки, в частности - начало отсчета - и, во-вторых, придумать такое определение градуса, которое бы не зависело от конкретного термометра и могло бы быть использовано для построения шкалы в любом месте и в любое время.

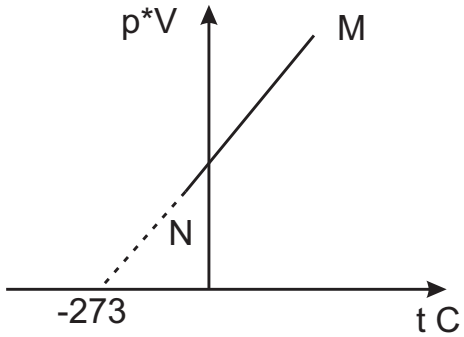
Я привел столь длинную цитату из малоизвестных фактов истории физики, чтобы показать насколько условным оказалось определение температуры.Во-первых, весьма четко прослеживается способ измерения температуры - с помощью расширения газа или жидкого тела при увеличении этого физического показателя. Иными словами, пройдя ряд преобразований температура стала измеряться в единицах длины. Конечно разные жидкости или газы расширяются по-разному. Однако после их изучения стали проявляться определенные закономерности. Весьма важный физический закон сжатия газов, который носит теперь его имя (закон Бойля-Мариотта), остался бы, может быть, незамеченным Бойлем, если б не первоначальное указание его ученика Ричарда Таунли (Richard Townley) на правильность сжатия газов с увеличением давления в опытах Бойля. Через 17 лет его переоткрыл Эдм Мариотт.

Исследуя газы, Дмитрий Иванович Менделеев нашҷл в 1874 году общее уравнение состояния идеального газа включающее как частность зависимость

состояния газа от температуры, обнаруженную в 1864 году физиком Бенуа Поль Эмилем Клапейроном (уравнение Клапейрона - Менделеева). Посмотрим, как это закон выглядел в то время. Его форма оказалась следующей

$$p * V = A * (t + C)$$

Постоянные A и C в значительной мере зависят от выбора температурной шкалы. Однако, чтобы не затянять существо вопроса мы сразу выберем шкалу Цельсия. Получиться следующий график: На этом графике участок MN реаль-



но фиксируется на опыте, однако гипотетически его можно продолжить дальше до того места, в котором произведение давления "p"на объем "V"обратиться в ноль. В шкале Цельсия эта точка равна (-273°) и называется точкой абсолютного нуля.

Возникает вопрос, неужели в данной точке или объем или давление обратиться в ноль. Нет, из-за квантово-механических явлений этого не произойдет, но с точки зрения макрофизики удобно представлять закон именно так. Введем *абсолютную температуру*

$$T^\circ = t^\circ + 273.16^\circ$$

Тогда, в современном изложении, закон Менделеева-Клайперона выглядит следующим образом:

$$p * V = \frac{M}{\mu} * R * T$$

Здесь p-давление, V - объем газа, M - масса газа, μ - молярная масса газа, R- универсальная газовая постоянная, T - абсолютная температура в градусах Кельвина.

Рассмотрим уравнение Менделеева - Клайперона с точки зрения размерности. В левой части этого уравнения стоят давления с размерностью ньютон/ $(\texttt{метр})^2$ и объем с размерностью $(\texttt{метр})^3$. Их прозведение приводит к размерности

$$\frac{\texttt{ньютон}}{(\texttt{метр})^2} * ((\texttt{метр})^3 = \texttt{ньютон*метр} = \texttt{джоуль}$$

Таким образом слева мы имеем размерность энергии.

2.2 Теплоемкости

Задача. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме c_v и при постоянном давлении c_p смеси двух газов с удельными теплоемкостями c_1 и c_2 соответственно. Массовые доли газов равны $\gamma_1 = 0.8$ и $\gamma_2 = 0.2$.

Решение: Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме c_v найдем следующим образом. При нагревании тела на температуру ΔT количество теплоты увеличится на величину

$$\Delta Q = c_v * (m_1 + m_2) * \Delta T;$$

где c_v - удельная теплоемкость смеси. Если учесть теплоемкость каждого газа в отдельности, то соответствующее количество теплоты выражается формулой

$$\Delta Q = (c_1 * m_1 + c_2 * m_2) * \Delta T;$$

Приравнивая левые части и сокращая на ΔT получим:

$$c_v * (m_1 + m_2) = c_1 * m_1 + c_2 * m_2$$

Напомним, что массовые доли газов равны

$$\gamma_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}; \quad \gamma_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2};$$

В результате удельная теплоемкость смеси при постоянном объеме

$$c_v = \gamma_1 * c_1 + \gamma_2 * c_2$$

Обобщив, мы можем заключить, что удельная теплоемкость смеси, состоящей из газов с массами m_j и удельными теплоемкостями при постоянном объеме c_j получается как средневзвешанная индивидуальных теплоемкостей:

$$c_v = \frac{m_1 * c_1 + m_2 * c_2 + ... + m_n * c_n}{m_1 + m_2 + ... + c_n}$$

Удельную теплоемкость при постоянном давлении определим из уравнения Майера:

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mu}$$

где R - универсальная газовая постоянная, а $\mu = \mu_1 + \mu_2$ - совместная молярная масса двух газов. Она определяется с помощью атомных весов в таблице Менделеева.

Удельные теплоемкости газов часто задаются в таблицах. Однако, для идеальных газов удельные теплоемкости легко получить из молярных теплоемкостей.Если c_μ - молярная теплоемкость, а c - удельная теплоемкость, то

$$c_\mu = \mu * c$$

где μ - молярная масса вещества. Отсюда выражение удельная теплоемкости через молярную

$$c = \frac{c_\mu}{\mu}$$

В результате теплоемкость смеси при постоянном объеме

$$c_v = \frac{m_1 * \frac{c_{\mu 1}}{\mu 1} + m_2 * \frac{c_{\mu 2}}{\mu 2} + ... + m_n * \frac{c_{\mu n}}{\mu n}}{m_1 + m_2 + ... + c_n}$$

Часто бывает, что смесь состоит или из одноатомных или из двухатомных газов, у которых молярные теплоемкости одни и те же, то есть $c_{\mu 1} = c_{\mu 2} = ... = c_{\mu n} = c_{\mu 0}$. Напомним, что молярная теплоемкость газа при постоянном объеме равна

$$c_\mu = \frac{i}{2} * N_A * k = \frac{i}{2} * R$$

где i - число степеней свободы, N_A - число Авогадро, k - постоянная Больцмана, R - универсальная газовая постоянная, равная с хорошей степенью точности 2 калории /(моль*градус) . Тогда

$$c_{\mu 0} = i \quad \texttt{кал}$$

и формула для удельной теплоемкости смеси примет вид

$$c_v = \frac{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + ... + \frac{m_n}{\mu_n}}{m_1 + m_2 + ... + c_n} * c_{\mu 0}$$

3 Электричество и магнетизм.

3.1 Задачи на закон Кулона

Задача. На тонкой металической проволоке длиной L = 0.08 м равномерно распределен заряд $q_1 = 3.5*10^{-4}$ Кл, действующий с силой $F = 1.2*10^{-4}$ ньютон на точечный заряд q_2, который находится на продолжении той же проволоки на расстоянии $r = 0.06$ м от ее середины. Определить величину точечного заряда.

Решение. Заметим, что на единицу длины проволоки приходится линейная плотность заряда $\tau = \frac{q_1}{L}$. Тогда каждый элементарный отрезок стержня длины dx будет иметь заряд $dq_1 = \tau * dx = \frac{q_1}{L} * dx$. По закону Кулона на точечный заряд q2 со стороны элементарного отрезка действует сила

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 dq_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{L}\frac{dx}{x^2}$$

где $\varepsilon_0 = 8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н}\cdot\text{м}^2$ - электрическая постоянная. Полная сила получается после интегрирования в пределах от $(r - \frac{L}{2})$ до $(r + \frac{L}{2})$. Получим

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{L}\int_{r-\frac{L}{2}}^{r+\frac{L}{2}}\frac{dx}{x^2}$$

Интеграл возьмем отдельно. По правилу Ньютона-Лейбница

$$\int_{r-\frac{L}{2}}^{r+\frac{L}{2}}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{r-\frac{L}{2}}^{r+\frac{L}{2}} = -\left(\frac{1}{r+\frac{L}{2}} - \frac{1}{r-\frac{L}{2}}\right) =$$
$$= -\frac{(r-\frac{L}{2}) - (r+\frac{L}{2})}{(r+\frac{L}{2})(r-\frac{L}{2})} = \frac{L}{r^2 - \frac{L^2}{4}}$$

Итак, полная сила, действующая на заряд равна

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{L}\frac{L}{r^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2 - \frac{L^2}{4}};$$

Аналитически величина искомого заряда равна

$$q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 F(r^2 - \frac{L^2}{4})}{q_1}$$

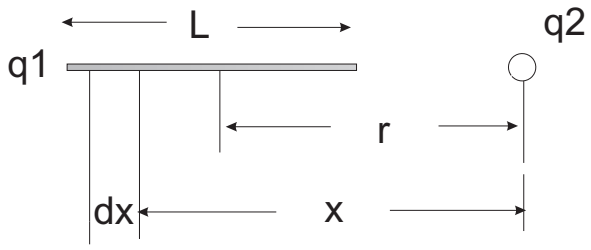
Численно

$$q_2 = \frac{4 * \pi * 8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н}\cdot\text{м}^2 * 1.2\cdot 10^{-4}\text{н} * ((0.06)^2 - \frac{0.08^2}{4})\text{м}^2}{3.5 * 10^{-4}\text{Кл}} = 7.726 * 10^{-14}\text{Кл}$$

Ответ. Искомый точечный заряд равен

$$q_2 = 7.726 * 10^{-14}\text{Кл}$$

Задача. Тонкий стержень длиной l=12 см заряжен с линейной плотностью $\tau = 200$ нКл/м. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстоянии r = 5 см от стержня, против его середины.
Решение. Как видно из рисунка горизонтальные составляющие напряжения электрического поля, вызванные элементарными участками сокращаются, так как направлены в разные стороны.



Напомним, что напряженость электрического поля - это кулоновская сила, действующая на пробный единичный заряд. Сгласно рисунку, вертикальная составляющая напряженности от элементарного участка равна

$$dE = 2 * \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_1}{L^2} * \cos(\alpha) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau * dx}{(r^2+x^2)} * \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}} =$$
$$= \frac{\tau * r}{2\pi\varepsilon_0} * \frac{dx}{\sqrt{(r^2+x^2)^3}}$$

Чтобы определить полную напряженность проинтегрируем результат. Вертикальная составляющая напряженности равна

$$E = \frac{\tau * r}{2\pi\varepsilon_0} * \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(r^2+x^2)^3}}$$

По таблицам интегралов

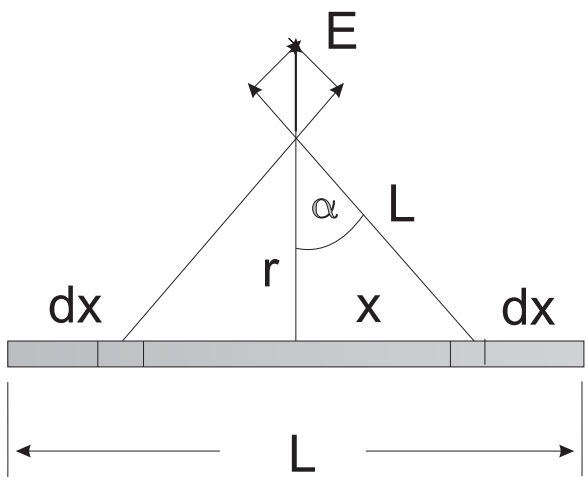
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(r^2+x^2)^3}} = \frac{1}{r^2} * \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

С учетом формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(r^2+x^2)^3}} = \frac{1}{r^2} * \left(\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{r^2+(\frac{L}{2})^2}} - \frac{\frac{-L}{2}}{\sqrt{r^2+(\frac{L}{2})^2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{r^2} * \frac{L}{\sqrt{r^2+(\frac{L}{2})^2}}$$

Аналитически напряженность равна

$$E = \frac{\tau * r}{2\pi\varepsilon_0} * \frac{1}{r^2} * \frac{L}{\sqrt{r^2+(\frac{L}{2})^2}}$$



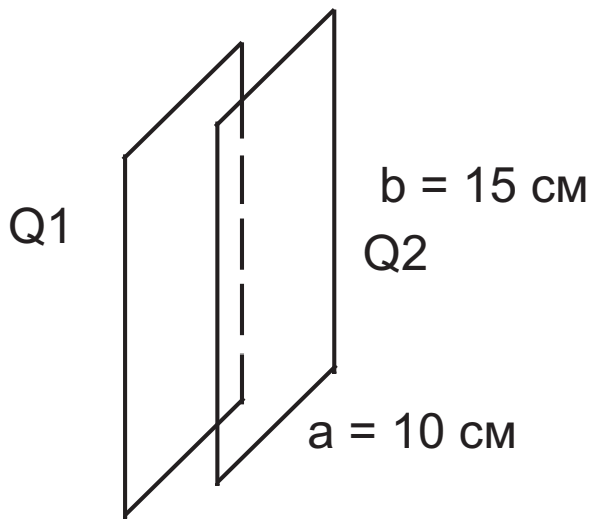
Численно

$$E = \frac{200 * 10^{-9}\text{Кл} * 0.05\text{м}}{2 * \pi * 8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н} \cdot \text{м}^2} * \frac{1}{(0.05)^2 \cdot \text{м}^2} * \frac{0.12}{\sqrt{(0.05)^2 + (0.06)^2}} =$$
$$1.105 * 10^5 \frac{\text{ньютон}}{\text{кулон}}$$

Ответ. Искомая напряженность электрического поля равна

$$E = 1.105 * 10^5 \frac{\text{н}}{\text{Кл}};$$

Задача. Две прямоугольные одинаковые параллельные пластины, длины сторон которых a = 10 см и b = 15 см, расположены на малом расстоянии друг от друга. На одной из пластин равномерно распределен заряд $Q_1 = 50$ нКл, на другой - заряд $Q_2 = 150$ нКл. Определить напряженность E электрического поля между пластинами.



Решение. В связи с тем, что пластинки расположены на малом расстоянии друг от друга, напряженность между пластинами мы будем расчитывать по формуле для бесконечных плоскостей (на маленьком расстоянии, вдали от краев поле от конечной пластины равносильно полю от бесконечной пластины). Тогда (например, по Б.М.Яворский, А.А. Детлаф "Справочник по физике", Раздел IV) для электрического поля в вакууме

$$E = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

Здесь $\varepsilon_0 = 8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н} \cdot \text{м}^2$ - электрическая постоянная, а $\sigma 1, \sigma_2$ - поверхнастная плотность зарядов на каждой из пластин. У нас

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{a * b}; \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{a * b};$$

Таким образом, окончательная формула для напряженности окажется следующей

$$E = \frac{Q_1 + Q_2}{2 * a * b * \varepsilon_0}$$

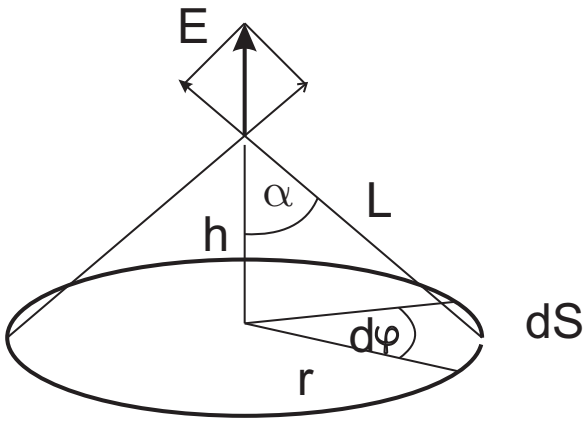
Численно

$$E = \frac{(50 + 150) * 10^{-9}\text{Кл}}{2 * 0.1 \cdot \text{м} * 0.15 \cdot \text{м} * 8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н} \cdot \text{м}^2} = 7.533 * 10^5\,\frac{\text{н}}{\text{Кл}};$$

Ответ. Искомая напряженность поля

$$E = 7.533 * 10^5\,\frac{\text{ньютон}}{\text{кулон}};$$

Задача. Вдоль тонкого кольца радиусом 6 см равномерно распределен заряд 10^{-8} Кл. Определить силу с которой заряд действует на точечный заряд $3 * 10^{-9}$ Кл, находящейся на расстоянии 5 см от центра кольца на прямой, перпендикулярной к плоскости кольца и проходящей через его центр.



Решение. Как видно из рисунка горизонтальные составляющие напряженности от двух диаметрально противоположных элементарных участков кольца компенсируют друг друга. Поэтому будем искать только вертикальную составляющую напряженности. Как вновь видно из рисунка вертикальная кулоновская сила, действующая на единичный заряд со стороны двух противоположных участков равна

$$dF = 2 * \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{L^2}\cos(\alpha)$$

где $\varepsilon_0 = 8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н} \cdot \text{м}^2$ - электрическая постоянная. Кроме того, линейная плотность заряда - это величина всего заряда, деленная на длину окружности $2\pi r$. То есть,

$$\tau = \frac{Q}{2\pi r}$$

Длина элементарного участка окружности

$$dS = r * d\varphi$$

Следовательно, заряд элементарного участка

$$dq = \tau * dS = \frac{Q}{2\pi r} * r * d\varphi = \frac{Q}{2\pi} d\varphi$$

По определению

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{L}$$

а расстояние от элементарного участка до пробного единичного заряда

$$L = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Соберем все формулы вместе

$$dF = \frac{h * Q}{\varepsilon_0 * L^3} * d\varphi = \frac{h * Q}{2 * \pi * \varepsilon_0 * \sqrt{(r^2 + h^2)^3}} * d\varphi$$

Интегрирование по углам идет в пределах $[0, 2\pi]$ и дает

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

Аналитическое значение силы, действующей на точечный заряд равно

$$F = \frac{h * Q}{\varepsilon_0 * \sqrt{(r^2 + h^2)^3}}$$

Численно

$$F = \frac{0.05 \cdot \text{м} * 10^{-8}\text{Кл} * 1\text{Кл}}{8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н} \cdot \text{м}^2 * \sqrt{((0.06)^2 + (0.05)^2)^3}\text{м}^3} = 1.186 * 10^5\,\text{Кл}$$

Ответ. Искомая сила, действующая на единичный заряд равна

$$F = 1.186 * 10^5\,\text{Кл}$$

Задача. На отрезке тонкого прямого проводника длиной l=10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 3$ мкКл/м. Вычислить напряженность E, создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка.

Решение. Элементарный отрезок dx обладает зарядом $\tau * dx$. Находясь на расстоянии "x"от пробного единичного заряда он создает напряженность электрического поля в горизонтальном направлении, величиной

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{\tau * dx}{x^2}$$

где $\varepsilon_0 = 8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н}\cdot\text{м}^2/$ Для вычисления полной напряженности осталось проинтегрировать данное выражение в пределах от 2*L до L.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \int_{2L}^{L} \frac{\tau * dx}{x^2} = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{1}{x}\,|_{2L}^{L} = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} * \left(\frac{1}{2L} - \frac{1}{L}\right) = \frac{\tau}{8 * L * \pi * \varepsilon_0}$$

Численно

$$E = \frac{3 * 10^{-6}\text{Кл/м}}{8 * 0.1\,\text{м} * \pi * 8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н}\cdot\text{м}^2} = 1.349 * 10^5 \frac{\text{н}}{\text{Кл}}$$

Ответ. Напряженность искомого электрического поля

$$E = 1.349 * 10^5 \frac{\text{н}}{\text{Кл}}$$

Задача. Тонкий стержень образует квадрат со стороной длиннной a. Стержень заряжен с линейной плотностью $\tau = 1.33$ нКл/м. Найти потенциал электрического поля φ в центре квадрата.

Решение.

Получим потенциал одной стороны. Заряд элементарного отрезка dx равен по определению линейной плотности $\tau * dx$. Тогда потенциал элементарного отрезка равен

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{\tau * dx}{\sqrt{x^2 + (\frac{a}{2})^2}}$$

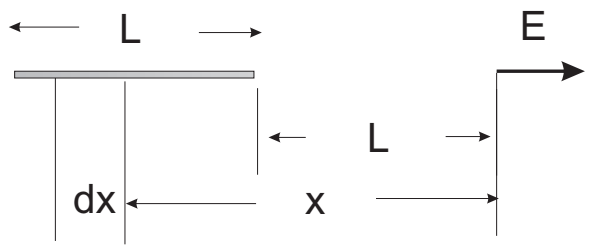
где $\varepsilon_0 = 8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н}\cdot\text{м}^2$ - электрическая постоянная. Потенциал одного полного отрезка равен

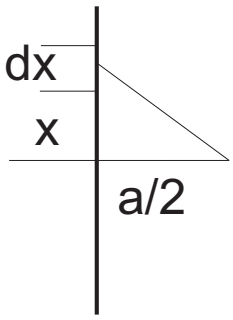
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\tau * dx}{\sqrt{x^2 + (\frac{a}{2})^2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{2}{a} * arctg\left(\frac{2x}{a}\right)\,|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} =$$
$$= \frac{\tau}{\pi * \varepsilon_0 * a} * arctg\left(\frac{2a}{2a}\right) = \frac{\tau}{\pi * \varepsilon_0 * a} * \frac{\pi}{4} = \frac{\tau}{4 * \varepsilon_0 * a}$$

Потенциал квадрата составлен из потенциалов всех четырех сторон, поэтому он будет в четыре раза больше.

Ответ. Потенциал в центральной точке квадрата равен

$$\varphi = \frac{\tau}{\varepsilon_0 * a} = \frac{1.33 * 10^{-9}\text{Кл}}{8.85 * 10^{-12}\,\text{Кл}^2/\text{н}\cdot\text{м}^2 * a} = \frac{0.15}{a}\frac{\text{ньютон} * \text{метр}}{\text{кулон}}$$





или

$$\varphi = \frac{0.15}{a}\frac{\texttt{Джоуль}}{\texttt{Кулон}} = \frac{0.15}{a}\texttt{вольт}$$

Задача. На двух параллельных шинах расположеннных на расстоянии 10 см, лежит толстый проводник массой 100 г. Шины подключены к источнику напряжения и по проводнику идет ток 10 А. При включении магнитного поля перпендикулярного к плоскости, в которой находятся шины, проводник приходит в равномерное движение. Определить величину напряжения поля, если коэффициент трения проводника о шины k = 0.2.

Решение. Силу, действующую со стороны магнитного поля на проводник с током, называют *силой Ампера*. Элементарная сила Ампера $\overrightarrow{dF}$, действующая на малый элемент dL длины проводника, по которому идет электрический ток I , равна

$$\overrightarrow{dF} = I[\overrightarrow{dL}, \overrightarrow{B}]$$

Здесь $\overrightarrow{B}$ - магнитная индукция. Так как расстояние между проводниками и их конфигурация в нашей задаче постоянны, то приведенное равенство можно проинтегрировать и получить

$$\overrightarrow{F} = I[\overrightarrow{L}, \overrightarrow{B}]$$

Направление движения тока $\overrightarrow{L}$, магнитной индукции $\overrightarrow{B}$ и силы $\overrightarrow{F}$ показаны на рисунке.
Так как движение равномерно, то сила Ампера уравновешивается силой трения

$$F_{\texttt{трения}} = k * m * g$$

где g - ускорение свободного падения. Таким образом, мы имеем равенство

$$I * L * B = k * m * g$$

Кроме того, мы выразим индукцию магнитного поля через напряженность магнитного поля

$$B = \mu * \mu_0 * H$$

Окончательно

$$I * L * \mu * \mu_0 * H = k * m * g$$

что дает

$$H = \frac{k * m * g}{I * L * \mu * \mu_0}$$

Численно

$$H = \frac{0.2 * 0.1 \ \text{кг} \ * 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{10A * 0.1 \ \text{м} \ * 1 * 1.26 * 10^{-6} \frac{\text{генри}}{\text{м}}}$$

Размерность

$$\frac{\text{кг} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{А} * \text{м} * \frac{\text{генри}}{\text{м}}} = \frac{\text{ньютон}}{\text{ампер} * \text{генри}} = \frac{\text{н}}{\text{А} * \frac{\text{вольт} * \text{с}}{\text{А}}} =$$

$$= \frac{\text{н}}{\text{в} * \text{с}} = \frac{\text{н}}{\frac{\text{джоуль}}{\text{кулон}} * \text{с}} = \frac{\text{н}}{\frac{\text{н} * \text{м}}{\text{А}}} = \frac{\text{А}}{\text{м}}$$

Ответ: Напряженность магнитного поля равна $0.156 * 10^6 \ \frac{\text{ампер}}{\text{метр}}$

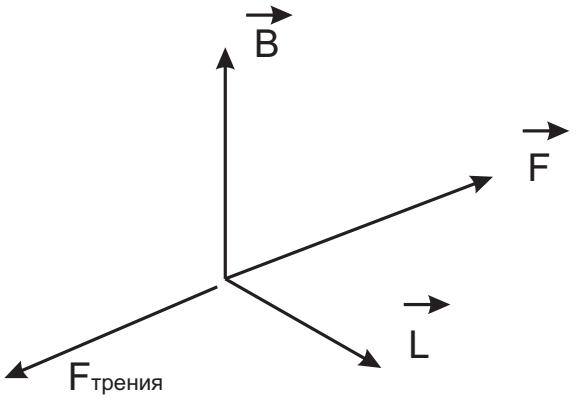
Задача. Два однозарядных иона, пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов, вылетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линии индукции. Один ион, масса которого $m_1 = 12$ атомных единиц массы, описал дугу окружности радиусом R = 4 см. Определить массу m_2 другого иона, который описал дугу окружности, радиусоом R = 6 см.

Решение: Сила Лоренца заставляет ион, влетающий под прямым углом в магнитное поле, вращаться по радиусу - Б.М.Яворский,А.А.Детлаф, "Справочник по физике", Глава 7.

$$R = \frac{m * v}{|q| * B}$$

Здесь m - масса иона, v - его скорость, q - электрический заряд, B - магнитная индукция. Так как ионы однозарядны у них одинаковый заряд q. Для ускоряющей разности потенциалов U выполняется следующее равенство, включающее кинетическую энергию вылетающего иона:

$$\frac{m * v^2}{2} = U$$



Отсюда скорость иона равна

$$v = \sqrt{\frac{2 * U}{m}}$$

Подставим это значение в равенство для радиуса

$$R = \frac{m * \sqrt{\frac{2*U}{m}}}{|q| * B} = \frac{\sqrt{2 * U * m}}{|q| * B}$$

При одинаковых U,q,B мы получим следующее отношение

$$\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{R_2}{R_1}$$

или, после возведения в квадрат

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

Таким образом

$$m_2 = m_1 * \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

Численно, с учетом того, что размерности радиусов - см, а масс - атомные единицы

$$m_2 = 12 * \frac{6^2}{4^2} = 27$$

Ответ: Масса второго иона равна $m_2 = 27$ а.е.м. или $m_2 = 27 * 1.66 * 10^{-27}$ кг

Задача: Заряженная частица с энергией W = 1 кэВ движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом R = 1 мм. Найти силу F, действующую на частицу со стороны поля.

Решение: Частица вращается под действием силы Лоренца, которая при условии входа частицы в поле под прямым углом, равна (Б.М.Яворский,А.А.Детлаф, "Справочник по физике", Глава 7. $ 1)

$$R = \frac{m * v}{q * B}$$

Здесь m - масса частицы, v - ее скорость, q - электрический заряд, B - магнитная индукция.
Из этого равенства напряженность магнитного поля равна

$$B = \frac{m * v}{q * R}$$

Подставим данное значение напряженности в определение силы Лоренца

$$F = q * v * B$$

Получим

$$F = q * v * \frac{m * v}{q * R} = \frac{m * v^2}{R}$$

Выразим скорость частицы через энергию

$$\frac{m * v^2}{2} = W$$

Отсюда

$$F = \frac{2 * W}{R}$$

Численно

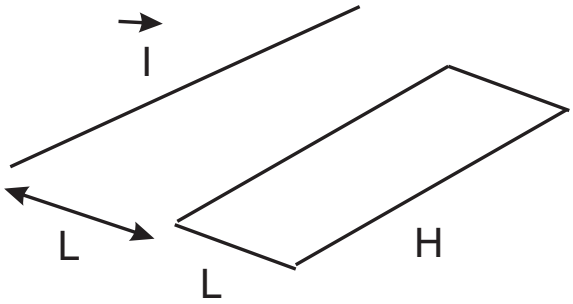
$$F = \frac{2 * 1 * 10^3 * 1.6 * 10^{-19}\,\text{Дж}}{10^{-3}\,\text{м}} = 3.2 * 10^{-13}\text{ньютон}$$

Ответ: Сила Лоренца, действующая на частицу равна F $= 3.2 * 10^{-13}$ ньютон.

Задача: Два прямолинейных длинных проводника, по которым текут равные токи в одном и том же направлении, расположены параллельно на некотором расстоянии друг от друга. Какой ток течет по проводникам, если для удаления проводников на вдвое большее расстояние нужно совершить работу (на единицу длины) A $= 5.5 * 10^{-5}\,\frac{\text{дж}}{\text{м}}$.

Решение: Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении проводника с постоянным током равна (Б.М.Яворский,А.А.Детлаф, "Справочник по физике", IV. 6.6)

$$A = I * \Phi$$



Согласно рисунку поток через площадь, заметаемую длинной проводника H равен

$$\Phi = B * H * L$$

Здесь геометрические величины показаны на рисунке, а индуктивность магнитного поля, создаваемого соседним бесконечным проводом, равна

$$B = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{2 * I}{L}$$

Подставим все представленные значения в формулу работы. Получим:

$$A = I * \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{2 * I}{L} * H * L$$

Возникнет следующее значение работы на единицу длины

$$\frac{A}{H} = I^2 * \frac{\mu_0}{2 * \pi}$$

Отсюда значение тока в проводниках

$$I = \sqrt{\frac{2 * \pi * \frac{A}{H}}{\mu_0}}$$

Численно:

$$I = \sqrt{\frac{2 * \pi * 5.5 * 10^{-5}\ \frac{\text{дж}}{}}{4 * \pi * 10^{-7}\ \frac{\text{генри}}{\text{м}}}} = \sqrt{\frac{550}{2} * \frac{\text{джоуль}}{\text{генри}}}$$

Преобразуем единицу измерения "генри"

$$\text{генри} = \frac{\text{вольт*с}}{\text{ампер}} = \frac{\text{джоуль}}{\text{кулон}} * \frac{\text{с}}{\frac{\text{кулон}}{\text{с}}} = \frac{\text{дж} * \text{с}^2}{\text{кл}^2} = \frac{\text{дж}}{\text{А}^2}$$

Ответ: Ток в проводниках равен I = 16.58 ампер.

Задача: Проволочному кольцу, радиусом $R = 5 * 10^{-2}$ метра сообщили заряд $q_1 = 4 * 10^{-8}$ кулон. С какой силой будет растягиваться кольцо, если в его центре помещен заряд $q_2 = 3 * 10^{-2}$ кулон ? Силы, растягивающие кольцо за счет собственного заряда не учитываются.

Решение: Каждый элемент окружности длинной

$$dS = R * d\varphi$$

имеет плотность заряда

$$\frac{q_1}{2 * \pi * R}$$

Соответственно, заряд эементарного участка окружности равен

$$dq = \frac{q_1}{2 * \pi * R} * dS = \frac{q_1}{2 * \pi * R} * R * d\varphi = \frac{q_1}{2 * \pi} * d\varphi$$

Кулоновская сила, действующая на элементарный участок окружности равна

$$dF = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0} * \frac{\frac{q_1}{2*\pi} * d\varphi \ * \ q_2}{R^2} = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0} * \frac{q_1*q_2}{2*\pi*R^2} * d\varphi$$

Проинтегрировав по всем углам, получим:

$$F = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0} * \frac{q_1*q_2}{2*\pi*R^2} * (2*\pi) = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0} * \frac{q_1*q_2}{R^2}$$

Численно

$$F = \frac{1}{4*\pi*\frac{1}{4*\pi*9*10^9}\frac{\text{кулон}^2}{\text{ньютон}*\text{м}^2}} * \frac{4*10^{-8}*3*10^{-2}\,\text{кулон}^2}{(5*10^{-2})^2\,\text{м}^2} = 4.32*10^3\,\text{ньютон}$$

Ответ: Сила, действующая на кольцо со стороны второго заряда равна 4.32 килоньютон.

Задача. Из точки на поверхности бесконечно длинного отрицательно заряженного цилиндра ($\tau = 20\frac{\text{нКл}}{\text{м}}$)вылетает электрон $v_0 = 0$. Определить кинетическую энергию T электрона в точке r, находящейся на расстоянии 9R от поверхности цилиндра, где R - его радиус.

Решение: Напряженность поля бесконечно длинного цилиндра в направлении, перпендикулярном цилиндру равна

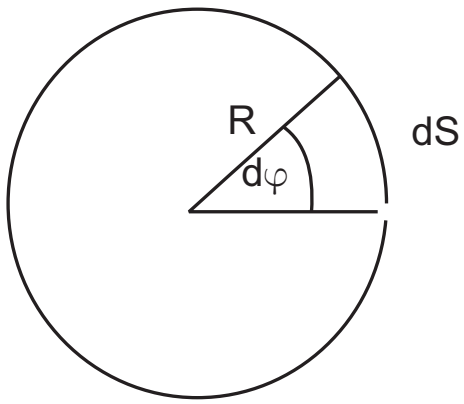
$$E = \frac{\tau}{2*\pi*\varepsilon_0} * \frac{1}{r} \tag{3.1}$$

Здесь ε_0 - электрическая постоянная. Соответственно, сила, действующая на электрон со стороны цилиндра, равна

$$F = e*E = \frac{e*\tau}{2*\pi*\varepsilon_0} * \frac{1}{r}$$

Запишем второй закон Ньютона

$$m_e * \frac{dv}{dt} = F$$



В этом законе ускорение dv/dt умножается на массу электрона m_e. Преобразуем приведенное выражение, чтобы исключить время в явном виде.

$$m_e * \frac{dv}{dr} * \frac{dr}{dt} = m_e * v * \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} * m_e * \frac{dv^2}{dr} = F$$

Подставим в это равенство выражение для силы, проинтегрируем в пределах от R до 9*R и получим сразу кинетическую энергию электрона на указанном расстоянии

$$K = \frac{1}{2} * m_e * v^2 = \frac{e * \tau}{2 * \pi * \varepsilon_0} * \int_R^{9*R} \frac{1}{r}\, dr = \frac{e * \tau}{2 * \pi * \varepsilon_0} * \ln(r)|_R^{9*R} =$$
$$= (\text{ по правилу Ньютона - Лейбница) } =$$
$$= \frac{e * \tau}{2 * \pi * \varepsilon_0} * (\ln(9 * R) - \ln(R)) = \frac{e * \tau}{2 * \pi * \varepsilon_0} * \ln\left(\frac{9 * R}{R}\right) =$$
$$= \frac{e * \tau}{2 * \pi * \varepsilon_0} * \ln 9$$

Подставим числовые значения

$$K = \frac{1.6\,\text{Кл} * 20 * 10^{-9}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}}}{2 * (\frac{1}{36*\pi*10^9}\,\frac{\text{Кл}^2}{\text{н}*\text{м}^2})} * \ln 9 = \frac{32 * 36 * \ln(9) * 10^{18}}{2}\,\text{н} * \text{м} =$$
$$= 1265.6 * 10^{18}\,\text{джоуль}$$

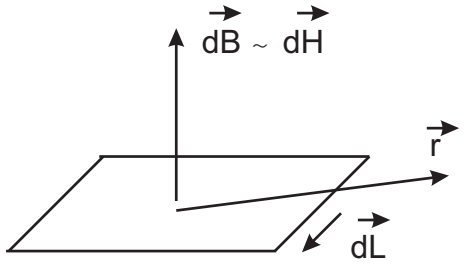
Ответ: Кинетическая энергия электрона на расстоянии 9R от заряженного цилиндра равна $1265.6 * 10^{18}$ джоуль

Задача. Из проволоки длиной 1 м сделана квадратная рамка. По этой рамке течет ток силой 10 А. Найти напряженность магнитного поля в центре рамки.

Решение: Направление вектора магнитной индукции (пропорционального вектору напряженности магнитного поля) мы определим по закону Био-Савара-Лапласа, в котором вектор индукции $\overrightarrow{B}$ пропорционален

$$[\overrightarrow{dL}, \overrightarrow{r}]$$

Направление магнитного поля видно из рисунка.



Величину напряженности мы определим первоначально для одной стороны

квадрата по формуле (Яворский Б.М., Детлаф А.А., Справочник по физике, IV.6)

$$H = \frac{1}{4*\pi} * \frac{I}{r} * (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))$$

где I - величина тока, а углы показаны на рисунке
Численно

$$H = \frac{1}{4*\pi} * \frac{10\,\text{А}}{0.5\,\text{м}} * (\cos(45^\circ) - \cos(135^\circ)) = 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{20}{4*\pi}\,\frac{\text{А}}{\text{м}} = 2.251\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$$

Поле, создаваемое всеми сторонами квадрата в четыре раза больше.

Ответ: Величина напряженности магнитного поля равна 9.004 $\frac{\text{А}}{\text{м}}$

Задача. В поле бесконечно длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток $J_1 = 20$ ампер, находится квадратная рамка со стороной $L = 10$ см, по которой идет ток $J_2 = 1$ ампер. Проводник и рамка расположены в одной плоскости так, что две стороны рамки перпендикулярны к проводнику. Расстояние от проводника до ближайшей стороны рамки R = 5 см. Определить силу, действующую на рамку.

Решение: Сила Ампера, действующая на участок с током, перпендикулярном полю равна (Яворский Б.М., Детлаф А.А., Справочник по физике IV.6)

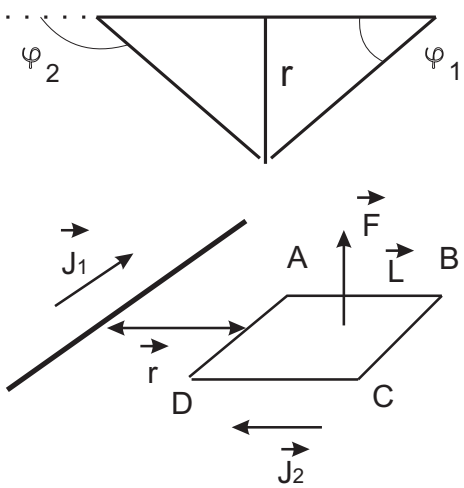
$$F_1 = J_2 * L * B(r)$$

Для бесконечно длинного проводника с током индукция магнитного поля численно равна

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4*\pi} * \frac{2*J_1}{r}$$

Участки AB и CD силы не создают. За счет изменения магнитной индукции участки BC и DA создают силу Ампера

$$F = \frac{\mu_0}{4*\pi} * 2 * J_1 * J_2 * L * \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+L}\right) = \frac{2*\mu_0*J_1*J_2*L^2}{4*\pi*r*(r+L)}$$



Численно

$$F = \frac{2 * (4 * \pi * 10^{-7}\,\frac{\text{генри}}{\text{м}}) * 20\,A * 1\,A * (0.1\,\text{м})^2}{4 * \pi * 0.05\,\text{м} * (0.05 + 0.1)\,\text{м}}$$

Размерность

$$\frac{\text{генри}}{\text{м}} * A^2 * \frac{\text{м}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{вольт*с}}{\text{м*ампер}} * (\text{ампер})^2 =$$
$$\frac{\text{в*а*с}}{} = \frac{\text{дж}}{\text{кл}} * \frac{\text{кл}}{\text{с}} * \text{с} = \ = \text{ньютон}$$

Ответ: Сила,действующая на рамку со стороны проводника с током равна $F = 5.333 * 10^{-7}$ ньютон

Задача. Электрон в однородном магнитном поле с индукцией B = 0.1 Тл движется по окружности. Найти силу J эквивалентного кругового тока, создаваемого движением электрона.

Решение: Сила Лоренца, создаваемая движущимся электроном

$$F = e * v * B$$

где e - заряд электрона, v - его скорость при движении по окружности, B - индуктивность магнитного поля. Эта сила должна уравновешиваться центробежной силой

$$F_{\text{ц}} = m * \frac{v^2}{R}$$

где R - радиус окружности. Приравняв

$$e * v * B = m * \frac{v^2}{R}$$

получим скорость вращения

$$v = \frac{e * B * R}{m}$$

Умножим последнее равенство на $2 * \pi$, чтобы перейти к длине окружности $S = 2 * \pi * R$. Отсюда

$$2 * \pi * v = \frac{e * B * S}{m}$$

что, после выкладок приводит к времени одного оборота

$$T = \frac{S}{v} = \frac{2 * \pi * m}{e * B}$$

Ток - это количество заряда в единицу времени, то есть искомый эквивалентный ток равен

$$J = \frac{e}{T} = \frac{e^2 * B}{2 * \pi * m}$$

Численно

$$J = \frac{(1.6 * 10^{-19}\,\text{Кл})^2 * 0.1\,\text{тл}}{2 * \pi * 9.1 * 10^{-31}\,\text{кг}} = \frac{(1.6 * 10^{-19})^2 * 0.1}{2 * \pi * 9.1 * 10^{-31}}\,\frac{\text{кл}^2 * \text{тл}}{\text{кг}}$$

Размерность

$$\frac{\text{кл}^2 * \text{тл}}{\text{кг}} = \frac{(\text{а*с})^2 * \frac{\text{н}}{\text{а*м}}}{\text{кг}} = \text{а} * \frac{\text{н} * \text{с}^2}{\text{м} * \text{кг}} = \text{а}$$

Ответ: Эквивалентный ток равен J $= 4.477 * 10^{-10}$ ампер.

Задача. Показать, что электрическое поле, образованное заряженным диском в предельных случаях переходит в электрическое поле а) бесконечной заряженной плоскости, б) в поле точечного заряда.

Решение: Электрическое поле диска направлено вдоль вектора наблюдения $\overrightarrow{r}$ и имеет численное значение

$$E = \frac{\sigma}{2 * \varepsilon_0} * \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right)$$

где r - расстояние от точки набдюдения до центра диска, R - радиус диска, σ - поверхностная плотность заряда на диске. Для бесконечной заряженной плоскости

$$\lim_{R \to \infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} = 0$$

и модуль электрического поля диска переходит в электрическое поле бесконечной плоскости

$$E_{\text{плоскости}} = \frac{\sigma}{2 * \varepsilon_0}$$

Рассмотрим вариант перехода к точечному заряду. При этом

$$\frac{R}{r} \ll 1$$

где знак $\ll$ означает "много меньше". Если радиус диска много меньше расстояния до точки наблюдения, то дробь можно разложить в ряд Маклорена

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} = \frac{r}{r\sqrt{1 + \frac{R^2}{r^2}}} = \frac{1}{1\sqrt{1 + \frac{R^2}{r^2}}} \approx 1 - \frac{1}{2} * \frac{R^2}{r^2}$$

Тогда с точность до малых более высокого порядка

$$1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} = \frac{1}{2} * \frac{R^2}{r^2}$$

и выражение для значения напряженности примет вид

$$E = \frac{\sigma}{4 * \varepsilon_0} * \frac{R^2}{r^2}$$

Умножим числитель и знаменатель последней дроби на π.

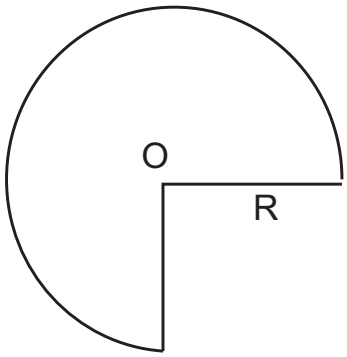
$$E = \frac{\sigma}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{\pi * R^2}{r^2}$$

Учтем, что $S = \pi * R^2$ - площадь диска, а $q = \sigma * S$ - заряд на диске. Соответственно, модуль напряженности равен

$$E = \frac{q}{4 * \pi * \varepsilon_0 * r^2}$$

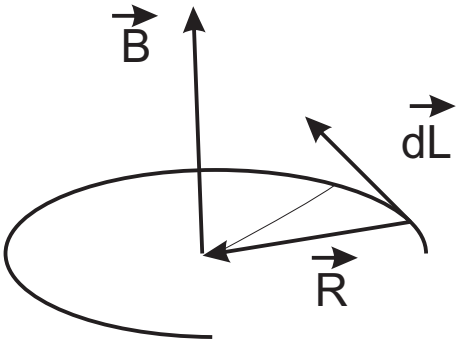
Как нетрудно заметить - последняя формула - это представление напряженности поля для точечного заряда.

Задача: Ток J = 5 ампер течет по тонкому, замкнутому проводнику. Радиус изогнутой части проводника R = 12 см., угол $2 * \varphi = 90°$. Найти магнитную индукцию в точке O.



По закону Био-Савара-Лапласа индукция магнитного поля $\overrightarrow{dB}$ от элементарного участка $\overrightarrow{dL}$ находящегося на расстоянии $\overrightarrow{R}$ от места измерения, расчитывается по формуле векторного произведения

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{J}{R^3} [\overrightarrow{dL}\,,\ \overrightarrow{R}]$$



С учетом постоянства направления векторов, мы по правилу определения направления векторного произведения (или по "правилу буравчика") определим

в условиях рисунка как ориентировано магнитное поле. Вычислим теперь величину ее индукции.Элементарная длина участка окружности равна

$$dL = R * d\varphi$$

Тогда значение индукции будет следующим:

$$dB = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{J}{R^3} * (R * d\varphi) * R = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{J}{R} * d\varphi$$

Осталось проинтегрироватьпо углу

$$\int_0^{\frac{3}{2}*\pi} d\varphi = \frac{3}{2} * \pi$$

Искомая величина индукции равна

$$B = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{J}{R} * \frac{3}{2} * \pi = \frac{3}{8} * \mu_0 * \frac{J}{R}$$

Численно

$$B = \frac{3}{8} * 4 * \pi * \text{м} * \text{кг} * \text{с}^{-2} * \text{а}^{-2} * \frac{5\,\text{а}}{0.12\,\text{м}} =$$
$$= 196.35\,\frac{\text{ньютон}}{\text{ампер} * \text{м}} = 196.35\,\text{тесла}$$

Ответ: Индуктивность магнитного поля равна B = 196.35 тл

Задача: Имеется N одинаковых гальванических элементов с э.д.с "E"и внутренним сопротивлением "r"каждый. Из этих элементов требуется собрать батарею, состоящую из нескольких параллельных соединенных групп, содержащих по "n"последовательно элементов . При каком значении "n"сила тока "J"во внешней цепи, имеющей сопроивление "R", будет максимальной ? Чему будет равно внутреннее сопротивление R_{int} при этом значении?

Решение: Схема будет выглядеть следующим образом. Внутри каждой группы по условию "n"элементов - сопротивлений "r"и э.д.с. "E", а число групп равно $\frac{N}{n}$, так общее число элементов "N"необходимо разбить на "n"элементов в каждой группе.
Ток в каждой отдельной ветви равен

$$\frac{E * n}{r * n} = \frac{E}{r}$$

На выходе токи всех цепей по закону Кирхгофа складываются. То есть, общий ток, выходящий из системы равен

$$J = \frac{E}{r} * \frac{N}{n}$$

Ясно, что этот ток будет максимальным, когда каждая ветвь содержит по одному элементу, то есть когда знаменатель имеет минимальное значение n=1. При этом условии найдем внутреннее сопротивление представленной группы. По формуле расчета параллельного соединения

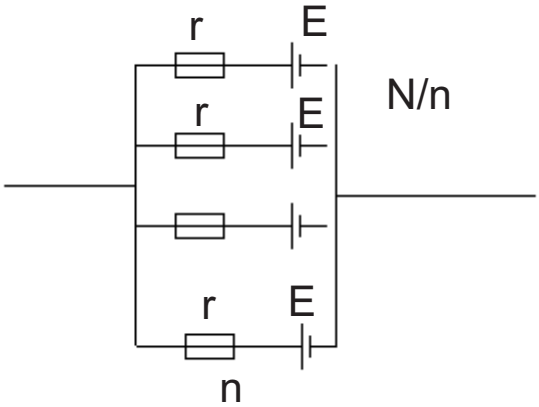
$$\frac{1}{R_{int}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + ... (\texttt{N раз}) + \frac{1}{r} = \frac{N}{r}$$

Отсюда, внутреннее сопротивление батереи равно

$$R_{int} = \frac{r}{N}$$

Задача. Две одноименно заряженные частицы с зарядами Q_1 и Q_2 сближаются с большого расстояния. Векторы скоростей v_1 и v_2 лежат на одной прямой. Определить минимальное расстояние r_{min}, на которое могут подойти друг к другу частицы, если их массы соответственно равны m_1 и m_2.

Решение: Шарики обладают кинетической энергией и в тот момент, когда потенциальная энергия отталкивания (потенциал) компенсирует эту кинетическую энергию между шариками образуется минимальное расстояние. Про кинетическую энергию необходимо сказать особо. Дело в том, что шарики во время движения образуют замкнутую систему со своим центром масс. При этом кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии цента масс н сумм кинетических энергий шаров в ц-системе, то есть в системе цента масс. Первую часть энергии компенсировать с помощью потенциала не обязательно. Представим себе, что шары перемещаются в вагоне друг относительно друга. Электрическое отталкивание остановит шары внутри вагона, но сам вагон (то есть центр масс может продолжать движение). Следовательно, нас интересуют только скорости шаров в ц-системе (системе центра масс).
По Яворский Б.М., Детлаф А.А., Справочник по физике, раздел I.2.3 скорости



шаров в системе центра масс равны

$$v_{\text{ц.м. } 1} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} * v;$$
$$v_{\text{ц.м. } 2} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} * v;$$

где

$$v = v_1 + v_2$$

скорость сближения шаров. Полная кинетическая энергия шаров в системе центра масс равна

$$K = \frac{1}{2}\left\{m_1 * v^2_{\text{ц.м. } 1} + m_2 * v^2_{\text{ц.м. } 2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2*(m_1+m_2)^2} * v^2 * [m_1 * m_2^2 + m_1^2 * m_2] = \frac{m_1 * m_2 * (m_1 + m_2) * v^2}{2*(m_1+m_2)^2} =$$
$$= \frac{m_1 * m_2}{2*(m_1+m_2)} * v^2 = \frac{m_1 * m_2}{2*(m_1+m_2)} * (v_1 + v_2)^2$$

На минимальном расстоянии эта кинетическая энергия уравновешивается потенциальной энергией отталкивания однозарядных шаров

$$U = \frac{Q_1 * Q_2}{4 * \pi * \varepsilon_0 * r_{min}}$$

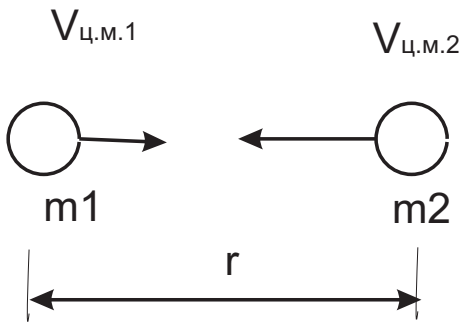
Приравняем оба типа энергии

$$\frac{m_1 * m_2}{2*(m_1+m_2)} * (v_1 + v_2)^2 = \frac{Q_1 * Q_2}{4 * \pi * \varepsilon_0 * r_{min}}$$

Отсюда

$$r_{min} = \frac{Q_1 * Q_2}{2 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 * m_2} = \frac{Q_1 * Q_2}{2 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{(1 + \frac{m_1}{m_2})}{m_1}$$

Задача. Определить индукцию магнитного поля в точке "O"проводника с током J. Радиус изогнутой части проводника - R.



Решение: По закону Био-Савара-Лапласа индукция магнитного поля $\overrightarrow{dB}$ от элементарного участка $\overrightarrow{dL}$ находящегося на расстоянии $\overrightarrow{R}$ от места измерения, расчитывается по формуле векторного произведения

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{J}{R^3} [\overrightarrow{dL}\,,\ \overrightarrow{R}]$$

Здесь

$$\mu_0 = 4 * \pi * 10^{-7}\,\frac{\texttt{генри}}{\texttt{метр}} = 1.26 * 10^{-6}\,\frac{\texttt{генри}}{\texttt{метр}}$$

- магнитная постоянная.

В связи с тем, что на окружности элнментарный вектор $\overrightarrow{dL}$ направлен перпендикулярно радиусу, мы по правилу определения направления векторного произведения (или по "правилу буравчика") найдем в условиях рисунка как ориентировано магнитное поле $\overrightarrow{B}$. Вычислим теперь величину индукции магнитного поля.Элементарная длина участка окружности равна

$$dL = R * d\varphi$$

Тогда значение индукции будет следующим:

$$dB = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{J}{R^3} * (R * d\varphi) * R = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{J}{R} * d\varphi$$

Осталось проинтегрироватьпо углу

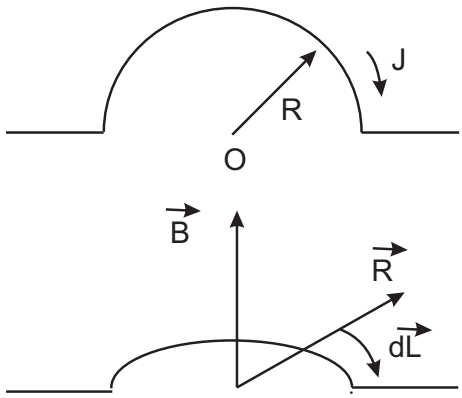
$$\int_0^{\pi} d\varphi = \pi$$

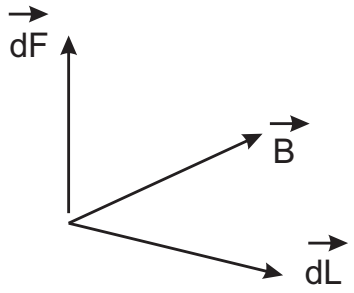
Величина индукции равна

$$B = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{J}{R} * \pi = \frac{1}{4} * \mu_0 * \frac{J}{R}$$

Ответ: Величина индукции магнитного поля равна

$$B = \frac{\mu_0 * J}{4 * R}$$





Задача. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0.1 Тл находится прямой медный проводник сечения S = 8 мм^2, концы которого подключены гибким проводом, находящемся вне поля, к источнику постоянного тока. Определить величину тока в проводнике, если известно, что при расположении его перпендикулярно к линиям индукции поля, вес проводника уравновешивается силой, действующей на проводник со стороны поля.

Решение: Силу, действующую со стороны магнитного поля на проводник с током называют *силой Ампера*. Элементарная сила Ампера $\overrightarrow{dF}$, действующая на малый элемент $\overrightarrow{dL}$ длины проводника, по которому идет электрический ток "J", равна

$$\overrightarrow{dF} = J * [\overrightarrow{dL}, \overrightarrow{B}]$$

где $\overrightarrow{dL}$- вектор, численно равный длине dL элемента проводника и направленный в ту же сторону, что и ток.

При конфигурации, указанной на рисунке сила Ампера действует вертикально вверх и равна численно

$$F = J * L * B$$

где L - длина участка проводника, находящегося в магнитном поле. Эта сила уравновешивается весом того же участка, выражаемым формулой

$$\texttt{Вес} = \texttt{плотность меди} * \texttt{Объем участка}$$

Здесь "объем участка"равен длине L, умноженной на площадь поперечного сечения S. Окончательно, при ускорении свободного падения "g"

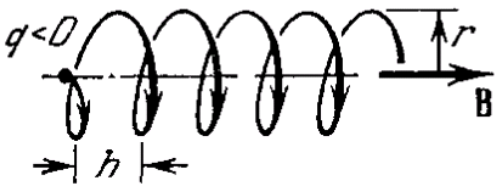
$$P = g * \varrho * L * S$$

при плотности меди $\varrho = 8960\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ - Енохович А.С., "Краткий справочник по физике", М., "Высшая школа", 1976, таблица 28. Приравнивая, получим

$$J * L * B = g * \varrho * L * S$$

Сократим длину L. Тогда

$$J = \frac{g * \varrho * S}{B}$$



Численно

$$J = \frac{9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} * 8960\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} * 8 * (10^{-3})^2 * \text{м}^2}{0.1\text{Тл}} = 702562 * 10^{-5}\frac{\text{кг*м}}{\text{м} * \text{с}^2 * \frac{\text{н}}{\text{а*м}}} = 7.026\text{а}$$

Ответ: По участку проводника должен распространяться ток J = 7.026 ампер.

Задача. Электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Скорость электрона $v = 4 * 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Индукция магнитного поля равна $B = 10^{-3}$ Тл. Чему равны тангенциальное и нормальное ускорения в магнитном поле.

Решение: Согласно Яворский Б.М., Детлаф А.А., Справочник по физике, Глава 7 - "Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях", сила Лоренца вызывает вращение электрона с периодом

$$T = \frac{2 * \pi}{B} * \frac{m}{e}$$

где B - величина индукции магнитного поля, m,e - масса и заряд электрона. При этом радиус вращения задается формулой

$$R = \frac{m}{q} * \frac{v}{B}$$

Здесь v - скорость, с которой электрон влетает в магнитное поле.

Из первой формулы мы определяем угловую скорость вращения

$$\omega = \frac{2 * \pi}{T} = \frac{2 * \pi}{\frac{2*\pi}{B} * \frac{m}{e}} = \frac{e * B}{m}$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 * R = \frac{(e * B)^2}{m^2} * \frac{m}{q} * \frac{v}{B} = \frac{e * B * v}{m}$$

Численно

$$a_n = \frac{1.6 * 10^{-19}\,\text{Кл} * 10^{-3}\,\text{Тл} * 4 * 10^7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{9.1 * 10^{-31}\,\text{кг}}$$

Размерность

$$\frac{\text{Кл} * \frac{\text{м}}{\text{с}} * \frac{\text{н*а}}{\text{м}}}{\text{кг}} = \frac{\text{а*с} * \frac{\text{м}}{\text{с}} * \frac{\text{н*а}}{\text{м}}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Ответ: Нормальное ускорение электрона равно

$$a_n = 0.703 * 10^{16} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

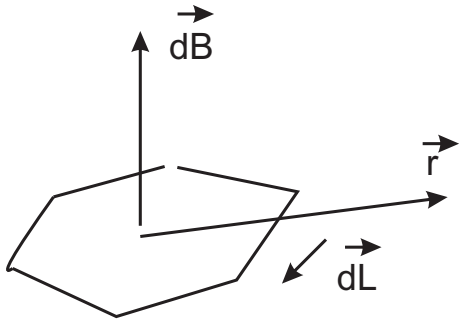
Тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$, так как угловая, а значит и линейная скорость электрона вдоль окружности не меняется со временем.

Задача 1. Тонкий провод, изогнутый в виде правильного шестиугольника. Длина d стороны шестиугольника равна 10 см. Определить магнитную индукцию в центре шестиугольника, если по проводу течет ток силой J = 25 А.

Решение: Направление вектора магнитной индукции (пропорционального вектору напряженности магнитного поля) мы определим по закону Био-Савара-Лапласа, в котором вектор индукции $\overrightarrow{B}$ пропорционален

$$[\overrightarrow{dL}, \overrightarrow{r}]$$

Направление магнитного поля видно из рисунка.



Величину индукции мы определим первоначально для одной стороны шестиугольника по формуле (Яворский Б.М., Детлаф А.А., Справочник по физике, IV.6)

$$B = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{I}{r} * (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))$$

где I - величина тока, μ_0 - магнитная постоянная, равная $4 * \pi * 10^{-7}$ Гн/м, а углы показаны на рисунке

Кроме того,

$$r = \frac{a}{2} * tg(60^\circ) = \frac{0.1\,\text{м}}{2} * \sqrt{3} = 0.087\text{м}$$

Численно с учетом $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ и $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ мы получим

$$B = \frac{4 * \pi * 10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}}{4 * \pi} * \frac{25\,\text{А}}{0.087\,\text{м}} * (\cos(60^\circ) - \cos(120^\circ)) = 10^{-7} * \frac{25}{0.087}\,\frac{\text{Гн*А}}{\text{м}^2}$$
$$= 0.2874 * 10^{-4}\,\frac{\text{Гн*А}}{\text{м}^2}$$

Преобразуем размерность

$$\frac{\text{Гн*А}}{\text{м}^2} = \frac{\frac{\text{вольт*с}}{\text{А}}\text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{в*с}}{\text{м}^2} = \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{кулон}} * \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} * \text{м}^2} =$$
$$\frac{\text{ньютон} * \text{м}}{\text{А} * \text{м}^2} = \frac{\text{ньютон}}{\text{А} * \text{м}} = \text{Тесла}$$

Поле, создаваемое всеми сторонами шестиугольника в шесть раз больше.
Ответ: В центре шестиугольника индуктивность магнитного поля равна $0.2874 * 10^{-4}$ Тл

Задача 2. Два прямолинейных длинных проводника, по которым текут равные токи в одном направлении, расположены параллельно на некотором расстоянии друг от друга. Какой ток течет по проводникам, если для удаления проводников на вдвое большее расстояние нужно совершить (на единицу длины) работу равную $5.5 * 10^{-5}$ Дж/м?
Решение: Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении проводника с постоянным током равна (Б.М.Яворский,А.А.Детлаф, "Справочник по физике", IV. 6.6)

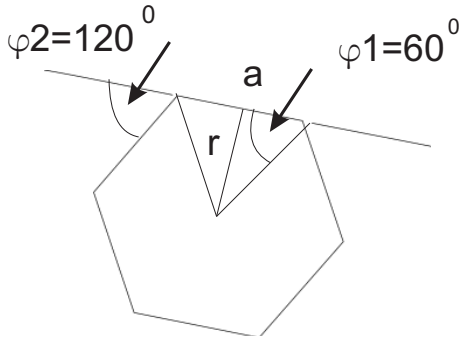
$$A = I * \Phi$$

Согласно рисунку поток через площадь, заметаемую длинной проводника H равен

$$\Phi = B * H * L$$

Здесь геометрические величины показаны на рисунке, а индуктивность магнитного поля, создаваемого соседним бесконечным проводом, равна

$$B = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{2 * I}{L}$$



Подставим все представленные значения в формулу работы. Получим:

$$A = I * \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{2 * I}{L} * H * L$$

Возникнет следующее значение работы на единицу длины

$$\frac{A}{H} = I^2 * \frac{\mu_0}{2 * \pi}$$

Отсюда значение тока в проводниках

$$I = \sqrt{\frac{2 * \pi * \frac{A}{H}}{\mu_0}}$$

Численно:

$$I = \sqrt{\frac{2 * \pi * 5.5 * 10^{-5}\ \frac{\text{дж}}{}}{4 * \pi * 10^{-7}\ \frac{\text{генри}}{\text{м}}}} = \sqrt{\frac{550}{2} * \frac{\text{джоуль}}{\text{генри}}}$$

Преобразуем единицу измерения "генри"

$$\text{генри} = \frac{\text{вольт*с}}{\text{ампер}} = \frac{\text{джоуль}}{\text{кулон}} * \frac{\text{с}}{\frac{\text{кулон}}{\text{с}}} = \frac{\text{дж} * \text{с}^2}{\text{кл}^2} = \frac{\text{дж}}{\text{А}^2}$$

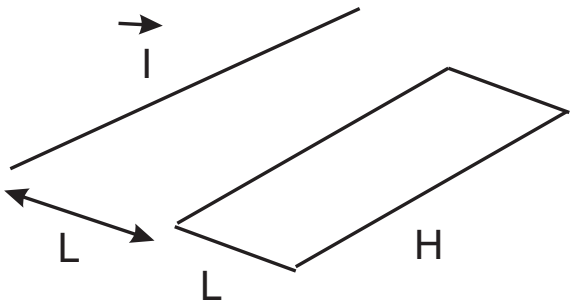
Ответ: Ток в проводниках равен I = 16.58 ампер.

Задача 3. Плоская рамка площадью $4 * 10^{-4}\,\text{м}^2$ расположена в магнитном поле так, что нормаль к рамке составляет с направлением поля угол $60\,^\circ$. Индукция магнитного поля изменяется по закону

$$B(t) = 0.5 * (1 + e^{-t})\,\text{Тл}$$

По истечении 4 с определите величину ЭДС индукции, возникающей в рамке и разность потенциалов между двумя произвольными точками рамки.
Решение: По закону электромагнитной индукции Фарадея возникающая э.д.с. в рамке равна

$$E = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$



где Φ_m - нормальная составляющая потока магнитного поля через поверхность. В нашем случае

$$\Phi_m = B * S * \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} * B * S = \frac{1}{2^2} * (1 + e^{-t}) * S$$

Соответственно, э.д.с. равна с учетом $(e^{-t})' = -(e^{-t})$

$$E(t) = -\frac{1}{4} * (-e^{-t}) * 4 * 10^{-4} \frac{\text{Тл} * \text{м}^2}{\text{с}}$$

Размерность

$$\frac{\text{Тл} * \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{н}}{\text{А*м}} * \frac{\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{н*м}}{\text{А*с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А*с}} = \frac{\text{в*к}}{\text{А*с}} = \frac{\text{в*к}}{\text{к}} = \text{вольт}$$

Итак, э.д.с. в контуре численно в любой момент времени равна

$$E(t) = 10^{-4} * e^{-t}\,\text{в}$$

По истечении четвертой секунды э.д.с. равна

$$E(t) = 10^{-4} * e^{-4}\,\text{в} = 1.832 * 10^{-6}\,\text{в}$$

Разность потенциалов на любом участке контура равна э.д.с., то есть в конце четвертой секунды равна $1.832 * 10^{-6}$ в вольт.

Задача 4. Два иона, имеющие одинаковый заряд, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион начал двигаться по окружности $R_1 = 5$ см, второй ион - по окружности $R_2 = 2.5$ см. Найти отношение масс m_1/m_2 ионов, если они пролетели одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

Решение: Сила Лоренца заставляет ион, влетающий под прямым углом в магнитное поле, вращаться по радиусу - Б.М.Яворский,А.А.Детлаф, "Справочник по физике", Глава 7.

$$R = \frac{m * v}{|q| * B}$$

Здесь m - масса иона, v - его скорость, q - электрический заряд, B - магнитная индукция. Так как ионы однозарядны у них одинаковый заряд q. Для ускоряющей разности потенциалов U выполняется следующее равенство, включающее кинетическую энергию вылетающего иона:

$$\frac{m * v^2}{2} = U$$

Отсюда скорость иона равна

$$v = \sqrt{\frac{2 * U}{m}}$$

Подставим это значение в равенство для радиуса

$$R = \frac{m * \sqrt{\frac{2*U}{m}}}{|q| * B} = \frac{\sqrt{2 * U * m}}{|q| * B}$$

При одинаковых U,q,B мы получим следующее отношение

$$\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

или, после возведения в квадрат

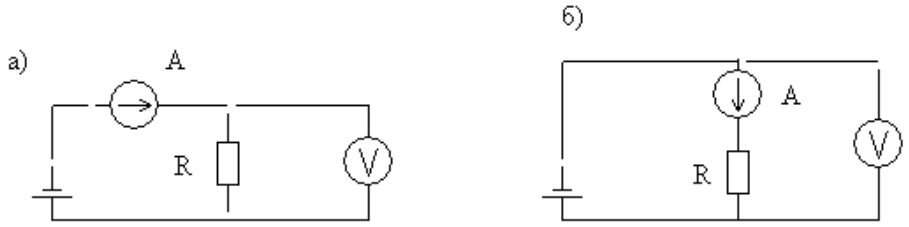
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

По условию задачи $R_1/R_2 = \frac{5\ \text{см}}{2.5\ \text{см}} = 2$ Отсюда

$$\frac{m_1}{m_2} = 2^2 = 4$$

Ответ: Масса первого иона больше массы второго иона в четыре раза.

Задача 5. Какая из схем (а,б) более пригодна для измерения больших сопротивлений? Вычислить погрешность, допускаемую при измерении с помощью этих схем сопротивлений $R_1 = 1$ Ком и $R_2 = 10$ Ом. Принять сопротивление вольтметра R_B и амперметра R_A соответственно равными 5 Ком и 2 Ом.
Решение:



Задача 6. В центре кругового прооволочного витка создается магнитное поле "H"при разности потенциалов "U"на концах витка. Как нужно изменить приложенную разность потенциалов, чтобы получить текущую напряженность магнитного поля в центе витка вдвое большего радиуса, сделанного из той же проволоки.
Решение: Магнитное поле в центре кругового витка радиуса L, по которому течет ток J определяется формулой - Б.М.Яворский,А.А.Детлаф, "Справочник по физике", IV 6.3.

$$H = \frac{J}{2 * L}$$

Выразим ток по закону Ома через напряжение U и сопротивление R. Получим

$$H = \frac{U}{2 * L * R}$$

Отсюда при одинаковой напряженности H и сопротивлении R получаем соотношение

$$\frac{U_2}{L_2} = \frac{U_1}{L_1}$$

По условию задачи $L_2 = 2 * L_1$. Тогда $U_2 = 2 * U_1$.

Ответ: Чтобы напряженность магнитного поля осталась прежней при увеличении радиуса витка вдвое необходимо, чтобы электрическое напряжение также увеличилось в этом витке вдвое.

Задача 7. Чему равна механическая мощность, развиваемая при перемещении прямолинейного проводника длиной 20 см со скоростью 5 м/с в однородном магнитном поле с индукцией 0.1 Тл, если угол между направлением линий магнитной индукции равен 90 °, а величина тока в проводнике 50 А?

Решение: Работа перемещения проводника с током в магнитном поле вычисляется по формуле

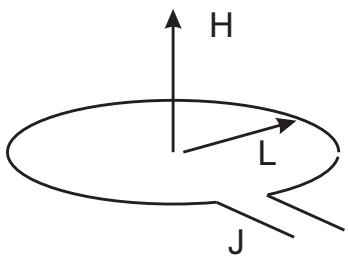
$$dA = J * d\Phi = J * B * dS = J * B * a * v * dt$$

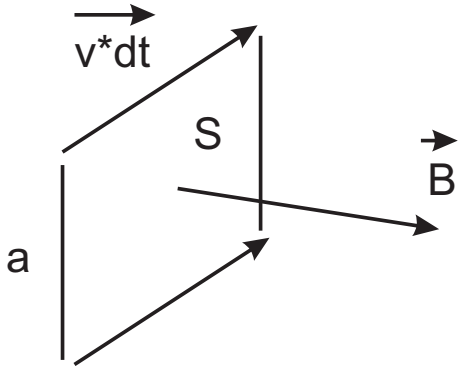
Так как исследуется мощность, то dt = 1 сек. Численно:

$$dA = 50\,\text{А} * 0.1\,\text{Тл} * 0.2\,\text{м} * 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}} * 1\,\text{с} = 50\,\text{м}^2 * \frac{\text{Н}}{\text{А*м}} * \text{А} = 5\,\text{Н*м} = 5\,\text{Дж}$$

Ответ: Механическая мощность развиваемая при перемещении проводника с током в магнитном поле равна $5\,\frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 5$ Ватт.

Задача 8. Заряженная частица двигаясь в магнитном поле по дуге с радиусом $R_1 = 2$ см, прошла через свинцовую пластину, расположенную на пути частицы. Вследствие потери энергии частицей радиус кривизны траектории изменился и стал равным $R_2 = 1$ см. Определить относительное изменение энергии частицы.





Решение: Сила Лоренца, действующая на частицу , заставляет ее вращаться по радиусу - Б.М.Яворский,А.А.Детлаф, "Справочник по физике", Глава 7.

$$R = \frac{m * v}{|q| * B}$$

Квадраты радиусов равны

$$R^2 = \frac{2 * m * \frac{m*v^2}{2}}{|q| * B} = \frac{2 * m * K}{|q| * B}$$

где K - кинетическая энергия частицы. Так как масса частицы m, заряд частицы q и индуктивность магнитного поля B остаются неизменными, то из последней формулы

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{K_2}{K_1}$$

По условию задачи $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$\frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Ответ: Энергия частицы уменьшилась в четыре раза.

Задача 9. Плоскость проволочного витка площадью $S = 100\,\text{см}^2$ и сопротивлением $R = 5$ ом,находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 10$ Ка/м, перпендикулярно линиям магнитной индукции. При повороте витка в магнитном поле отсчет гальванометра, замкнутого на виток, составляет $q = 12.6$ мкКл. Определите угол поворота витка.

Решение: По закону Ома ток

$$J = \frac{E}{R}$$

По закону Фарадея

$$E = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Для промежутка времени $\Delta\, t$ с учетом того, что в начальный магнитный поток $\Phi = B * S * \cos(90°) = 0$ последняя производная равна

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{-0 - B * S * \cos(\alpha)}{\Delta\, t}$$

Объединив все формулы, получим:

$$J = \frac{B * S * \cos(\alpha)}{R * \Delta\, t}$$

Отсюда величина заряда, возникшая в контуре имеет значение

$$q = J * \Delta\, t = \frac{B * S * \cos(\alpha)}{R}$$

На основе последнего равенства вычислим угол поворота рамки

$$\cos(\alpha) = \frac{q * R}{B * S}$$

Подставим данные из условия

$$\cos(\alpha) = \frac{12.6 * 10^{-6}\text{Кл} * 5\,\text{ом}}{\mu_0 * 10 * 10^3\,\frac{\text{А}}{\text{м}} * 100 * (10^{-2})^2\,\text{м}^2}$$

Окончательно

$$\cos(\alpha) = \frac{12.6 * 5 * 10^{-8}}{4 * \pi * 10^{-7}}\,\frac{\text{Кл*ом}}{\frac{\text{гн}}{\text{м}} * \text{А*м}}$$

Преобразование размерности

$$\frac{\text{Кл*ом}}{\frac{\text{гн}}{\text{м}} * \text{А*м}} = \frac{\text{Кл*ом}}{\text{А*гн}} = \frac{\text{Кл*ом}}{\text{А} * \frac{\text{в*с}}{\text{А}}} = \frac{\text{Кл*ом}}{\text{в*с}} = \frac{\text{А*ом}}{\text{в}} = \frac{\text{в}}{\text{в}} = 1$$

Таким образом

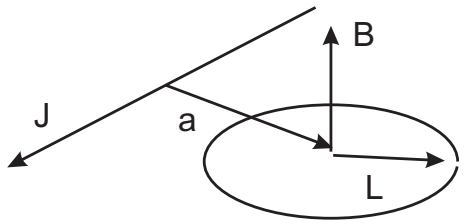
$$\cos(\alpha) = 0.501$$

Учтем, что

$$\cos(60^\circ) = 0.5$$

Ответ: С небольшой погрешностью можно утверждать, что угол поворота проволочного витка составляет 60°.

Задача. На расстоянии a = 1 м от длинного прямого провода с током силой J = 1 кА находится кольцо радиуса L = 1 см. Кольцо расположено так, что поток, пронизывающий его максимален. Определить количество электричества, которое протекает по кольцу, когда ток в проводнике будет выключен. Сопротивление кольца R = 10 ом. Указание: поле в кольце считать однородным.
Решение: Направление магнитного поля мы определили по закону Био-Савара-Лапласа. Точнее мы воспользовались той частью закона, которая называется "правилом буравчика".



Э.д.сЮ возникающее в кольце находится по правилу Фарадея

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

где $\Phi = B * S$ - величина магнитного потока, равного магнитной индукции B, умноженной на площадь кольца S. Формула для потока в данном случае проста, потому что магнитное поле перпендикулярно поверхности кольца. Учтем, что после выключения магнитное поле довольно быстро обращается в ноль. Следовательно, э.д.с в кольце, после замены производной разностным отношением равно

$$E = \frac{1}{\Delta t} * (B(t_1) - B(t_0)) * S = \frac{1}{\Delta t} * B(t_1) * S$$

Используем закон Ома

$$J = \frac{E}{R}$$

Объеденив две предыдущие формулы и умножив их на Δt получим

$$J * \Delta t = \frac{B * S}{R}$$

В эту формулу осталось подставить индуктивность магнитного поля длинного проводника с током

$$B = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{2 * J}{L}$$

Учтем также, что $q = J * \Delta t$- это искомое количество электричества. Тогда

$$q = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * \frac{2 * J * (\pi * a^2)}{L * R}$$

где $\mu_0 = 4 * \pi * 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная. Численно

$$q = 10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}} * \frac{2 * 1000\,\text{А} * (\pi * (1\,\text{м})^2)}{(0.01)\,\text{м} * 10\,\text{ом}}$$

Преобразование единиц измерения

$$\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А*м}}{\text{ом}} = \text{Гн} * \frac{\text{А}}{\text{ом}} = \frac{\text{в*с}}{} * \frac{\text{А}}{\text{ом}} = \frac{\text{в*с}}{\text{ом}} = \text{А*с} = \text{кулон}$$

Окончательно

$$q = 2 * \pi * 10^{-3}\,\text{Кл}$$

Ответ: Количество электричества, прошедшее по кольцу в момент выключения тока равно

$$q = 2 * \pi * 10^{-3}\,\text{Кл}$$

Задача. Вычислить радиус дуги окружности, которую описывает протон в магнитном поле с индукцией B = 15 мТл, если скорость протона v = 2 мм/с.

Решение. Для определения радиуса дуги приравняем центробежную силу

$$F_{\text{ц}} = \frac{m * v^2}{R}$$

к силе Лоренца, удерживающей протон на орбите

$$F_{\text{л}} = q * v * B$$

Получим равенство

$$\frac{m * v^2}{R} = q * v * B$$

из которого срузу вычисляется радиус дуги:

$$R = \frac{m * v}{q * B}$$

Осталось подставить численные значения массы и заряда протона и данные из условия задачи

$$R = \frac{1.673 * 10^{-27}\,\text{кг} * 0.002\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{1.602 * 10^{-19}\,\text{кл} * 15 * 10^{-3}\,\text{тл}} = \frac{1.673 * 2}{1.602 * 15} * 10^{-8}\,\frac{\text{кг*м}}{\text{кл*с*тл}}$$

Вспомним, что

$$\text{тесла} = \frac{\text{ньютон}}{\text{ампер*метр}}$$

Тогда размерности у нас преобразуются следующим образом:

$$\frac{\frac{\text{кг*м}}{\text{с}^2} * \text{с}}{\text{кл} * \frac{\text{н}}{\text{а*м}}} = \frac{\text{н}}{\text{а}} * \frac{\text{а*м}}{\text{н}} = \text{метр}$$

Ответ: Радиус дуги окружности вращения протона в магнитном поле равен 0.139 метра

Задача. В однородном магнитном поле, индукция которого B = 0.5 Тл, движется равномерно проводник длиной 10 см. По проводнику течет ток силой 2 А. Скорость движения проводника - 20 см/с и направлена она перпендикулярно к направлению магнитного поля. Найти

1) работу по перемещения проводника за 10 с. движения.
2) мощность, затраченную на это движение.

Решение. Элементарная работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна

$$dA = J * d\Phi$$

Здесь J - ток в проводнике, Ф - магнитный поток. Согласно рисунку магнитный поток вычисляется следующим образом:

$$d\Phi = B * L * v * dt$$

Итак, работа, выполняемая за время dt равна

$$dA = J * B * L * v * dt$$

Численно за 10 секунд

$$A = 2\,\text{а} * 0.5\,\text{тл} * 0.1\,\text{м} * 0.2\,\frac{\text{м}}{\text{с}} * 10\,\text{с} = 0.2\,\text{а} * \text{тл} * \text{м}^2$$

Проведем преобразование единиц измерения. Учтем, что по определению

$$\text{тл} = \frac{\text{н}}{\text{а*м}}$$

Тогда

$$A = 0.2\,\text{н*м} = 0.2\,\text{джоуля}$$

Ответ1: Работа по перемещению стержня за 10 секунд равна $0.2\,\text{дж}$
Расчитаем теперь мощность, затраченную при движении. Мощность - это работа, совершенная в единицу времени. Другими словами,

$$W = \frac{dA}{dt} = J * B * L * v$$

Для подсчета мощности нам достаточно с существующем варианте поделить работу найденную выше, на 10 секунд. Джоуль за одну секунду - это ватт, поэтому
Ответ 2: Мощность, затраченная на движение стержня равна 0.02 ватт

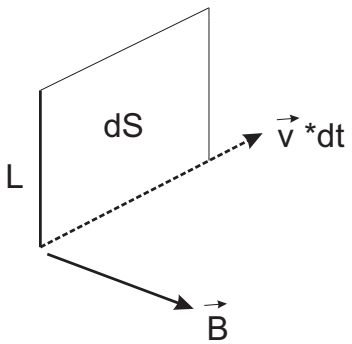
Задача. Металлический стержень длиной 0.5 м движется со скоростью 3 м/с в магнитном поле бесконечного проводника с током 20 А. Стержень и провод расположены в одной плоскости перпендикулярно друг другу, причем ближайший конец стержня удален от проводника на расстоянии 10^{-2} м. Определить разность потенциалов на концах стержня.

Решение. По закону электромагнитной индукции Фарадея э.д.с., возникающая в стержне, а значит и разность потенциалов, равна

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Магнитный поток в общнем случае определен формулой

$$\Phi = \int_{\Omega} B_n\, dS$$



В нашем варианте

$$dS = L * v * dt$$

где L - длина стержня, v - его скорость, dt - элементарный промежуток времени. Таким образом, общий поток через стержень равен за время dt

$$d\Phi = \int B\, dx * v * dt$$

здесь x - направление вдоль стержня. Более детально, интеграл по индукции с учетом поля бесконечного провода с током выглядит следующим образом:

$$B = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * 2 * J * \int_{r_0}^{r_0+L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0}{4 * \pi} * 2 * J * \ln\left(\frac{r_0 + L}{L}\right)$$

С учетом того, что магнитная постоянная равна

$$\mu_0 = 4 * \pi * 10^{-7}\, \frac{\text{гн}}{\text{м}}$$

мы получим следущее значение магнитной индукции

$$B = 2 * J * \ln\left(\frac{r_0 + L}{L}\right) * 10^{-7}$$

Тогда разность потенциалов вычисляется по формуле

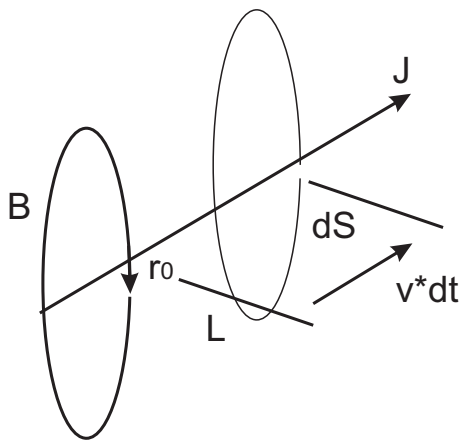
$$U = -2 * J * \ln\left(\frac{r_0 + L}{L}\right) * 10^{-7} * v * \frac{dt}{dt} = -2 * J * \ln\left(\frac{r_0 + L}{L}\right) * 10^{-7} * v$$

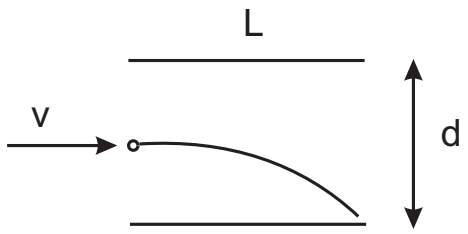
Подставим численные виличины и учтем размерность

$$U = -2 * 20\,\text{а} * \ln\left(\frac{0.01 + 0.5}{0.5}\right) * 3\,\frac{\text{м}}{\text{с}} * \frac{\text{гн}}{\text{м}} = -120 * \ln\left(\frac{0.51}{0.5}\right)\, \frac{\text{гн*а}}{\text{с}}$$

Проведем преобразование единицы измерения индуктивности

$$\text{гн} = \frac{\text{тл} * \text{м}^2}{\text{а}} = \frac{\frac{\text{н}}{\text{а*м}} * \text{м}^2}{\text{а}} = \frac{\text{н*м}}{\text{а}^2} = \frac{\text{дж}}{\text{а*а}} = \frac{\text{дж}}{\frac{\text{кл}}{\text{с}}\text{а}} = \frac{\frac{\text{дж}}{\text{кл}} * \text{с}}{\text{а}} = \frac{\text{в*с}}{\text{а}}$$





и подставим данное значение в предыдущее выражение

$$\frac{\text{гн*а}}{\text{с}} = \frac{\frac{\text{в*с}}{\text{а}} * \text{а}}{\text{с}} = \text{вольт}$$

Итак, разность потенциалов равна

$$U = -120 * \ln\left(\frac{0.51}{0.5}\right) \text{ в}$$

Численно

$$U = -2.376 \text{ в}$$

Ответ: Разность потенциалов (без учета знака) равна $U = 2.376$ в

Задача. С какой силой (на единицу длины) отталкиваются две одновременно заряженных длинные нити с одинаковой линейной плотностью заряда $\tau = 3 * 10^{-6}$ Кл/м, находящиеся в вакууме на расстоянии L = 20 мм друг от друга.

Решение. Напряженность электрического поля бесконечной прямой нити с плотностью тока τ равна

$$E = \frac{\tau}{2 * \pi * \varepsilon_0 * \varepsilon * R} * \frac{\overrightarrow{R}}{R}$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4 * \pi * 9 * 10^9} * \frac{\text{Кл}^2}{\text{н} * \text{м}^2}$$

- электрическая постоянная. R - расстояние от элемента одной нити до элемента другой нити и $\frac{\overrightarrow{R}}{R}$- единичный вектор направления. В силу симметрии все горизонтальные напряженности уравновешивают друг друга. Заряд, приходящейся на единицу длины второй нити равен τ,а, по определению напряженности сила равна

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{E} * q$$

или, в нашем варианте, в направлении, перпендикулярном обоим нитям

$$F = E * \tau = \frac{\tau^2}{2 * \pi * \varepsilon_0 * \varepsilon * L}$$

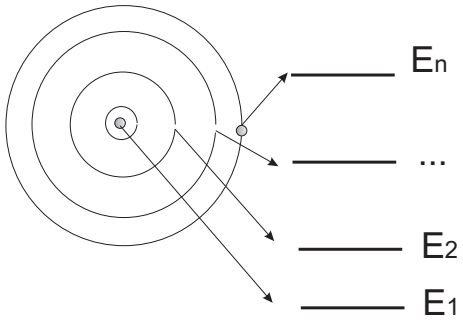
Численно

$$F = \frac{(3*10^{-6})^2\,(\frac{\text{кл}}{\text{м}})^2}{2*\pi*\frac{1}{4*\pi*9*10^9}*\frac{\text{Кл}^2}{\text{н*м}^2}*1*0.02\,\text{м}} = 0.9\,\frac{\text{н}}{\text{м}}$$

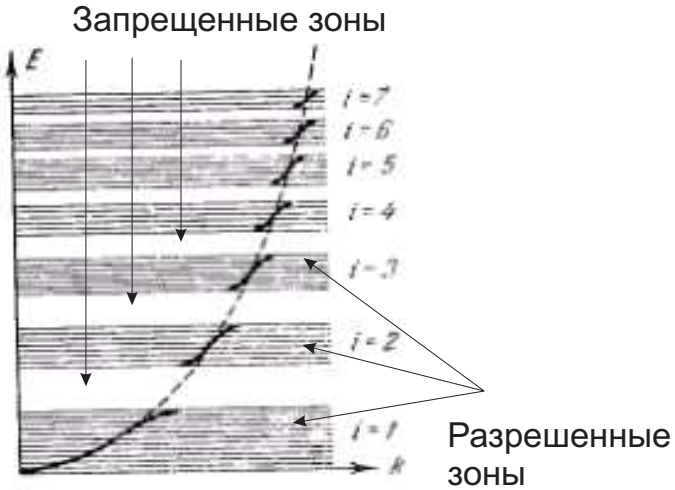
Ответ: Сила, приходящаяся на единицу длины равна $0.9\,\frac{\text{н}}{\text{м}}$

4 Физика Полупроводников

1. Объясните различие энергетических состояний электронов в кристалле и в изолированном атоме.
В изолированном атоме электрон, согласно теории Бора, имеет отдельные квантовые уровни, значительно разделенные между собой В кристалле подобные



уровни располагаются не отдельно, а пачками. Множество энергетических уровней внутри пачки, называется разрешенной зоной, а пространства, разделяющие пачки, называются запрещенными зонами.

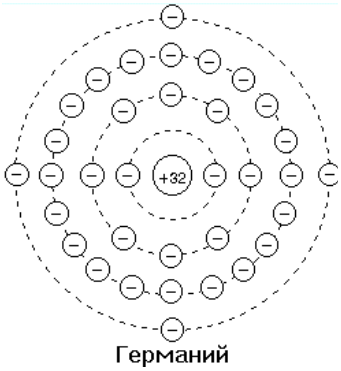


2. Объясните различие в электронных свойствах металлов, диэлектриков и полупроводников с точки зрения зонной теории твердого тела.

В металлах разрешенные зоны (см. ответ є 1) настолько широки, что фактически смыкаются между собой или, даже перекрываются. Это позволяет электронам с самых нижних уровней переходить под воздействием электрического поля практически любой силы переходить на верхние уровни и превращаться в сободно движищиеся электроны, которые переносят ток. В полупроводниках, из-за того, что разрешенные зоны разъдинены достаточно широкими запрещенными зонами, подобный процесс происходит не при любом уровне, а при достаточно большом. В диэлектрике запрещенные зоны настолько широки, что обычные электрические поля не смогут перевести электроны на верхние, свободные уровни.
3;4 - фактически повторение вопроса є 2

Добавление ℵ 1 ко всем дальнейшим вопросам - 5,10,11,12,13,14,и, если, захотите - к вопросам 15-17

Валентность - это способность одного атома объединяться с другими атомами. Существует несколько теорий химических связей, однако большинство из них признает, что связь обеспечивается электронами атома, находящимися на самой внешней оболочке. Возьмем например, атом герммания. Его структура показана на рисунке На внешней оболочке этого атома находится 4 электрона



Германий

- значит атом германия четырехвалентен.

Укажем, как в любом атоме определить число электронов,занимающих внешнюю оболочку. На каждом основном энергетическом уровне с номером "n"согласно принципу запрета Паули может находиться $2 * n^2$ электронов. Составим таблицу Напомним, что принцип запрета Паули утверждает, что в атоме каждый

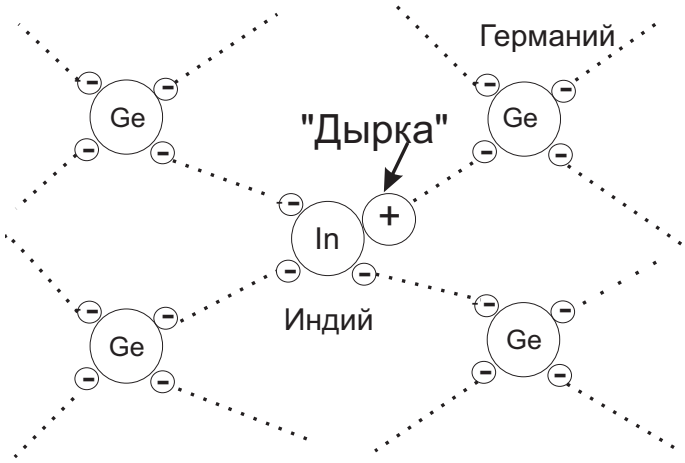
Главное квантовое число "n"	1	2	3	4	5	6	7
n^2	1	4	9	16	25	36	49
Максимальное число возможных состояний электрона	2	8	18	32	50	72	98
Общее число возможных состояний электрона	2	10	28	60	110	182	280

электрон должен обладать индивидуальным набором четырех квантовых чисел, одно из которых - номер уровня энергии, а остальные связаны с угловыми представлениями вероятностной функции.

Посмотрим, как согласно данной таблице находится число валентных электронов для германия. Как видно из таблицы, на трех заполненных оболочках

размещаются 28 электронов. Атомный вес германия по таблице Менделеева - 32. Значит внешними, валентными окажутся 32-28 = 4 электрона.

Рассмотрим таким же образом широко распространенный элемент, участвующий в построении полупроводников - "Индий". Согласно таблице Менделеева его атомный вес - 49. Предыдущие уровни полностью заняты 28 электронами. Поэтому на внешней оболочке в принципе остается 49-28=21 электрон. Однако в таблицу мы занесли максимальное число состояний элементарных частиц, а электронную оболочку не обязательно забивать максимально. На каждой из последующих оболочек может находится такое же число электронов, сколько и на одной из предыдущих оболочек. В данном варианте оказывается, что можно создать еще одну оболочку с 18 электронами. Значит, внешними, валентными, остаются 21-18=3 электрона. Валентность примеси -"индия"оказывается меньше валентности материала полупроводника - "германия". В этом случае примесь по отношению к электронам атомов германия ведет себя как агрессор: она захватывает их. В результате в кристаллической решетке вещества появляются атомы, которым не хватает одного электрона. Заряд этих атомов положителен.



Они притягивают отрицательные заряженные электроны, и при первой же возможности атом, у которого не хватает электрона, захватывает его у соседнего атома. Положительный заряд при этом перемещается к соседнему атому. То, в свою очередь, захватывает электрон у соседа. Таким образом, положительный заряд перемещается еще дальше. Это "свободно гуляющий положительный заряд"называется "дыркой".

5. Объясните механиз дырочной проводимости собственных полупроводников. Полностью перепишите Добавление № 1

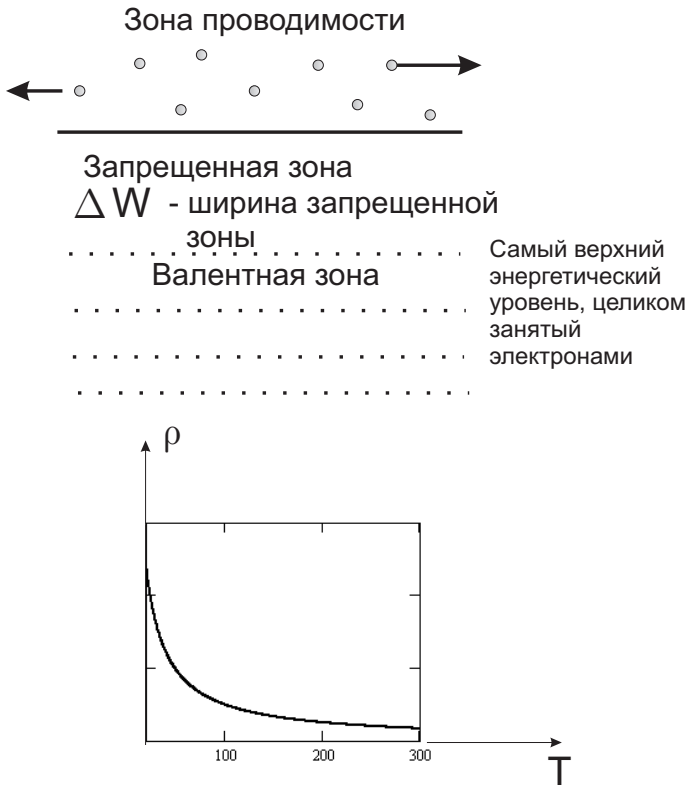
6.Объясните электрические свойства полупроводников с точки зрения зонной теории твердого тела. Как меняется с температурой сопротивление полупроводника - увеличивается илиуменьшается ? Почему ?
В настоящем вопросе мы рассмотрим собственные полупроводники. Собственный - полупроводник, в котором можно пренебречь влиянием примесей при данной температуре. В собственном полупроводнике существует две зоны: валентная зона и зона проводимости. Валентная зона это самый верхний энер-

гетический уровень полупроводника, целиком заполненный электронами. Зона проводимости характеризуется свободным перемещением электронов. При $T = 0°$ К у собственного полупроводника валентная зона полностью заполнена электронами, а зона проводимости абсолютно свободна, а вследствие наличия запрещенной зоны, собственный полупроводник при $T = 0°$ К является идеальным диэлектриком. С увеличением температуры активность электронов валентной зоны возрастает и они с большей легкостью перепрыгивают энергетическую щель - то есть легче преодолевают запретную зону и сопротивление полупроводника уменьшается. Для идеального полупроводника удельное сопротивление - (то есть сопротивление полупроводника длиной в один метр и сечением $1м^2$) определяется формулой:

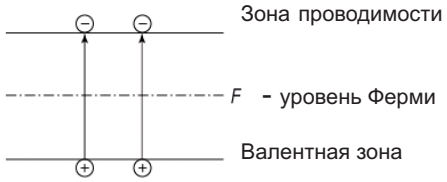
$$\rho = \rho_0 * e^{\frac{\Delta W}{2*k*T}}$$

где ΔW - ширина запрещенной зоны, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура в градусах Кельвина, ρ_0- некоторое начальное сопротивление.

7. Докажите, что уровень ферми в собственном полупроводнике действительно расположен в середине запрещенной зоны.
Уровень Ферьми - это такой энергетический уровень вероятность заполнения которого при ненулевой температуре строго равна 1/2. Для того, чтобы не приводить довольно сложное распределение Ферми-Дирака, связывающее вероятность нахождения электрона на энергетическом уровне с номером этого уровня,



скажем, что при нулевой абсолютной температуре валентная зона по определению целиком занята, а зона проводимости полностью свободна. Запрещенная зона лежит между зоной валентности и зоной проводимости и, естественно предположить, что именно в ее середине находится уровень с вероятностью заполнения 1/2. Можно это себе представить и по-другому. Вот представьте себе один электрон и два разрешенных уровня (1 и 2). Электрон какое-то время сидит на нижнем уровне 1, а потом перескакивает под действием каких-то причин (не в этом суть) на уровень 2 и какое-то время живет там. Потом снова спрыгивает на 1.... и так далее. Какова же средняя энергия электрона? А она как раз лежит между уровнями 1 и 2, хотя электрона с такой энергией в природе поймать нельзя. Теперь, если электронов много, а уровни превратились в зоны, то и положение уровня Ферми понять можно.
Вообще говоря, распределение Ферми-Дирака для электронов имеет вид



Заброс из валентной зоны

$$f(E,T) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-F}{k*T}}}$$

где f(E,T) - вероятность нахождения электрона на уровне "E", T - абсолютная температура, k - постоянная Больцмана. При E=F показатель экспоненты обращается в ноль, сама экспонента при этом равна 1 и вероятность действительно получается эквивалентной 1/2.

8. Германиевый образец нагревают от 0° до 17° С. Принимая ширину запрещенной зоны германия $\Delta W = 0.72$ эВ, определите, во сколько раз возрастет его удельная проводимость.
Удельная проводимость обратно пропорциональна удельному сопротивлению (см вопрос 6). Формула удельной проводимости для собственного полупроводника имеет вид:

$$\gamma = \gamma_0^{-\frac{\Delta W}{2*k*T}}$$

где ΔW - ширина запрещенной зоны, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура в градусах Кельвина, ρ_0- некоторое начальное сопротивление. Отношение двух проводимостей при различной температуре

$$\frac{\gamma(T_2)}{\gamma(T_1)} = e^{\frac{\Delta W}{2*k}*\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}$$

где ΔW - ширина запрещенной зоны, $k = 1.38 * 10^{-23}$ дж/град - поястоянная Больцмана,1 эВ $= 1.6 * 10^{-19}$ дж, а абсолютные температуры равны $T_1 = 273°$

и $T_2 = (273 + 17) = 290°$ К. Подставив эти значения в формулу получим:

$$\frac{\gamma(T_2)}{\gamma(T_1)} = \exp\left(\frac{0.72 * 1.6 * 10^{-19}\text{дж}}{2 * 1.38 * 10^{-23}\frac{\text{дж}}{\text{град}}} * (\frac{1}{273} - \frac{1}{290})(\frac{1}{\text{град}})\right)$$

Численно

$$\frac{\gamma(T_2)}{\gamma(T_1)} = 2.45$$

Ответ: При увеличении температуры удельная проводимость германия возрастет в 2.45 раза.
9. Определите ширину запрещенной зоны собственного проводника, если при температуре T_1иT_2 $(T_2 > T_1)$ его сопротивлениесоответственно равно R_1 и R_2.

Из формулы сопротивления собственного полупроводника

$$R = R_0 * e^{\frac{\Delta * W}{2 * k * T}}$$

где ΔW - ширина запрещенной зоны, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура в градусах Кельвина, R_0- некоторое начальное сопротивление мы получим отношение двух сопротивлений и прологарифмиркем его. Окажется

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \Delta W * \frac{1}{2 * k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

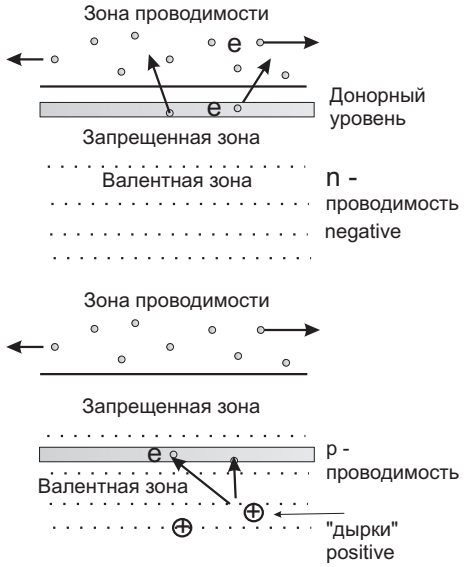
Из данного равенства поделив левую часть на множитель правой части легко получит ширину запрещенной зоны ΔW.

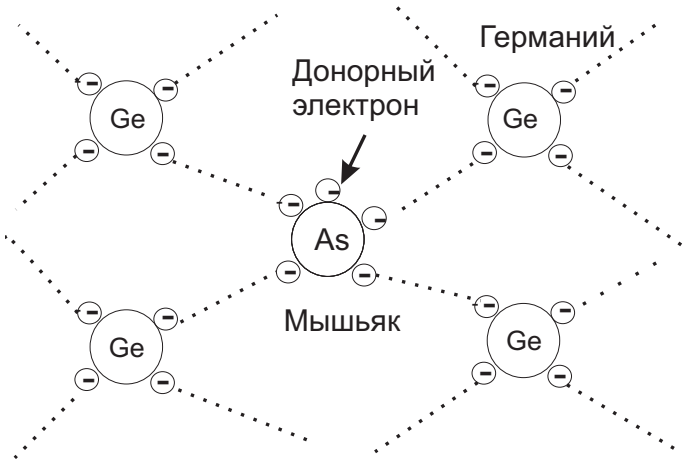
10. Нарисуйте зонные схемы полупроводников n-типа и p-типа и объясните механизмы их проводимости.
Донор (т.е. отдающий электрон) - это примесный атом или дефект кристаллической решчтки, создающий в запрещенной зоне вблизи "дна"зоны проводимости энергетический уровень, занятый в невозбуждчнном состоянии электроном и способный в возбуждчнном состоянии при тепловом возбуждении отдать электрон в зону проводимости.

Акцептор (т.е. присоединяющий электрон) - это примесный атом или дефект кристаллической решчтки, создающий в запрещчнной зоне вблизи "потолка"валентной зоны энергетический уровень, свободный от электрона в невозбуждчнном состоянии и способный захватить электрон из валентной зоны благодаря тепловому возбуждению. Зонные схемы n- и p- пеоеходов представлены на рисунках

11. В чистый германий введена небольшая примесь мышьяка. Пользуясь периодической системой элементов Д.И.Менделеева, определите и объясните тип проводимости примесного германия.
Смотрите выше Дополнение №1. По таблице Менделеева атомный вес мышьяка равен 31. Полное число накопленных электронов на предыдущих оболочках

28, поэтому валентными остаются 33-28 = 5 электрона. А германий, как мы установили в Дополнении №1 имеет 4 валентных электрона. Поэтому мышьяк является "донором"и обеспечивает n - проводимость.
12.В чистый кремний введена небольшая примесь бора. Пользуясь периодической системой элементов Д.И.Менделеева, определите и объясните тип проводимости примесного кремния.
Смотрите выше Дополнение №1. По таблице Менделеева атомный вес кремния равен 14. Полное число накопленных электронов на предыдущих оболочках 10, поэтому у кремния валентными остаются 14-10 = 4 электрона. У бора по таблице Менделеева атомный вес 5. На первом уровне находится 2 электрона. Следовательно, валентность бора равна 5-2=3. Имеем точно такой же вариант "дырочной"p-проводимости как в Дополнении №1, только место германия занимает кремний, а место индия - бор.
13. Пользуясь периодической системой элементов Д.И.Менделеева, объясните какой проводимостью будет обладать германий, если в него внести небольшую примесь 1) алюминия, 2) фосфора.
Смотрите выше Дополнение №1. Германий, напомним - четырехвалентен. Алю-

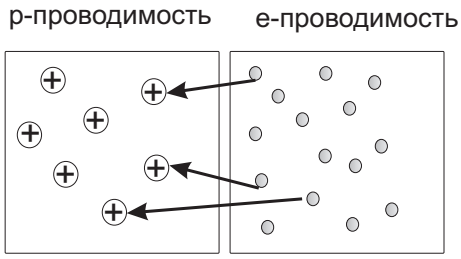




миний по таблице Д.И. Менделеева имеет атомный номер 13. Согласно Дополнению предыдущие уровни заполнены 10 электронами. Остается три валентных электрона. Получаем типичную дырочную p-проводимость, такую же как на рисунке Дополнения №1, только акцептором будет не индий, а алюминий - "Al".

Атомный вес фосфора - 15. На предыдущих уровнях находится 10 электронов (см. таблицу Дополнения №1). Поэтому наблюдается типичная электронная e- проводимость (см. рис. вопроса 11 - только вместо мышьяка будет находиться фосфор-"P").

14. Используя зонную схему объясните механизм физических процессов, происходящих в p-n - переходе.
Электронно - дырочный переход (p - n переход) - это переходный слой между двумя областями полупроводника с разной электропроводностью, в котором (переходном слое) существует диффузионное (то есть возникающее благодаря проникновению элекронов в дырочную область) электрическое поле. Он является основным элементом большинства полупроводниковых приборов. Между

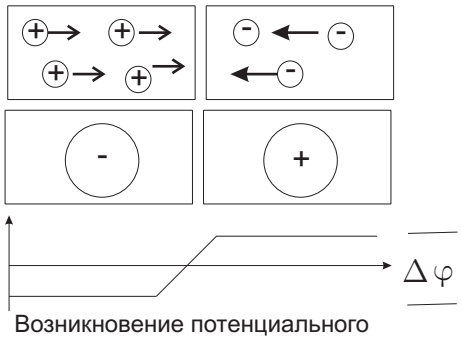


n - и p - областями при этом существует разность потенциалов, называемая контактной разностью потенциалов. Потенциал n - области положителен по отношению к потенциалу p - области. В зоне p - n - перехода существует диффузионное электрическое поле. Это поле препятствует дальнейшему процессу диффузии (процесс перемещения носителей заряда прекращается тогда, когда контактный потенциал уравновешивает разность работ выхода электронов из полупроводников n - и p - типов) и вызывает дрейф неосновных носителей. Итак, дырки и электроны двинулись через контакную зону двух проводников. Однако долго продолжаться это не может. Электроны, заполнившие дырки и положительные p-носители, приникшие в свою очередь в отрицательную n- jобласть, создают на границе разность потенциалов, которая препятствует дальнейшему приникновению носителей в дополнительные области.

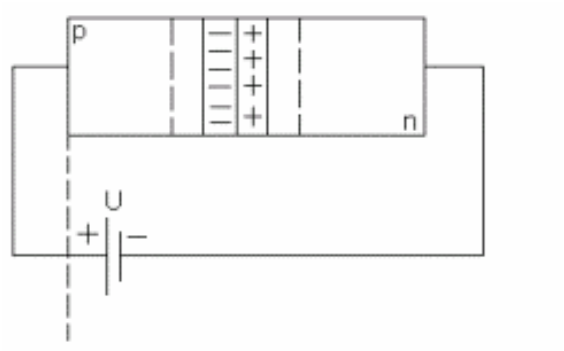
15.Какое направление (и почему) в p-n-переходе является для тока пропускным, если: 1) внешнее и контактное поля противоположны по направлению, 2) внешнее и контакное поля по направлению совпадают.

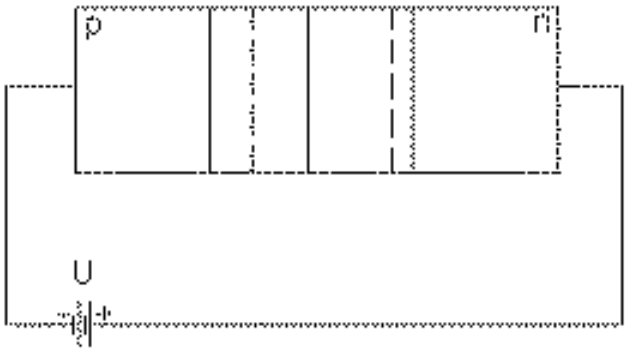
1) Если базу (n - слой) соединить с отрицательным полюсом источника напряжения, а эмиттер (p - слой) - с положительным полюсом, то в p - n - переходе создаются условия для прохождения тока, отличающиеся от условий при термодинамическом равновесии. Возникшее напряжение понизит барьер $\Delta\varphi$, о

котором рассказано в вопросе 14 и этоо приведет к появлению сравнительно большого тока через p - n - переход
2) Если "+"источника напряжения соединть с базой (n- областью), а минус с p-областью, то приложенное напряжение, действует в том же направлении, что и контактная разность потенциалов и припятствует диффузонному движению основных насителей. Основные носители тока как бы "отступают"от p - n - перехода, что приводит к увеличению толщины запирающего слоя. Ток при таком подключении значительно меньше первоначальнго.



Возникновение потенциального барьера





5 Волновое уравнение

Одномерное волновое уравнение в однородной среде имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$U(x,t) = A * f_1(t - \frac{x}{c}) + B * f_2(t + \frac{x}{c}) \tag{5.2}$$

Тогда

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = (-\frac{1}{c}) * A * f_1'(t - \frac{x}{c}) + \frac{1}{c} * B * f_2'(t + \frac{x}{c})$$

и вторая производная равна

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = (-\frac{1}{c})^2 * A * f_1'(t - \frac{x}{c}) + (\frac{1}{c})^2 * B * f_2'(t + \frac{x}{c})$$

Здесь штрих $'$ означает проихводную по полному аргументу, то есть по $(t - \frac{x}{c})$ или по $(t + \frac{x}{c})$. Аналогично определяется вторая производная по времени. Волна $A * f_1(t - \frac{x}{c})$ считается волной, *распространяющейся вперед*, а волна $B * f_2(t + \frac{x}{c})$ - волной, распространяющейся назад. Объясняется это следующим образом: если в точке $x = 0$ произошло возмущение, вызвавшее волну и это возмущение имеет вид мгновенного взрыва, типа

$$\begin{cases} f(t) = 1, \text{при } t = 0 \\ f(t) = 0, \text{во всех остальных t} \end{cases}$$

то $f(t - \frac{x}{c}) = 0$ при $t = \frac{x}{c}$. Другими словами, сигнал в точке x запаздывает на время распространения волны. Волновая структура $f(t + \frac{x}{c})$ отличается от предыдущей лишь заменой знака у координаты. Таким образом, если $f(t - \frac{x}{c})$ распространяется в положительном направлении оси oX, то $f(t + \frac{x}{c})$ распространяется в отрицательном направлении этой оси - то есть в обратную сторону. Таковой чаще всего оказывается отраженная от какого либо препятствия волна.

Далее мы достаточно долго будем изучать волну, распространяющуюся только в прямом направлении. Более того, в связи с гармоническим характером колебания главным объектом рассмотрения окажется волна от источника вида

$$f(t) = A\cos(\omega t)$$

имеющая форму

$$U(x,t) = A\cos(\omega(t - \frac{x}{c})) \tag{5.3}$$

Величина

$$k = \frac{\omega}{c}$$

называется *волновым числом.* В соответствии с ней форма волны приобретает вид

$$U(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{5.4}$$

Рассмотрим теперь вместо "x" произвольно пройденный путь. Тогда волновой сигнал окажется следующим:

$$U(x,t) = A\cos(\omega(t - \frac{s}{c}) + \varphi) \tag{5.5}$$

где φ - дополнительная фаза, обусловенная различными присинами. Сложим два колебания с одинаковой амплитудой и частотой, но возможно прошедшие путь в средах с различной скоростью. Получим

$$U_1(x,t) + U_2(x,t) = A[cos(\omega(t - \frac{s_1}{c_1}) + \varphi_1) + cos(\omega(t - \frac{s_2}{c_2}) + \varphi_2)]$$

Применим формулу сложения косинусов

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Суммарное колебание окажется следующим

$$2A\cos(\omega(t - \frac{1}{2}(\frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2})) + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2))\cos(\frac{\omega}{2}(\frac{s_2}{c_2} - \frac{s_1}{c_1}) + \frac{\omega}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)) \tag{5.6}$$

Второй сомножитель не зависит явно от времени и определяется лишь разностью времен пробега и разностью фаз.

Величина, обратная скрости распространения волны в данной среде

$$n(x) = \frac{1}{c(x)}$$

назывется абсолютным показателем преломления для данной среды.

Оптической длиной пути называется *время пробега вдоль луча.*

$$\tau = \int_{P_1}^{P_2} nds = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{c(x)}$$

Для однородной среды, когда $n = const$ оптическая длина пути выражается наиболее просто

$$\tau = n * s = \frac{s}{c(x)}$$

6 Принцип Ферма - принцип наменьшего времени пробега

Как утверждается в ([**?**] п 3.3.2) принцип Ферма или принцип наикратчайшего оптического пути говорит о том, что *время пробега (оптическая длина пути) реального луча между любыми двумя точками P_1 и P_2*

$$\int_{P_1}^{P_2} nds = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{c(x)}$$

короче времени пробега любой другой кривой, соединяющей эти точки и лежащей в некоторой регулярной окрестности луча. Под регулярной окрестностью понимается область, которую можно заполнить лучами таким образом, что через каждую точку ее будет проходить один и только один луч. Например, в регулярной окрестности нет точек фокуса (или они могут быть только на концах луча) и каустик, так как через эти точки проходит несколько лучей.

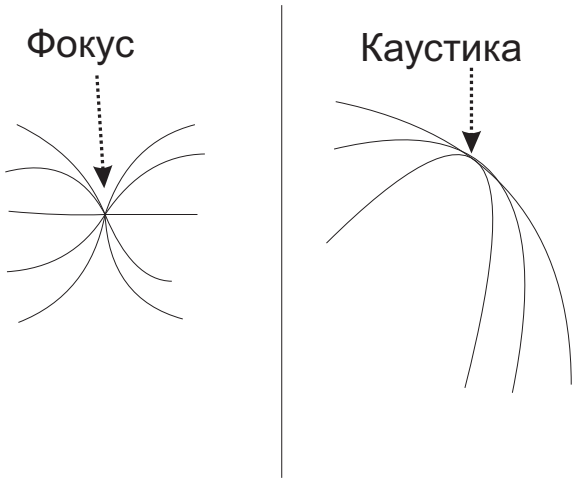


Рис. 1: Нерегулярные области лучей

Выведем из принципа Ферма **закон Снеллиуса**. Предположим, что луч распространяется через две среды с различными показателями преломления.

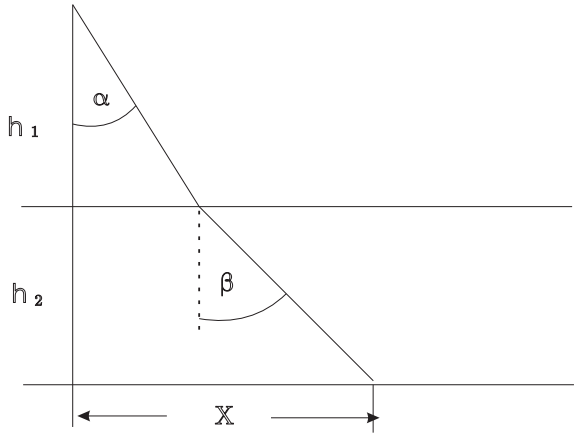


Рис. 2: Вывод закона Снеллиуса

Точка X считается фиксированной, поэтому

$$X = h_1 * tg(\alpha) + h_2 * tg(\beta) = const;$$

По принципу Ферма время пробега до данной точки минимально

$$\tau = \frac{h_1}{c_1 * \cos(\alpha)} + \frac{h_2}{c_2 * \cos(\beta)} \to Min$$

Будем считать угол β функцией угла α, то есть $\beta = \beta(\alpha)$. Соответственно, от угла α начинают зависить горизонтальное расстояние X и время пробега τ. Однако ввиду постояества расстояния производная

$$\frac{dX}{d\alpha} = \frac{h_1}{c_1 * \cos^2(\alpha)} + \frac{h_2}{c_2 * \cos^2(\beta)} * \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Производная от времени пробега по углу равна нулю из-за необходимого условия существования минимума:

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{h_1 * \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{h_2 * \sin(\beta)}{\cos^2(\beta)} * \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Из первого равенства

$$\frac{h_2}{\cos^2(\beta)} * \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{h_1 * c_2}{c_1 * \cos^2(\alpha)}$$

Если подставить это значение во второе равенство, то получиться

$$\frac{h_1 * \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} - \frac{h_1 * c_2 * \sin(\beta)}{c_1 * \cos^2(\alpha)} = 0;$$

После деления обеих частей данного тождества на

$$\frac{h_1}{c_2 * \cos^2(\alpha)}$$

возникнет *закон Снеллиуса*

$$\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2} \tag{6.1}$$

На самом деле Снеллиус(1580 - 1626)не имел в своем распоряжении независимых измерений показателей преломления или скоростей света в среде, но он экспериментально доказал, что для одного и того же материала отношение синусов углов падающего и преломленного луча постоянно.Закон Снеллиуса был усовершенствованием оптического закона Кеплера, который в свою очередь на основе остроумных опытов развил самую раннюю из известных количественных формулировок закона преломления, принадлежащую Птолемею (II столетие н.э.)

$$\frac{\alpha}{c_1} = \frac{\beta}{c_2}$$

История ранних интерпритаций закона преломления дана в книге Маха (Mach E., The principles of phisical optics, Dover, New York, 1949; первод с немецкого издания 1913 года).

Величина

$$n_{12} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

называется *относительным показателем преломления*

Может оказаться так, что после падения луча на границу двух сред $\beta = 90°$. Такое происходит только при $c_2 > c_1$. Угол падения α начиная с которого вся

световая энергия отражается от границы раздела называется *углом полного внутреннего отражения*

$$\sin(\alpha_{in}) = \frac{c_1}{c_2}$$

Задача Показатели преломления алмаза и стекла равны соответственно 2.5 и 1.5. Как должны соотноситься толщины слоев этих веществ, чтобы время распространения света в них было одинаковым ?

Решение

$$\tau = n_1 * h_1 = n_2 * h_2$$

Численно

$$\tau = 2.5 * h_1 = 1.5 * h_2$$

отсюда

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{2.5}{1.5} = \frac{5}{3} = 1.67$$

Задача На дне водоема, глубиной h находиться точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый диск так, что его центр находиться над источником. При каком минимальном диаметре диска лучи от источника не будут выходить из воды Показатель преломления воды равен $\frac{4}{3}$,показатель преломления воздуха равен 1 ?

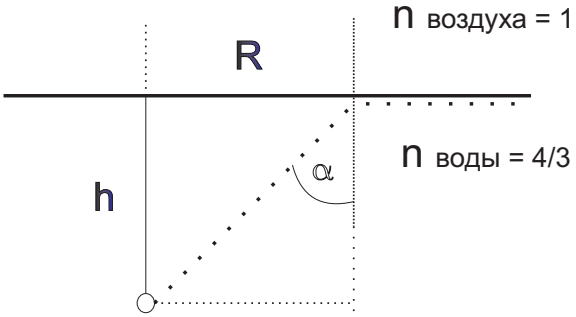


Рис. 3: Предельный угол отражения

Из рисунка видно, что

$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

Так как угол отражения - предельный, то

$$n_{(\text{вода})} * \sin(\alpha) = n_{(\text{воздух})} * \sin(90^\circ) = n_{(\text{воздух})}$$

Численно

$$\frac{4}{3} * \sin(\alpha) = 1$$

Отсюда

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{3}{4}$$

Умножим на знаменатель и возведем в квадрат

$$16 * R^2 = 9 * (R^2 + h^2)$$

или

$$7 * R^2 = 9 * h^2$$

Ответ Радиус круга должен быть равен $\frac{3}{\sqrt{7}} * h = 1.34$*h. Диаметр диска $= \frac{6}{\sqrt{7}} * h = 2.68$*h.

6.1 Оптические обманы. Мираж

Человеческий глаз и его анализатор - мозг привыкли в основном к распространению света в воздухе - то есть к однородной среде с постоянной скоростью. В результате, они дают обманы зрения при изменении свойств среды.

Задача На набережной при подъеме уровня реки ступени, сходящие к воде иногда захлестывает волной. При этом кажется, что подводная часть ступеней приподнимается. Отчего это происходит ?

Решение Якобы прямолинейное распространение света дает следующую картину

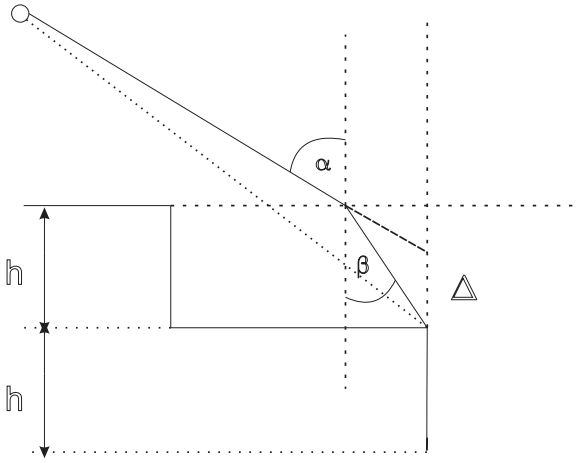


Рис. 4: Искажение изображения

Рассмотрим теперь явление **миража**. Пусть скорость света линейно растет (если измерять ее вниз от источника). Тогда из закона Снеллиуса

$$\sin\beta(z) = \frac{c(z)}{c_0} * \sin\alpha$$

где c_0 скорость света около источника и α - угол выхода луча из источника. Как видно ближе к земле угол становиться все больше и больше в сравнении с первоначальным. Возникает следующая картина

6.2 Формула тонкой линзы

В криволинейных поверхностях закон Снеллиуса применяется локально, в окрестности соприкосновения радиуса кривизны с поверхностью.

Линза (нем. Linse, от лат. lens - чечевица). *Линзой* называется прозрачное тело, ограниченое двумя поверхностями. Чаще всего обе поверхности криволинейные и имеют вогнутую или выпуклую сферическую форму. Однако бывает,

что одна из поверхностей линзы оказывыется плоской. Линза назвается **тонкой**, если ее толщина мала по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей. *Главной оптической осью линзы* называют прямую, проходящую через центры кривизны ее поверхностей. Можно считать, что в тонкой линзе точки пересечения главной оптической оси с обеими поверхностями линзы сливаются в одну точку "O", хотя на рисунке выпуклость линзы все-таки отображается. Точку "O" называют *оптическим центром линзы.* Для тонкой линзы плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и проходящая через точку "O" называется *главной плоскостью.* Все прямые, проходящие через оптический центр линзы и не совпадающие с ее главной осью, называются *побочными оптическими осями линзы.*

В зависимости от форм различают собирательные (положительные) и рассеивающие (отрицательные) линзы. К группе собирательных линз обычно относят линзы, у которых середина толще их крачв, а к группе рассеивающих - линзы, края которых толще середины. Следует отметить, что это верно только если показатель преломления у материала линзы больше, чем у окружающей среды. Если показатель преломления линзы меньше, ситуация будет обратной. Например пузырек воздуха в воде - двояковыпуклая рассеивающая линза. Типы линз (см. рис. 6)

Собирательные:

1 - двояковыпуклая

2 - плоско-выпуклая

3 - вогнуто-выпуклая (положительный мениск)

Рассеивающие:

4 - двояковогнутая

5 - плоско-вогнутая 6 - выпукло-вогнутая (отрицательный мениск)

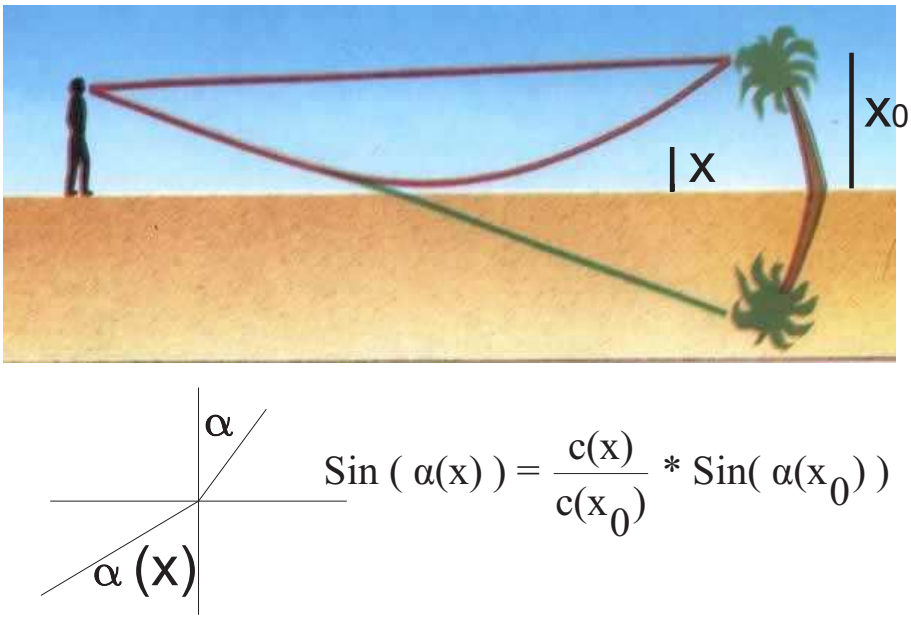


Рис. 5: Мираж

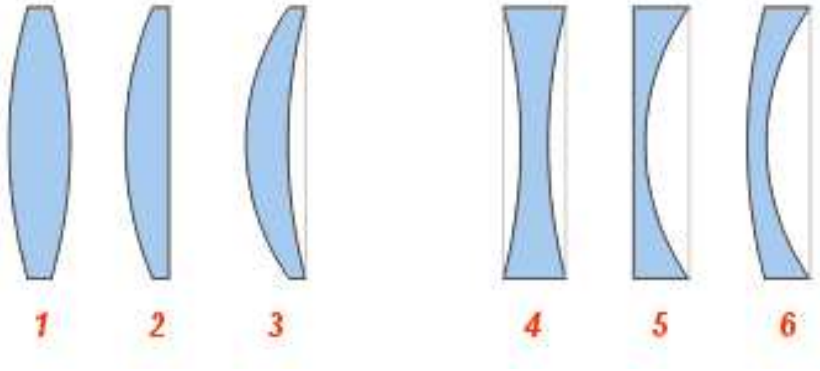


Рис. 6: Типы линз

Выпукло-вогнутая линза называется мениском и может быть собирательной (утолщается к середине) или рассеивающей (утолщается к краям). Мениск, у которого радиусы поверхностей равны имеет оптическую силу, равную нулю (применяется для коррекции дисперсии или как покровная линза). Так, линзы очков для близоруких - как правило, отрицательные мениски.

Выведем формулу тонкой линзы Из того, что $\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$ возникает

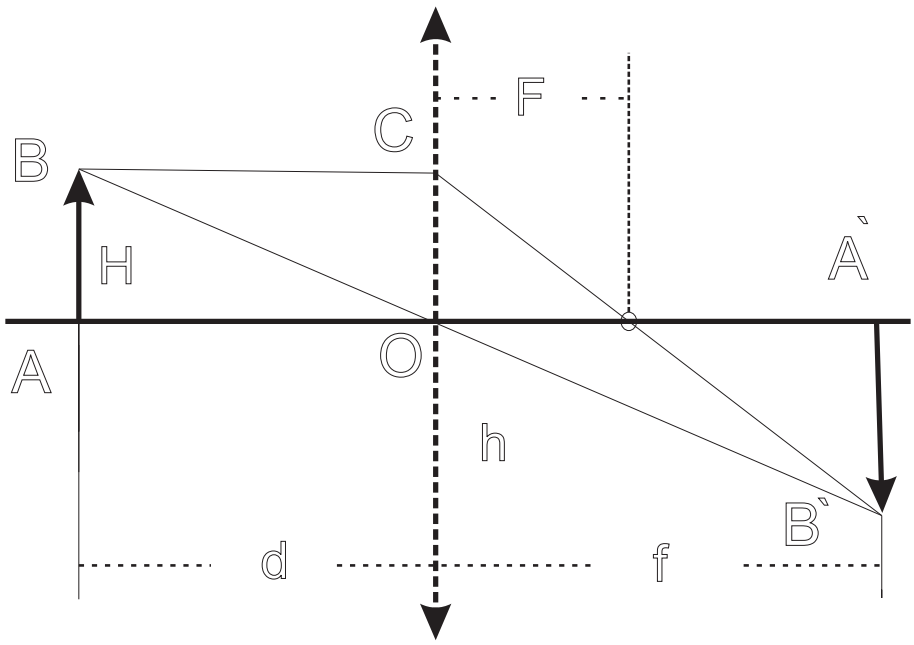


Рис. 7: Вывод формулы линзы

равенство

$$\frac{f}{d} = \frac{h}{H}$$

Если посмотреть на пространство, расположенное справо от линзы, то из $\triangle OCF \sim \triangle A'B'F$ следует

$$\frac{h}{OC} = \frac{f - F}{F}$$

Из параллельности изображений в левой полуплоскости $OC = H$. Воспользуемся предыдущим равенством и заменим $\frac{h}{H}$ на $\frac{f}{d}$. Освободимся от знаменателя.

$$F * f = (f - F) * d$$

Поделим обе части этого равенства на f*F*d.

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f};$$

откуда следует *формула тонкой линзы*

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \tag{6.2}$$

Вывод формулы чисто геометрический. Тонкость линзы позволяет упростить расчеты, не учитывая поведение лучей внутри самой линзы. Физическая часть задачи начинается только тогда,когда мы захотим выразить фокусное расстояние линзы через кривизны ее поверхностей и показатель преломления.

Для удобства мы первоначально рассмотрим не двояковыпуклую линзу, а линзу, представляющую из себя часть сферы, причем среда, расположенная внутри сферы обладает показателем преломления n_1.

Параксиальный пучок лучей (от греческого para - возле, мимо, вне и латинского axis - ось)- это пучок лучей, распространяющихся вдоль оси центрированной оптической системы и образующих очень малые углы с осью и нормалями к преломляющим и отражающим поверхностям системы. Напомним

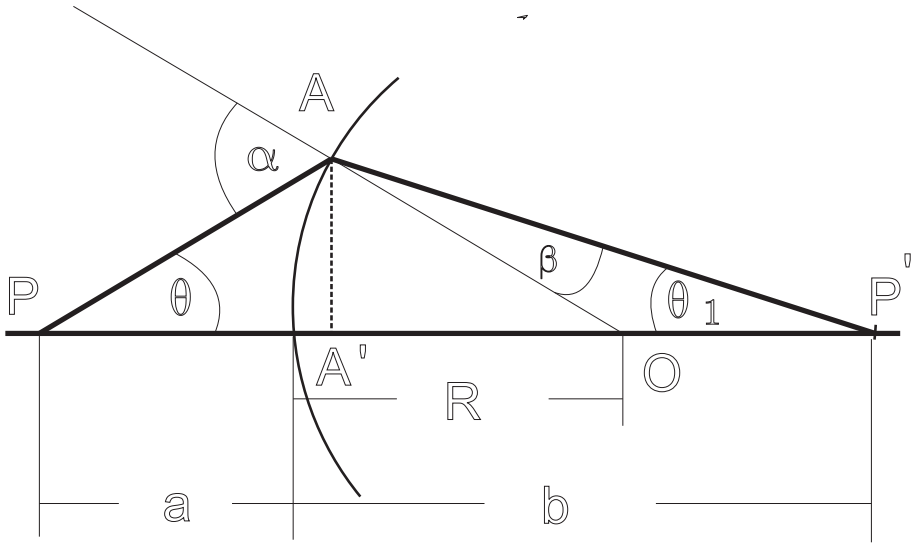


Рис. 8: Инвариант Аббе для сферической линзы

теорему синусов для треугольников. Она утверждает, что в треугольнике отношение стороны к синусу противоположного угла есть величина постоянная. Применим теорему синусов к $\triangle PAP'$.

$$\frac{PO}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{AO}{\sin\theta}$$

В наших обозначениях и с учетом $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ данная формула переписывется как

$$\frac{a+R}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\theta}$$

Из $\triangle P'OA$

$$\frac{AO}{\sin\theta_1} = \frac{OP'}{\sin\beta}$$

Другими словами

$$\frac{R}{\sin\theta_1} = \frac{b-R}{\sin\beta}$$

Итак, из двух предыдущих формул

$$\sin\alpha = \frac{a+R}{R} * \sin\theta;$$
$$\sin\beta = \frac{b-R}{R} * \sin\theta_1;$$

Напомним закон Снеллиуса через показатели преломления.

$$n_0 * \sin\alpha = n_1 * \sin\beta$$

Соответственно:

$$n_0 * \frac{a+R}{R} * \sin\theta = n_1 * \frac{b-R}{R} * \sin\theta_1;$$

В параксиальном случае синусы углов можно заменить на сами углы. Кроме того, обе формулы поделим на R.

$$n_0 * (a+R) * \theta = n_1 * (b-R) * \theta_1;$$

Для параксиальных лучей приблизительно

$$b * tg\theta_1 = a * tg\theta = AA';$$

Тангенсы малых углов также приблизительно равны самим углам, то есть предыдущее равенство заменяется на

$$b * \theta_1 = a * \theta$$

Умножим равенство $n_0 * (a+R) * \theta = n_1 * (b-R) * \theta_1$ на b.

$$n_0 * (a+R) * b * \theta = n_1 * (b-R) * b * \theta_1 = n_1 * (b-R) * a * \theta$$

После сокращения на θ угол из уравнения выпадает. Другими словами, все лучи, под небольшими углами выходящие из P, сходятся в P'. Раскроем скобки

$$n_0 * a * b + n_0 * b * R = n_1 * a * b - n_1 * a * R;$$

и переставим отдельные элементы равенства

$$n_0 * b * R + n_1 * a * R = (n_1 - n_0) * a * b$$

Делим на $a * b * R$. Получим *инвариант Аббе для сферической линзы*

$$\frac{n_0}{a} + \frac{n_1}{b} = \frac{n_1 - n_0}{R}; \tag{6.3}$$

Задача 1. Определить установившуюся температуру зачерненной металлической пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца.

Решение. Согласно справочнику Яворский Б.М., Детлаф А.А.,"Справочник по физике для инженеров и студентов вузов"отдел V - "Волновые процессы", Раздел 9 "Тепловое излучение"для произвольной частоты и температуры отношение лучеиспускательной способности тела и его поглощательной способности для абсолютно черного тела равно 1. Таким образом, для зачерненной металлической пластинки мы можем приравнять поглащаемую энергию испускаемой и воспользоваться законом Стефана-Больцмана

$$\varepsilon_T = \sigma_T * T^4;$$

Здесь σ_N - интегральная излучательная способность - количество энергии излучаемой (а, в нашем случае и поглащаемой) пластиной во всех возможных частотах с единицы поверхности тела за единицу времени.

Общее количество солнечной радиации, поступающее в единицу времени на единичную площадку на внешней границе атмосферы, перпендикулярную солнечным лучам, при среднем расстоянии Земли от Солнца называют *солнечной постоянной.* Значение солнечной постоянной определялось тщательными измерениями на протяжении длительного времени, сейчас оно принято равным 1370 Вт/м?. (см. Енохович А.С., "Краткий справочник по физике", Таблица 229 - "Данные о Солнце"). Таким образом, поток солнечной энергии, падающей на металлическую пластинку в единицу времени

$$\varepsilon_T = 1370 \frac{\texttt{Ватт}}{\texttt{м}^2}$$

Кроме того универсальная постоянная Стефана-Больцмана

$$\sigma_T = 5.67 \frac{\texttt{Ватт}}{\texttt{м}^2 \texttt{град}^4}$$

Отсюда

$$T^4 = \frac{1370 \frac{\texttt{Ватт}}{\texttt{м}^2}}{5.67 \frac{\texttt{Ватт}}{\texttt{м}^2 \texttt{град}^4}} = 241.3226\, \texttt{град}^4$$

Извлечем корень четвертой степени

$$T = 3.94\, \texttt{град}$$

Ответ. Установившаяся температура зачерненной металлической пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца равна $T = 3.94\,^\circ$.

Задача 2 Какая часть первоначальной массы радиоактивного изотопа распадается за время жизни этого изотопа ?

Решение. Согласно справочнику Яворский Б.М., Детлаф А.А.,"Справочник по физике для инженеров и студентов вузов"отдел IV - "Атомная и ядерная физика"Глава 4 - "Атомное ядро". самопроизвольный распад атомных ядер (изотопов) следует закону

$$N(t) = N_0 * e^{-\frac{\ln 2}{\tau} * t};$$

Здесь $N(t)$ - количество изотопа на момент времени t, N_0 - первоначальное количество изотопа.Кроме того, $\tau = \frac{T}{2}$ - период пулураспада, T - полное время жизни изотопа. Подставим в эту формулу $t = T$. Получим

$$N(t) = N_0 * e^{-\frac{\ln 2}{\frac{T}{2}} * T} = e^{-2 * \ln 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Мы воспользовались формулой

$$e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$

Ответ. Если к концу полного периода изотопа останется $\frac{1}{4}$ от его первоначального вещесва N_0 то за полный период распадается $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ первоначального вещества.